

ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์
ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร

นายโอบบุญ บุรพา

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต
แขนงวิชาหลักสูตรและการสอน สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

พ.ศ. 2553

**The Effects of Mathematics Problem Solving Learning Activities in the Topic of
Pythagoras Theorem on Learning Achievement of Mathayom Suksa II Students
at Wangtagoo Rath U-tit School in Phichit Province**

Mr. Aobboon Burapha

**An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for
the Degree of Master of Education in Curriculum and Instruction**

School of Educational Studies

Sukhothai Thammathirat Open University

2010

หัวข้อการศึกษาค้นคว้าอิสระ ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน คณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร

ชื่อและนามสกุล นายโอปนุญ บุรพา

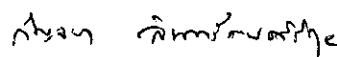
แขนงวิชา หลักสูตรและการสอน


สาขาวิชา ศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

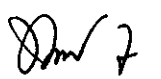
อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร. กัญจนา ลินทรัดนศิริกุล

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ ได้รับความเห็นชอบให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษา ตามหลักสูตรระดับปริญญาโท เมื่อวันที่ 15 พฤศจิกายน 2553

คณะกรรมการสอบการศึกษาค้นคว้าอิสระ


..... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. กัญจนา ลินทรัดนศิริกุล)


..... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล)


.....
(รองศาสตราจารย์ ดร. ทวีศักดิ์ จินดานุรักษ์)
ประธานกรรมการประจำสาขาวิชาศึกษาศาสตร์

ชื่อการศึกษาค้นคว้าอิสระ ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญหาด้านคณิตศาสตร์ เรื่อง
ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของ
นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร
ผู้ศึกษา นายโอบบุญ นูรพา รหัสนักศึกษา 2512102316 ปริญญา ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต
(หลักสูตรและการสอน) อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร. กัญญา ดินทรต้นศิริกุล
ปีการศึกษา 2553

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างก่อนและ
หลังการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญหาด้านเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส

กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 20 คน ได้มาโดยการสุ่มแบบกลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
ประกอบด้วยแผนการจัดการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญหาด้านเรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และแบบทดสอบ
วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล คือ การทดสอบค่าที

ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดย
วิธีแก้ปัญหาด้านสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

คำสำคัญ กิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญหาด้าน ทฤษฎีบทพีทาโกรัส มัธยมศึกษา

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาครั้งนี้ข้าวิสระนี้ผู้วิจัยได้รับความอนุเคราะห์อย่างยิ่งจากรองศาสตราจารย์ ดร. กัญญา ถินทรตันศิริกุล ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและติดตามการทำการศึกษาค้นคว้าอิสระอย่างใกล้ชิดเสมอมา นับตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จเรียบร้อยอย่างสมบูรณ์ ผู้วิจัยรู้สึกอบอุ่นและซาบซึ้งในความกรุณาของท่าน และขอขอบพระคุณท่านเป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล และรองศาสตราจารย์ อุษาวดี จันทรสุนธิ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำ ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จเรียบร้อย มีความสมบูรณ์และถูกต้อง และขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล กรรมการสอบการศึกษาค้นคว้าอิสระ ที่กรุณาให้ข้อเสนอแนะซึ่งทำให้การศึกษาค้นคว้าอิสระมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบคุณ คุณครูสิทธิณี อินทรา คุณครูพุลศรี บุรารวรรณ และคุณครูสมจิตร เข้ม้นกิจ ที่ได้กรุณาเป็นผู้ตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้รับการสนับสนุนกำลังใจจาก บิดา มารดา นายอุดม นางสุนีย์ บุรพา เป็นอย่างดี พร้อมทั้งภรรยาและบุตร นางอรวรรณ เด็กชายภูมิภัทร เด็กชายศักดิ์อิช บุรพา ซึ่งผู้วิจัยถือว่าเป็นค่าเป็นอย่างยิ่ง และนายเสริมพล แก้วขาว ที่ได้มีส่วนช่วยเหลือให้การศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์ที่จะได้รับจากการศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้ ผู้วิจัยขอขอบพระคุณ บิดา มารดา ครู-อาจารย์ ตลอดจนสถาบันการศึกษาต่าง ๆ ที่ผู้วิจัยเคยเรียนรู้อย่าง ตลอดจนผู้สนใจการศึกษาทั้งหมด

โอบนุญ บุรพา

พฤศจิกายน 2553

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
กิตติกรรมประกาศ	จ
สารบัญตาราง	ช
บทที่ 1 บทนำ	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย	6
สมมติฐานการวิจัย	6
ขอบเขตของการวิจัย	6
นิยามศัพท์เฉพาะ	7
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	7
บทที่ 2 วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง	8
แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์	8
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	25
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	29
ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง	29
เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	29
การเก็บรวบรวมข้อมูล	32
การวิเคราะห์ข้อมูล	32
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	33
บทที่ 5 สรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	35
สรุปการวิจัย	35
อภิปรายผล	36
ข้อเสนอแนะ	40
บรรณานุกรม	41

สารบัญ (ต่อ)

	หน้า
ภาคผนวก	45
ก รายนามผู้เชี่ยวชาญ.....	46
ข แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	48
ค แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียนและหลังเรียน เรื่อง ทฤษฎีบท พีทาโกรัส ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2	77
ประวัติผู้ศึกษา	96

สารบัญตาราง

	หน้า
ตารางที่ 4.1 ผลการหาค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และร้อยละ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างก่อนเรียนกับหลังเรียนเรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญา.....	33
ตารางที่ 4.2 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างก่อนเรียนกับหลังเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญา.....	34

บทที่ 1

บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์ มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยให้คาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหาและนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี และศาสตร์อื่นๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และสามารถอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน 2552: 1) เช่นเดียวกับสิริพร ทิพย์คง (2544: 13-15) ที่กล่าวว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญมากในการพัฒนาคุณภาพบุคคล เนื่องจากวิชานี้ได้ฝึกทักษะการคิดอย่างมีเหตุผล การคิดสร้างสรรค์ ที่เป็นพื้นฐานที่จำเป็นสำหรับการดำรงชีวิตและการเตรียมตัวของนักเรียน เพื่อการเป็นสมาชิกที่ดีของสังคม ส่งเสริมนักเรียนในการพัฒนาตนเอง รู้จักวิธีการแก้ปัญหาและสามารถตัดสินใจในการเลือกอาชีพตามความถนัด ความสนใจ และความสามารถของตนเอง ในชีวิตประจำวันทุกคนใช้ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างหลากหลาย เช่น การบอกเวลา การแลกเปลี่ยนเงินตรา การอ่านแผนภูมิและกราฟจากหนังสือพิมพ์ การตัดสินใจ การเปรียบเทียบเพื่อพิจารณาเลือกซื้อสิ่งของที่คิดว่าดีที่สุด การพิจารณาปริมาณน้ำมันที่จะใช้ในการขับรถ การตรวจสอบจำนวนเงินที่ใช้จ่ายในแต่ละเดือน การประมาณระยะทางที่รถวิ่ง การคำนวณค่าภาษีที่ต้องจ่ายให้รัฐในแต่ละปี นอกจากนี้อาชีพต่างๆ เช่น วิศวกรนักบัญชี ครูอาจารย์ นักเศรษฐศาสตร์ แพทย์ และนักธุรกิจต่างๆ ก็ต้องอาศัยความรู้ทางคณิตศาสตร์ในการประกอบอาชีพ

ในการเรียนคณิตศาสตร์นักเรียนได้เรียนรู้การแก้ปัญหาต่างๆ ตั้งแต่ปัญหาที่ง่ายและยากขึ้นตามลำดับของชั้นเรียน การสอนคณิตศาสตร์ในโรงเรียนจะช่วยฝึกทักษะการแก้ปัญหาให้กับนักเรียน และถ้านักเรียนเรียนคณิตศาสตร์ด้วยความเข้าใจ สนุกสนานนักเรียนสามารถแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่เรียนได้และสามารถนำความรู้ที่เรียนนั้นไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวัน นักเรียนจะมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นเรื่องสำคัญในการเรียนรู้อย่างมาก แต่ถ้านักเรียนเรียนด้วยการท่องจำ คิดคำนวณได้เฉพาะปัญหาที่มีสัญลักษณ์ ไม่สามารถเชื่อมโยงความรู้ที่เรียนกับ

สิ่งที่เกิดขึ้นในชีวิตประจำวัน จะทำให้นักเรียนเบื่อหน่าย ครูผู้สอนควรสรรหากลยุทธ์วิธีสอนที่ทำให้ให้นักเรียนเข้าใจ เรียนรู้ได้สนุกสนาน เกิดเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ สนใจที่จะคิดและแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ สามารถใช้ความรู้คณิตศาสตร์ เป็นพื้นฐานในการเรียนวิชาวิทยาศาสตร์และศาสตร์ต่างๆ ช่วยส่งเสริมการคิดค้นให้เกิดเทคโนโลยีใหม่ วิทยาการใหม่ๆ ขึ้นในโลกได้ และในปัจจุบันแต่ละบุคคลเผชิญกับการเปลี่ยนแปลงของสภาพสังคมอย่างรวดเร็วและทุกคนก็ได้รับผลจากการเปลี่ยนแปลงนั้น การเปลี่ยนแปลงของสังคมอย่างรวดเร็ว ทำให้ยากที่จะเตรียมการสำหรับอนาคต และยังไม่มียุทธวิธีที่ชัดเจนที่จะทำนายว่า ความรู้ทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีจะทำให้เกิดการค้นพบอะไรในอนาคต แต่ทุกคนทราบ่วิชาคณิตศาสตร์มีความสำคัญกับอนาคต กิจกรรมทางคณิตศาสตร์จำเป็นสำหรับคนเราในทุกๆ อาชีพ เช่น ธุรกิจ วิทยาศาสตร์ สถาปัตยกรรม วิศวกรรม การพยากรณ์อากาศ การแพทย์ เศรษฐศาสตร์ เป็นต้น และทุกคนจำเป็นต้องมีความรู้คณิตศาสตร์เพื่อการเป็นพลเมืองที่ดีของสังคม ดังนั้นหลักสูตรคณิตศาสตร์ในโรงเรียนจะต้องเน้นการเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ที่นักเรียนไม่เคยพบมาก่อน และบทบาทของครูคณิตศาสตร์ก็ต้องเปลี่ยนไปจากเดิม ในปัจจุบันมีเครื่องคิดเลข นักเรียนไม่จำเป็นต้องคำนวณอย่างซับซ้อน แต่สิ่งสำคัญคือ นักเรียนยังคงต้องมีความสามารถในการคิด สามารถวิเคราะห์ปัญหาและแก้ปัญหาได้ ดังนั้นหลักสูตรคณิตศาสตร์จะต้องพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของนักเรียน

เนื่องจากสถานะของสังคมปัจจุบันที่เปลี่ยนแปลงไปอย่างรวดเร็วนั้น เป็นความเจริญที่สืบเนื่องมาจากการพัฒนาวิทยาการด้านวิทยาศาสตร์ เทคโนโลยี วิศวกรรมศาสตร์ และสังคมศาสตร์ ซึ่งพื้นฐานในการพัฒนาด้านต่างๆเหล่านี้ล้วนแต่มีพื้นฐานสำคัญมาจากคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น โดยคณิตศาสตร์ นอกจากจะเป็นพื้นฐานความรู้ที่สำคัญและเป็นเครื่องมือในการสร้างและเรียนรู้ในวิทยาการด้านอื่นๆ แล้ว คณิตศาสตร์ยังเป็นวิชาที่ฝึกกระบวนการคิด ฝึกการแก้ปัญหา ช่วยพัฒนาศักยภาพของแต่ละบุคคลให้เป็นคนที่สมบูรณ์ ช่วยเสริมสร้างความมีเหตุผล ความเป็นคนช่างคิด ช่างริเริ่มสร้างสรรค์ มีระบบระเบียบในการคิด มีการวางแผนในการทำงาน เป็นวิชาที่สามารถพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาของผู้เรียน มีผลการวิจัยชี้ชัดว่าความรู้และทักษะที่ผู้เรียนพัฒนาเมื่อเรียนรู้คณิตศาสตร์และการประยุกต์ สามารถถ่ายโยงไปสู่การแก้ปัญหาในสาระอื่นๆ ของหลักสูตร ในโรงเรียนครูจะต้องเตรียมการให้นักเรียนมีแนวคิดทางคณิตศาสตร์และทักษะอย่างกว้างขวางให้ทันกับเทคโนโลยีที่ทันสมัย ให้นักเรียนมีโอกาสได้เรียนรู้และใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ในช่วงสองทศวรรษที่ผ่านมา นักคณิตศาสตร์ศึกษาได้เน้นการให้ความสำคัญกับบทบาทของการแก้ปัญหาในหลักสูตรคณิตศาสตร์ การพัฒนาความก้าวหน้าและทักษะในการแก้ปัญหาของนักเรียนเป็นอย่างสูง (สิริพร ทิพย์คง 2543: 15 ; Kennedy and Tipps, 1994: 135 อ้างถึงใน จันทรา ศิลปะระยะ 2551: 1) โดยมีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึง

ความสำคัญของการแก้ปัญหาไว้หลายท่าน เช่น ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537: 5) ได้กล่าวถึงความสำคัญของการแก้ปัญหาสรุปได้ดังนี้ “การแก้ปัญหาคือความสามารถขั้นพื้นฐานของมนุษย์ มนุษย์ต้องใช้ความสามารถในการคิด แก้ปัญหาอยู่ตลอดเวลาเพื่อใช้สามารถปรับตัวอยู่ในสังคมได้ การแก้ปัญหาคือทำให้เกิดการค้นพบความรู้ใหม่ และการแก้ปัญหาคือความสามารถที่ต้องปลูกฝังให้เกิดขึ้นในตัวนักเรียน” ดังนั้นความสามารถในการแก้ปัญหาคือเป็นสิ่งจำเป็นที่ต้องปลูกฝังให้เกิดขึ้นในตัวนักเรียน ซึ่งลักษณะ โครงสร้างและเนื้อหาของวิชาคณิตศาสตร์ในทุกระดับชั้นมีจุดประสงค์ที่สามารถส่งเสริมให้นักเรียนเกิดทักษะการแก้ปัญหาคือการคิดอย่างมีระบบระเบียบสามารถนำคณิตศาสตร์ไปใช้แก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้ สอดคล้องกับวิลโลธรณ์ คำภีระปาวงศ์ (2540: 1) ได้กล่าวว่า ทักษะการแก้ปัญหาคือทักษะที่มีความสำคัญทักษะหนึ่งสำหรับมนุษย์ เพราะชีวิตประจำวันมนุษย์เราต้องพบกับปัญหาและอุปสรรคมากมาย โดยเฉพาะอย่างยิ่งในสังคมยุคปัจจุบันความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยีทำให้สภาพแวดล้อมและสังคมเปลี่ยนแปลงไป เป็นสังคมที่เต็มไปด้วยการแข่งขันการต่อสู้ตลอดเวลา ผู้ใดที่สามารถแก้ปัญหาได้ย่อมดำรงชีวิตอยู่ในสังคมได้อย่างมีความสุขและประสบความสำเร็จดีกว่าผู้ที่ไม่มีความสามารถในการแก้ปัญหา

จากความสำคัญดังกล่าวข้างต้นจะเห็นได้ว่าการแก้ปัญหาคือกระบวนการที่สำคัญในการพัฒนาผู้เรียนดังนั้นจึงเป็นหน้าที่ของครูผู้สอนที่จะต้องจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อเป็นการส่งเสริมให้นักเรียนมีทักษะในการแก้ปัญหาให้สูงขึ้นดังที่สมาคมครูสอนคณิตศาสตร์แห่งชาติ (The National Council of Teacher of Mathematics. 1993:57 อ้างถึงใน สุรเชษฐ์ บุญยรักษ์ 2550: 1) ได้กล่าวว่า การแก้ปัญหาคือหัวใจของการจัดการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เป็นอย่างมากโดยเป้าหมายเบื้องต้นของการจัดการเรียนการสอน คือ เพื่อพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อนและหลากหลาย เช่นเดียวกับ สิริพร ทิพย์คง (2545: 4-6 อ้างถึงใน สุรเชษฐ์ บุญยรักษ์ 2550: 1) ที่กล่าวว่า การแก้ปัญหาคือผู้เรียนต้องใช้ความคิด ทักษะการคิดคำนวณ หลักการกฎ หรือสูตรต่างๆ นำไปใช้แก้ปัญหา ซึ่งทักษะการแก้ปัญหามีความสำคัญต่อชีวิตประจำวันและสามารถสร้างให้เกิดขึ้นได้ โดยการแก้ปัญหานั้นไม่ได้มุ่งเน้นที่คำตอบแต่ให้ความสำคัญกับกระบวนการ/วิธีการได้มาซึ่งคำตอบ การจัดการเรียนการสอนให้ผู้เรียนเกิดทักษะการแก้ปัญหาคือไม่ใช่สิ่งใหม่ แต่เป็นเรื่องยากพอสมควรสำหรับผู้สอนที่ต้องฝึกฝนให้เกิดความชำนาญ ผู้สอนส่วนมากพบว่าผู้เรียนไม่สามารถแก้ปัญหาคือได้ตั้งแต่เริ่มเรียนคณิตศาสตร์ ทั้งนี้อาจมาจากสาเหตุหลายประการ เช่น ผู้เรียนได้รับคำบอกเล่าว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากไม่สามารถทำความเข้าใจได้ จึงทำให้ผู้เรียนไม่ชอบคณิตศาสตร์ ดังนั้นผู้สอนจึงควรพัฒนากระบวนการจัดการเรียนการสอนวิธีแก้ปัญหาคือ เพื่อให้ผู้เรียนมีเจตคติที่ดีต่อ การแก้ปัญหาคือ และสามารถแก้ปัญหาคือด้วยวิธีการต่างๆ ได้ ซึ่งสอดคล้องกับกรมวิชาการ (2544: 4 อ้างถึงใน สุริเยศ สุขแสวง 2548: 3) ที่กล่าวว่า การที่ผู้เรียน

จะสามารถแก้ปัญหาในชีวิตประจำวันได้อย่างมีประสิทธิภาพนั้นการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ก็มีส่วนช่วยให้นักเรียนแก้ปัญหาได้ระดับหนึ่ง ทั้งนี้เนื่องจากการแก้ปัญหาเป็นหัวใจของคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องอาศัยความคิดรวบยอด ทักษะการคิดคำนวณ หลักการ กฎและสูตรต่างๆนำไปใช้แก้ปัญหา โดยเฉพาะทักษะในการแก้ปัญหามีความสำคัญต่อชีวิตและความสามารถสร้างให้เกิดขึ้นได้จึงเป็นสิ่งจำเป็นที่ผู้ที่เกี่ยวข้องกับการศึกษา โดยเฉพาะครูผู้สอนจะต้องตระหนักถึงความสำคัญนี้ สอดคล้องกับคำกล่าวของสมเดช บุญประจักษ์ (2544: 36 อ้างถึงใน สุริเยศ สุขแสวง 2548: 2) ได้กล่าวว่าแต่เดิมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เน้นการสอนความรู้และทักษะในการคิดคำนวณเป็นหลัก ซึ่งไม่เหมาะสมกับสภาพปัจจุบัน เพราะความรู้ต่างๆ มีมากมาย ผู้สอนอาจสอนไม่หมดและปัญหาที่พบในชีวิตจริงมักเป็นปัญหาที่มีความซับซ้อนที่ต้องใช้ความรู้มากกว่าทักษะการคิดคำนวณ การเรียนการสอนที่มุ่งพัฒนาทักษะที่ปราศจากการประยุกต์ใช้และจดจำกฎเกณฑ์ต่างๆ โดยปราศจากความเข้าใจไม่เพียงพอที่จะนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาได้ ดังนั้นจุดเน้นของการเรียนการสอนจำเป็นต้องปรับเปลี่ยนจากที่เน้นการจดจำข้อมูลทักษะพื้นฐานเป็นการพัฒนาผู้เรียนให้มีความเข้าใจในหลักการทางคณิตศาสตร์ มีทักษะพื้นฐานที่เพียงพอในการนำความรู้ไปใช้แก้ปัญหา ในสถานการณ์ต่างๆที่นักเรียนต้องเผชิญ ผู้เรียนจะต้องได้รับประสบการณ์ที่หลากหลายที่จะช่วยให้เกิดความเข้าใจจากการดำเนินกิจกรรมต่างๆด้วยตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2545: 87-88) ที่กล่าวว่า การจัดการเรียนการสอนต้องเปิดโอกาสให้ผู้เรียน ได้คิดและแก้ปัญหาด้วยตนเองอย่างอิสระ ซึ่งผู้สอนมีส่วนช่วยในการจัดเนื้อหาสาระและกิจกรรมให้สอดคล้องกับความสนใจและความถนัดของผู้เรียน โดยคำนึงถึงความแตกต่างระหว่างบุคคล ผู้สอนควรทำหน้าที่เป็นที่ปรึกษาและให้คำแนะนำในข้อบกพร่องของผู้เรียน นอกจากนี้การจัดการเรียนการสอนโดยให้ผู้เรียน เรียนรู้ร่วมกันเป็นกลุ่ม มีการคิดร่วมกัน ร่วมกันแก้ปัญหา ปรึกษาหารือ อภิปราย และแสดงความคิดเห็นด้วยเหตุผลซึ่งกันและกันจะช่วยให้ผู้เรียนได้พัฒนาความรู้ทักษะกระบวนการคิดและประสบการณ์มากขึ้น

แนวการจัดการเรียนการสอนที่ช่วยส่งเสริมและพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์มีหลายแนวทาง ดังที่นักการศึกษาหลายท่านได้เสนอไว้ สรุปได้ว่า กระบวนการเรียนที่ส่งเสริมและพัฒนาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนนั้น ควรจะจัดให้นักเรียนได้เผชิญกับปัญหาหรือสถานการณ์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับชีวิตจริงหลายๆ รูปแบบและกระตุ้นความสนใจ มีวิธีการหาคำตอบหลายๆ วิธี การแก้ปัญหาคควรทำเป็นกลุ่มย่อย เพื่อให้นักเรียนได้มีการอภิปรายแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน มีการวางแผนการแก้ปัญหาเป็นขั้นตอน ร่วมกันศึกษาค้นคว้าหาข้อมูลเพิ่มเติม และค้นหาวิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลายเพื่อแก้ปัญหา และควรมีการฝึกคาดคะเนคำตอบและทดสอบคำตอบที่ได้ (Bitter, 1989: 43-44 และปรีชา เนาว่าเย็นผล

2538: 66-67 อ้างถึงใน สุริยเสถ สุธแสง 2548: 3) ด้วยความสำคัญของวิชาคณิตศาสตร์และการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ดังที่กล่าวมาข้างต้นจะเห็นว่าโรงเรียนจำเป็นต้องส่งเสริมให้มีการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนที่เป็นการส่งเสริมทักษะการคิดแก้ปัญหาและการเรียนรู้จากประสบการณ์ตรงเพื่อพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาให้เกิดขึ้นกับนักเรียน

จากรายงานสรุปผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ปีการศึกษา 2551 วิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนโรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 มีผลการเรียนเฉลี่ยอยู่ในระดับ 1.5 โดยพบว่านักเรียนมีผลการเรียน “1” ขึ้นไปคิดเป็นร้อยละ 72.47 ผลการเรียน “2” ขึ้นไปคิดเป็นร้อยละ 26.08 ผลการเรียน “3” ขึ้นไปคิดเป็นร้อยละ 1.45 ผลการเรียน “4” ขึ้นไปคิดเป็นร้อยละ 0.00 และเมื่อนำข้อมูลสารสนเทศที่ได้จากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนและการวัดผลประเมินมาวิเคราะห์พบว่า ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปีของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ไม่บรรลุผลการเรียนรู้ตามเกณฑ์มาตรฐานที่กำหนดไว้ คือ ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังที่เกี่ยวข้องกับสาระที่ 6 ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นสาระที่แทรกอยู่ในสาระที่ 1 – 5 จากการสังเกตของผู้วิจัยในระหว่างที่ดำเนินการจัดกิจกรรมเพื่อวัดผลประเมินผลสาระการเรียนรู้ที่เกี่ยวข้องกับทักษะกระบวนการแก้ปัญหาที่ผ่านมา โดยผู้วิจัยได้กำหนดเป็น โจทย์ปัญหาที่มีความเกี่ยวข้องและสอดคล้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียน เป็น โจทย์ปัญหาเพื่อใช้เป็นเครื่องมือในการวัดผลประเมินผลการเรียนรู้โดยเฉพาะเนื้อหาสาระที่เกี่ยวข้องกับเรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัสเป็นเนื้อหาที่สามารถเชื่อมโยงสถานการณ์รอบตัวของนักเรียนมากำหนดเป็นปัญหาเพื่อส่งเสริมและพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนได้เป็นอย่างดี แต่ผลปรากฏว่านักเรียนไม่สามารถแสดงวิธีการแก้โจทย์ปัญหา เหตุผลหรือสามารถเชื่อมโยงความรู้ต่างๆ เพื่อนำไปแก้ปัญหาจากโจทย์ที่กำหนดให้ได้ตามที่ควร แสดงให้เห็นว่าความสามารถของนักเรียนในการแก้ปัญหายังไม่ดีพอจึงสมควรที่จะได้รับการพัฒนา และอาจเป็นสาเหตุสำคัญที่ทำให้ผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนไม่เป็นไปตามเป้าหมายที่กำหนดไว้อีกด้วย

ดังนั้นผู้วิจัยในฐานะครูสอนคณิตศาสตร์ จึงสนใจที่จะพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ทั้งนี้เพราะผลการเรียนรู้ที่คาดหวังของเรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส นั้นได้กำหนดผลการเรียนรู้ที่คาดหวังไว้ว่า เมื่อนักเรียนเรียนเรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัสแล้ว นักเรียนสามารถอธิบายความสัมพันธ์ตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้ และสามารถใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสและบทกลับในการให้เหตุผลและแก้ปัญหาได้ อีกทั้งเนื้อหาสาระสำคัญของเรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส นั้นนักเรียนจำเป็นต้องอาศัยความรู้ที่ได้เรียนมาแล้ว มาใช้เป็นพื้นฐานในการแก้ปัญหา และเป็นเนื้อหาที่เหมาะสมต่อการที่ครูผู้สอนสามารถนำสถานการณ์

หรือปัญหาต่างๆ ที่อยู่รอบตัวนักเรียนมากำหนดเป็น โจทย์ปัญหาเพื่อให้นักเรียนได้เผชิญและแก้ปัญหาที่ทำนาย ทำให้นักเรียนเกิดความตระหนัก เห็นประโยชน์และคุณค่าของคณิตศาสตร์ เพื่อเป็นการเพิ่มผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน โดยใช้วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนให้สูงขึ้น

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างก่อนและหลังเรียน โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีการแก้ปัญหา เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

3. สมมติฐานการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีการแก้ปัญหา เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

4. ขอบเขตของการวิจัย

4.1 ประชากร คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร จำนวน 2 ห้องเรียน มีนักเรียน 50 คน จัดชั้นเรียนแบบคละความสามารถ

4.2 ตัวแปรที่ศึกษา

4.2.1 ตัวแปรอิสระ คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีการแก้ปัญหา

4.2.2 ตัวแปรตาม คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

4.3 เนื้อหาที่นำมาทดลอง

เนื้อหาในกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ค 32101 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544

4.4 ระยะเวลาที่ใช้ในการวิจัย

ระยะเวลาที่ใช้ในการทดลองทั้งหมด 10 ชั่วโมง ได้แก่ ทดสอบก่อนเรียน 1 ชั่วโมง ทดสอบหลังเรียน 1 ชั่วโมง จัดกิจกรรมเรียนการสอน 8 ชั่วโมง จัดกิจกรรมการเรียนการสอนครั้งละ 1 ชั่วโมง

5. นิยามศัพท์เฉพาะ

5.1 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ หมายถึง กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นการใช้กระบวนการแก้ปัญหา โดยให้ผู้เรียนมีส่วนร่วมในกระบวนการคิดแก้ปัญหาและ เปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเอง ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนสำคัญ 4 ขั้นตอน ดังนี้ 1) การทำความเข้าใจปัญหา 2) การวางแผนแก้ปัญหา 3) การดำเนินการตามแผน 4) การตรวจสอบ

5.2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ หมายถึง คะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

6. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

6.1 เป็นแนวทางสำหรับครูในการจัดการเรียนรู้โดยใช้วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

6.2 เป็นแนวทางในการทำวิจัยในเนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องอื่น ๆ ต่อไป

6.3 เป็นแนวทางสำหรับผู้ที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาจะได้นำผลการวิจัยไปใช้ประโยชน์

บทที่ 2

วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร ผู้วิจัยได้ศึกษาวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

- 1.1 ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.2 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.3 ประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.4 องค์ประกอบที่ส่งเสริมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.5 กระบวนการและขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์
- 1.6 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา
- 1.7 การจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมการแก้ปัญหา

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

- 2.1 งานวิจัยภายในประเทศ
- 2.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

1. แนวคิดเกี่ยวกับการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

1.1 ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์

มีนักการศึกษาหลายท่านได้เสนอความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ดังต่อไปนี้

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 6) ได้กล่าวว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์เป็นสถานการณ์หรือคำถามที่ต้องการคำตอบซึ่งบุคคลต้องใช้ความรู้ และประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์มากำหนดแนวทางหรือวิธีการในการหาคำตอบ บุคคลผู้หาคำตอบไม่คุ้นเคยกับสถานการณ์นั้นมาก่อน และไม่สามารถหาคำตอบได้ในทันทีทันใด ต้องใช้ทักษะ ความรู้และประสบการณ์หลาย ๆ อย่าง ประมวลเข้าด้วยกันจึงหาคำตอบได้ สถานการณ์หรือคำถามข้อใดจะเป็นปัญหาหรือไม่ ขึ้นอยู่กับ

บุคคลผู้แก้ปัญหาและเวลา บางสถานการณ์อาจเป็นปัญหาสำหรับบางคน แต่อาจไม่เป็นปัญหาสำหรับบุคคลอื่น ๆ ก็ได้

สุนิสา พงษ์ประยูร (2543: 13 อ้างถึงใน อรรถ อนุญเดิม 2550: 8) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ว่าเป็น โจทย์ภาษาที่บรรยายสถานการณ์ด้วยข้อความและจำนวนที่เกี่ยวกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยต้องการคำตอบในเชิงปริมาณหรือตัวเลข ซึ่งผู้แก้ปัญหาต้องอาศัยทักษะและความสามารถต่างๆ ที่เหมาะสมมาประกอบกันในการแก้โจทย์ปัญหา

อรรถ อนุญเดิม (2550: 9) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า เป็นสถานการณ์หรือคำถามทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการคำตอบ ซึ่งอาจอยู่ในรูปของปริมาณ วิธีการอธิบายหรือการให้เหตุผลโดยที่ผู้แก้ปัญหานั้นจะต้องใช้ทักษะ ความรู้ การตัดสินใจ และประสบการณ์หลายๆอย่างเข้าด้วยกันจึงจะหาคำตอบหรือข้อสรุปนั้นได้

อุษาวดี จันทรสุนธิ (ม.ป.ป.: 1-4) ได้ให้ความหมายของปัญหาทางคณิตศาสตร์หมายถึงสถานการณ์ที่เป็นข้อสงสัยใหม่หรือข้อสงสัยที่ไม่คุ้นเคยเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่บุคคลเผชิญและต้องการค้นหาข้อสรุปหรือคำตอบ โดยที่บุคคลยังไม่รู้วิธีการหรือขั้นตอนที่จะได้คำตอบของปัญหานั้นในทันที บุคคลต้องใช้การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นกระบวนการในการประยุกต์ความรู้ทางคณิตศาสตร์ ในการใช้ยุทธวิธีแก้ปัญหา ในการใช้กระบวนการควบคุมและประเมินความคิดของตนเอง ตลอดจนประสบการณ์ที่บุคคลมีอยู่แล้ว เข้าไปจัดการและหาคำตอบของปัญหา

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นสถานการณ์หรือคำถามทางคณิตศาสตร์ที่บุคคลหรือกลุ่มบุคคลเผชิญอยู่และต้องการหาคำตอบ ซึ่งยังไม่รู้วิธีหาคำตอบนั้นได้ทันทีทันใดแต่ต้องใช้ประสบการณ์ ความรู้ ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นแนวทางในการอธิบายหรือให้เหตุผลในการหาคำตอบของปัญหา

1.2 ความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ครูลิกและเรย์ (Krulik and Reys, 1980: 3-4 อ้างถึงใน ปรีชา เนาว์เย็นผล 2544: 34) กล่าวถึงความหมายของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์สรุปได้ดังนี้

1) การแก้ปัญหาเป็นเป้าหมาย (Problem solving as a goal) จะพบคำถามว่าทำไมต้องสอนคณิตศาสตร์ อะไรเป็นเป้าหมายในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ นักการศึกษานักคณิตศาสตร์และบุคคลอื่นๆ ที่เกี่ยวข้องกับคำถามเหล่านี้เข้าใจว่า การแก้ปัญหาเป็นจุดสำคัญของการเรียนคณิตศาสตร์ เมื่อการแก้ปัญหาถูกนำมาพิจารณาว่าเป็นเป้าหมายอันหนึ่งการแก้ปัญหาจึงเป็นอิสระจากปัญหาเฉพาะ (Specific problem) กระบวนการและวิธีการตลอดจนเนื้อหาทาง

คณิตศาสตร์ แต่การพิจารณาที่สำคัญคือจะต้องคำนึงว่าจะแก้ปัญหาอย่างไร ซึ่งเป็นเหตุผลแรกสำหรับการศึกษาคณิตศาสตร์ ข้อพิจารณานี้มีอิทธิพลต่อหลักสูตรทั้งหมดและมีความสำคัญต่อการนำไปใช้ในการฝึกปฏิบัติในห้องเรียน

2) การแก้ปัญหาคือกระบวนการ (Problem solving as a process) การตีความในลักษณะนี้จะเห็นได้ชัดเมื่อนักเรียนตอบปัญหา ตลอดจนกระบวนการหรือขั้นตอนที่กระทำเพื่อจะได้คำตอบ สิ่งสำคัญที่ควรนำมาพิจารณาคือ วิธีการ กระบวนการและวิธีที่นักเรียนใช้ในการแก้ปัญหา ซึ่งเป็นสิ่งที่มีความจำเป็นในกระบวนการแก้ปัญหาและเป็นจุดสำคัญของหลักสูตรคณิตศาสตร์

3) การแก้ปัญหาคือทักษะพื้นฐาน (Problem solving as a basic skill) การตีความลักษณะนี้จะพิจารณาเฉพาะเนื้อหาที่เป็นโจทย์ปัญหา คำนึงถึงรูปแบบของปัญหาและวิธีการแก้ปัญหา การพิจารณาถึงการแก้ปัญหาคือทักษะพื้นฐานจึงช่วยในการจัดการเรียนการสอนของครู ซึ่งประกอบด้วยการสอนทักษะ (Skill) มโนคติ (Concept) และการแก้ปัญหา (Problem solving)

โพลยา (Polya, 1980: 1) กล่าวว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการหาวิถีทางที่จะหาสิ่งที่ไม่รู้ในปัญหา เป็นการหาวิธีการที่จะนำสิ่งที่ยุ่งยากออกไป หาวิธีการที่จะเอาชนะอุปสรรคที่เผชิญอยู่เพื่อให้ได้คำตอบที่ชัดเจน แต่สิ่งที่เหล่านี้ไม่ได้เกิดขึ้นในทันทีทันใด

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537: 62) กล่าวว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เป็นการหาวิธีเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหาทางคณิตศาสตร์ซึ่งผู้แก้ปัญหาคือต้องให้ความรู้ ความคิด และประสบการณ์เดิมประมวลเข้ากับสถานการณ์ใหม่ที่กำหนดในปัญหา

จากที่กล่าวมาข้างต้นสรุปได้ว่า การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ เป็นกระบวนการหรือวิธีการเทคนิคเฉพาะต่างๆ ที่ผู้แก้ปัญหาคือต้องอาศัยความรู้ ความเข้าใจ มโนคติ การคิดวิเคราะห์ ประสบการณ์และทักษะพื้นฐานต่างๆ ที่มีอยู่ไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหา การแก้ปัญหาคือจึงรวมถึงกระบวนการทั้งหมดไม่ใช่แค่ผลลัพธ์สุดท้าย

1.3 ประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในการแก้ปัญหาคือทางคณิตศาสตร์นั้น มีผู้เสนอประเภทของปัญหา ดังต่อไปนี้

โพลยา (Polya, 1957: 23-29, อ้างถึงใน ปรีชา เนาว์เย็นผล 2544: 16) แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้ 2 ประเภทคือ

1) ปัญหาให้ค้นหา เป็นปัญหาที่ต้องการให้ผู้แก้ปัญหาคือค้นหาคำตอบซึ่งอาจอยู่ในรูปปริมาณ วิธีการหรือคำอธิบายให้เหตุผล

2) ปัญหาให้พิสูจน์ เป็นปัญหาให้แสดงการให้เหตุผลว่าข้อความที่กำหนดให้เป็นจริง หรือข้อความที่กำหนดให้เป็นเท็จ

บาร์ดี้ (Baroody, 1993: 2-54 - 2-55, อ้างถึงใน ปรีชา เนาว์เย็นผล 2544: 16)

แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 2 ประเภท ได้แก่

1) ปัญหาที่มีเป้าหมายเฉพาะเจาะจง เป็นปัญหาที่มีคำตอบแน่นอนส่วนใหญ่ มีคำตอบเดียว

2) ปัญหาที่มีเป้าหมายไม่เฉพาะเจาะจง เป็นปัญหาแบบปลายเปิดที่มีคำตอบเปิดกว้าง มีคำตอบที่ถูกต้องหลายคำตอบ

ปัญหาประเภทแรกสามารถปรับเปลี่ยนให้เป็นปัญหาประเภทหลังได้ ซึ่งมีความสอดคล้องกับปัญหาในชีวิตจริงมากกว่า โดยที่นักเรียนยังคงใช้พื้นฐานความรู้ในระดับเดียวกันในการแก้ปัญหา แต่ใช้ความคิดในการประยุกต์ได้กว้างขวางกว่า

บิทเทอร์ แสทฟิลด์และเอ็ดเวิร์ด (Bitter, Hatfield ;& Edward, 1989: 137) ได้แบ่งปัญหาทางคณิตศาสตร์ออกเป็น 3 ประเภทคือ

1) ปัญหาปลายเปิด (Open - ended) เป็นปัญหาที่มีคำตอบที่เป็นไปได้หลายคำตอบ โดยจะมองว่ากระบวนการแก้ปัญหาเป็นสิ่งสำคัญมากกว่าคำตอบ

2) ปัญหาให้ค้นพบ (Discovery) เป็นปัญหาที่จะได้คำตอบในขั้นสุดท้ายของการแก้ปัญหาซึ่งมีวิธีการแก้ปัญหาได้หลายวิธี

3) ปัญหาที่กำหนดแนวทางการค้นพบ (Guide discovery) เป็นปัญหาที่มีลักษณะร่วมของปัญหา มีคำชี้แนะและคำชี้แจงในการแก้ปัญหา นักเรียนอาจไม่ต้องค้นหาหรือกังวลในการหาคำตอบ

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 62) กล่าวถึงประเภทของปัญหาไว้ดังนี้

1) ปัญหาปกติ (Routine problem) เป็นปัญหาที่พบในหนังสือเรียนหรือหนังสือทั่วไป โดยผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีแก้ปัญหา

2) ปัญหาไม่ปกติ (Non - Routine problem) เป็นปัญหาที่เน้นกระบวนการคิดและปริศนาต่าง ๆ โดยผู้แก้ปัญหามองต้องประมวลความรู้ความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกัน

อุษาวดี จันทรสนธิ (ม.ป.ป.: 2-22 - 2-32) ได้กล่าวถึงประเภทของปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

1) ปัญหาให้สำรวจ (Investigate Problem) เป็นปัญหาที่มุ่งให้ผู้เรียนรวบรวมข้อมูลที่มีอยู่ในปรากฏการณ์รอบตัว แล้วสร้างข้อสรุปเพื่ออธิบายความสัมพันธ์อย่างใดอย่างหนึ่งหรือตั้งคำถามเพื่อศึกษาค้นคว้าต่อไป

2) ปัญหาให้ลงมือปฏิบัติกับแบบจำลอง (Manipulative Problem with Model) ความคิดทางคณิตศาสตร์หลายประการสามารถเข้าใจได้ง่ายขึ้นโดยอาศัยแบบจำลอง เช่นการแสดงเศษส่วนหรือทศนิยมด้วยแบบจำลองพื้นที่ (area model) เส้นจำนวน จัดเป็นแบบจำลองที่ช่วยให้เกิดความเข้าใจความหมายของจำนวนได้มากขึ้น สถานการณ์ปัญหาจะใช้วัสดุ วัตถุ ที่จับต้องได้ให้ผู้เรียนสังเกต ตั้งข้อความคาดการณ์ แล้วพิสูจน์หรือคำอธิบายเพื่อยืนยันข้อความคาดการณ์

3) ปัญหาให้ทดลอง (Experimental Problem) เป็นปัญหาที่มุ่งให้ผู้เรียนเก็บรวบรวมข้อมูลโดยการทดลอง บันทึกผลการทดลองลงในตาราง จนค้นพบแบบรูปอย่างใดอย่างหนึ่งที่ทำให้สามารถเขียนข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ได้ แล้วใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์และกระบวนการให้เหตุผลตรวจสอบความถูกต้องของข้อความคาดการณ์

4) ปัญหาปลายเปิด (Open – Ended Problem) ปัญหานี้ผู้เรียนจะคิดหาคำตอบได้หลากหลายวิธี โดยใช้ข้อมูลที่กำหนดในสถานการณ์ปัญหา ใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ตนมีอยู่และใช้ความรู้สึก ความชอบตลอดจนสภาพจริงที่เกิดขึ้นในสังคมมาประกอบการคิด จะเป็นปัญหาที่ไม่มีคำตอบที่เฉพาะเจาะจงแน่นอน แต่จะมีคำตอบภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ หลายคำตอบขึ้นอยู่กับกระบวนการคิดของผู้แก้ปัญหา

สรุปได้ว่า ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีอยู่หลายประเภทดังนี้ คือ ปัญหาปลายเปิด ปัญหาให้ค้นพบ ปัญหาที่กำหนดแนวทางการค้นพบ ปัญหาปกติ ปัญหาไม่ปกติ ปัญหาให้สำรวจ ปัญหาให้ลงมือปฏิบัติกับแบบจำลอง ปัญหาให้ทดลอง ในการแก้ปัญหาเริ่มจากให้ผู้เรียนได้ฝึกแก้ปัญหาที่ย่งยากสลับซับซ้อน เป็นการแก้ปัญหาที่เริ่มจากการสร้างพื้นฐานในการแก้ปัญหาอย่างเป็นขั้นตอนและเพิ่มความซับซ้อนขึ้นโดยอาจเพิ่มเงื่อนไขให้มากขึ้น โดยทำการแก้ปัญหาแบบเดี่ยวหรือแบบเป็นกลุ่ม

1.4 องค์ประกอบที่ส่งเสริมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เป็นปัญหาที่ต้องอาศัยความรู้ ทักษะและประสบการณ์ทางคณิตศาสตร์มาช่วยในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีผู้เสนอองค์ประกอบที่ส่งเสริมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ดังต่อไปนี้

อดัมส์ และคนอื่นๆ (Adams & others, 1977: 176 อ้างถึงใน อรรถ ฤบุญเดิม 2550: 17) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบของการแก้ปัญหาไว้ 3 ด้านคือ

1) องค์ประกอบด้านสติปัญญาการแก้ปัญหาจำเป็นต้องใช้การคิดระดับสูง โดยเฉพาะอย่างยิ่งองค์ประกอบทางปริมาณ

2) องค์ประกอบด้านการอ่าน การแก้ปัญหาต้องใช้ความสามารถในการอ่านแบบวิเคราะห์ เพื่อให้เกิดความเข้าใจและเกิดการตัดสินใจว่าควรทำอะไรอย่างไร

3) องค์ประกอบด้านทักษะพื้นฐาน

เฮดเดนส์และสปีเซอร์ (Hedden and Speer, 1992: 34-35) กล่าวถึงความสามารถของบุคคลในการแก้ปัญหาว่าขึ้นอยู่กับองค์ประกอบหลายประการ ดังนี้

1) รูปแบบการรับรู้

2) ความสามารถภายในตัวบุคคล

3) เทคนิคการประมวลผลข้อมูล

4) พื้นฐานทางคณิตศาสตร์

5) ความต้องการที่จะหาคำตอบ

6) ความมั่นใจในความสามารถของตนเองในการแก้ปัญหา

กรมวิชาการ (2541: 2-3) ได้กล่าวถึงองค์ประกอบในการแก้ปัญหทางคณิตศาสตร์ ดังนี้

1) การมองเห็นภาพ นักเรียนควรมองทะลุปัญหา มีความคิดกว้างไกล มองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหา

2) การจินตนาการ นักเรียนควรรู้จักจินตนาการว่าปัญหานั้นเป็นอย่างไร เพื่อใช้หาแนวทางในการคิดแก้ปัญหา

3) การแก้ปัญหอย่างมีทักษะ เมื่อมองเห็นแนวทางในการแก้ปัญหาก็ลงมือทำอย่างมีระบบ ทำด้วยความชำนาญ มีความรู้สึกท้าทายที่จะแก้ปัญหามีความแปลกใหม่

4) การวิเคราะห์ ต้องรู้จักวิเคราะห์ตามขั้นตอนที่กระทำนั้น

5) การสรุป เมื่อกระทำงานเห็นรูปแบบแล้วก็สามารถสรุปได้

6) แรงขับ ถ้านักเรียนไม่สามารถแก้ปัญหาได้ทันทีจะต้องมีแรงขับที่สร้างพลังความคิด ได้แก่ ความสนใจ เจตคติที่ดี แรงจูงใจใฝ่สัมฤทธิ์

7) การยืดหยุ่นในการคิด เป็นการที่นักเรียนต้องไม่ยึดติดกับวิธีการแก้ปัญหแบบเดิมหรือแบบที่ตนเองคุ้นเคยเท่านั้น แต่ควรมีการยอมรับวิธีการอื่น ๆ ซึ่งจะทำให้ได้วิธีการแก้ปัญหามากมายมากขึ้น

8) การโยงความคิด เป็นการสัมพันธ์ความคิดในเรื่องที่เกี่ยวข้องที่ใช้ในการแก้ปัญหา

สรุปได้ว่า องค์ประกอบที่ส่งเสริมการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์นั้น จะประกอบด้วยสติปัญญา พื้นฐานการอ่าน พื้นฐานทางคณิตศาสตร์ ทักษะในการแก้ปัญหา แรงขับ การยืดหยุ่น

ในการคิด การเชื่อมโยงความคิด ซึ่งจะมีผลต่อการแก้ปัญหาของนักเรียน ดังนั้นในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จะต้องคำนึงถึงองค์ประกอบเหล่านี้ เพื่อให้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีประสิทธิภาพมากขึ้น

1.5 กระบวนการและขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์

ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้นต้องดำเนินการอย่างเป็นระบบเป็นกระบวนการ จึงจำเป็นต้องดำเนินการตามขั้นตอนเพื่อให้ได้มาซึ่งคำตอบที่ถูกต้อง รวมทั้งต้องใช้วิธีการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ได้มีผู้เสนอขั้นตอนในการแก้ปัญหา ดังต่อไปนี้

โพลยา (Polya, 1957: 16 -17 อ้างถึงใน ปรีชา เนาว์เย็นผล 2544:18-19) ได้กล่าวถึงขั้นตอนของการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา (Understanding the problem) คือ เข้าใจว่าอะไรคือสิ่งที่ไม่รู้ อะไรคือข้อมูล โจทย์กำหนดเงื่อนไขอะไรบ้าง และเพียงพอที่จะแก้ปัญหาคือหรือไม่ หากเกิดความกำกวม ลึกถ้น หรือขัดแย้งควรใช้การวาดรูป และควรแยกสภาพการณ์หรือเงื่อนไขออกเป็นส่วนๆ โดยการเขียนลงบนกระดาษจะทำให้เข้าใจโจทย์ปัญหาได้ดียิ่งขึ้น

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนแก้ปัญหา (Devising a plan) เป็นขั้นที่ค้นหาความเชื่อมโยงระหว่างข้อมูลกับสิ่งที่ไม่รู้ ถ้าหากไม่สามารถหาความเชื่อมโยงได้ ก็ควรอาศัยหลักการวางแผนในการแก้ปัญหาดังนี้

2.1 เป็นโจทย์ปัญหาที่เคยประสบมา หรือมีลักษณะคล้ายคลึงกับโจทย์ที่เคยแก้มาก่อนหรือไม่

2.2 รู้จักโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องหรือสัมพันธ์กับโจทย์ที่จะแก้ และรู้จักทฤษฎีที่จะใช้แก้หรือไม่

2.3 พิจารณาส่งที่ไม่รู้ในโจทย์และพยายามคิดถึงปัญหาที่คุ้นเคย ซึ่งมีสิ่งที่ไม่รู้เหมือนกัน และพิจารณาว่าจะใช้วิธีการแก้ปัญหาคือเคยพบมาใช้กับโจทย์ที่กำลังจะแก้ได้หรือไม่

2.4 ควรอ่านโจทย์ปัญหาอีกครั้ง และวิเคราะห์เพื่อดูว่าแตกต่างจากปัญหาที่เคยพบมาหรือไม่

ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการตามแผน (Carrying out of the plan) เป็นขั้นตอนของการปฏิบัติตามแผนที่วางไว้และต้องตรวจสอบแต่ละขั้นตอนที่ปฏิบัติว่าถูกต้องหรือไม่

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบคำตอบ (Looking back) เป็นการตรวจสอบผลที่ได้ในแต่ละขั้นว่าถูกต้องหรือไม่อาจตรวจสอบโดยใช้วิธีการในการแก้ปัญหาวีธีอื่นๆ แล้วตรวจสอบผลลัพธ์ที่ได้ว่าตรงกันหรือไม่ หรืออาจใช้ประมาณคำตอบอย่างคร่าวๆ

เทราท์แมน และลิชเทนเบิร์ก (Trouman and Lichtenberg, 1995: 4-7 อ้างถึงใน
ปรีชา เนาว่าเขียนผล 2544: 19-20) ได้เสนอกระบวนการแก้ปัญหาไว้หกขั้นตอน ซึ่งใช้แนวคิด
พื้นฐานจากกระบวนการแก้ปัญหาสี่ขั้นตอนของโพลยา ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา ผู้แก้ปัญหาไม่เพียงแต่ต้องทำความเข้าใจสิ่ง
ต่างๆ ที่ปรากฏในปัญหาเท่านั้น แต่ต้องมีความรู้เกี่ยวกับสิ่งต่างๆ ในปัญหา สิ่งหนึ่งที่สำคัญในการ
ทำความเข้าใจกับปัญหา คือการตั้งคำถามถามตนเองเพื่อให้เข้าใจปัญหาได้อย่างลึกซึ้ง

ขั้นตอนที่ 2 กำหนดแผนในการแก้ปัญหา โดยกำหนดอย่างน้อยที่สุดหนึ่งแผน
การกำหนดแผนในการแก้ปัญหาหลาย ๆ แผน เป็นสิ่งที่มีประโยชน์ เพราะสามารถเปรียบเทียบและ
เลือกใช้แผนที่คิดว่าน่าจะมีประสิทธิภาพมากที่สุด การกำหนดแผนเป็นการกำหนดยุทธวิธีที่
นำมาใช้ในการแก้ปัญหา

ขั้นตอนที่ 3 ดำเนินการตามแผน เป็นขั้นที่ผู้แก้ปัญหาลงมือทำตามแผนที่กำหนด
ไว้ ซึ่งมีข้อแนะนำให้ทำงานเป็นกลุ่ม เพราะถ้าแต่ละคนดำเนินการตามแผนของตน คำตอบที่ได้
สามารถนำมาตรวจสอบเปรียบเทียบกัน และได้เรียนรู้สิ่งที่แปลกใหม่จากเพื่อน ๆ ถ้าทุกคนในกลุ่ม
ใช้แผนการแก้ปัญหาเดียวกัน ทั้งกลุ่มก็จะมีโอกาสช่วยเหลือกันแก้ปัญหาอย่างรอบคอบในปัญหาที่
มีความซับซ้อน เมื่อสามารถวางแผนแบ่งงานได้เป็นส่วนๆ ผู้แก้ปัญหาก็สามารถแบ่งกันทำงานตาม
แผนคนละส่วน แล้วนำมาประกอบกัน จะทำให้งานและเสร็จลุล่วงได้เร็วและมีความสมบูรณ์

ขั้นตอนที่ 4 ประเมินแผน และคำตอบ ในขั้นตอนนี้ดำเนินการโดย (1) พิจารณาว่า
คำตอบมีความเป็นไปได้หรือมีความสมจริงหรือไม่ (2) ตรวจสอบว่าคำตอบที่ได้มีความสอดคล้อง
กับเงื่อนไขที่กำหนดในปัญหาหรือไม่ (3) ลองแก้ปัญหาใหม่ โดยวางแผนใช้วิธีการอื่นแล้ว
เปรียบเทียบผลที่ได้ (4) เปรียบเทียบคำตอบของตนเองกับคำตอบของเพื่อนๆ คนอื่นๆ

ขั้นตอนที่ 5 ขยายปัญหา ผู้แก้ปัญหาก็ต้องค้นหาแบบรูปทั่วไปของคำตอบ ของ
ปัญหา ซึ่งต้องเข้าใจโครงสร้างของปัญหาอย่างชัดเจนจึงจะสามารถขยายปัญหาได้ การขยายปัญหา
จะช่วยสร้างทักษะในการแก้ปัญหา การขยายปัญหาทำได้โดย (1) เขียนปัญหาที่คล้ายปัญหาเดิม
(2) เสนอปัญหาใหม่ เพื่อที่ว่าผู้แก้ปัญหาก็จะค้นหารูปแบบทั่วไป กฎ หรือสูตรในการหาคำตอบ

ขั้นตอนที่ 6 การบันทึกการแก้ปัญหา นักแก้ปัญหาก็จะจดบันทึกการทำงานของ
เขาไว้เพื่อที่ว่าจะสามารถรื้อฟื้นหรือทบทวนความพยายามของเขาได้ การจดบันทึกอาจเก็บข้อมูล
จากการร่วมคิด ร่วมกันทำ ซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการแก้ปัญหาค่อยไป สิ่งที่ต้องจดบันทึกได้แก่ (1)
แหล่งของปัญหา (2) ตัวปัญหาที่กำหนด (3) แนวคิดในการแก้ปัญหา หรือแบบแผนความคิดแบบ
คร่าวๆ (4) ยุทธวิธีแก้ปัญหานั้นนำมาใช้ หรือสามารถจะนำมาใช้ได้ และ (5) ข้อแนะนำเกี่ยวกับการ
ขยายผลการแก้ปัญหา

สาระที่เทร่าท์แมนและลิซเทินเบิร์ก เพิ่มเติมให้แจ่มชัดขึ้นจากแนวคิดของโพลยา ได้แก่ การเน้นการร่วมมือกันในการแก้ปัญหา การขยายปัญหาจากฐานความคิดของปัญหาเดิมและการจัดบันทึกการแก้ปัญหา ซึ่งข้อแนะนำดังกล่าวนี้จะช่วยเพิ่มความสามารถในการแก้ปัญหาให้ดีขึ้น

เบลล์ (Bell, 1978: 312 อ้างถึงใน สมเดช บุญประจักษ์ 2540: 15-16) ได้เสนอขั้นตอนการแก้ปัญหาไว้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

- 1) การนำเสนอปัญหาในรูปทั่วไป
- 2) การนำเสนอปัญหาในรูปที่สามารถดำเนินการได้
- 3) การตั้งสมมติฐานและเลือกวิธีดำเนินการเพื่อให้ได้คำตอบของปัญหา
- 4) การตรวจสอบสมมติฐานและการดำเนินการแก้ปัญหา
- 5) การวิเคราะห์และประเมินคำตอบ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2544: 191-192) ได้สรุปขั้นตอนการแก้ปัญหาไว้ดังนี้

ในการเริ่มต้นพัฒนาผู้เรียนให้มีทักษะในกระบวนการแก้ปัญหา ผู้สอนต้องสร้างพื้นฐานให้ผู้เรียนเกิดความคุ้นเคยกับกระบวนการแก้ปัญหาซึ่งมีอยู่ 4 ขั้นตอนก่อน แล้วจึงฝึกทักษะในการแก้ปัญหา

กระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอน มีดังนี้

ขั้นที่ 1 ทำความเข้าใจปัญหา หรือวิเคราะห์ปัญหา

ขั้นที่ 2 วางแผนการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 3 ดำเนินการแก้ปัญหา

ขั้นที่ 4 ตรวจสอบ หรือมองย้อนกลับ

ในกระบวนการแก้ปัญหา 4 ขั้นตอนนี้ยังอาศัยทักษะอื่นๆ ประกอบด้วย

ขั้นที่ 1 ขั้นทำความเข้าใจปัญหา หรือวิเคราะห์ปัญหา ต้องอาศัยทักษะที่สำคัญและจำเป็นอีกหลายประการ เช่น ทักษะการอ่านโจทย์ปัญหา ทักษะการแปลความหมายทางภาษาซึ่งผู้เรียนควรแยกแยะได้ว่า โจทย์กำหนดอะไรให้และ โจทย์ต้องการให้หาอะไร หรือพิสูจน์ข้อความใด

ขั้นที่ 2 ขั้นวางแผนการแก้ปัญหาเป็นขั้นตอนที่สำคัญที่สุด ต้องอาศัยทักษะในการนำความรู้หลักการหรือทฤษฎีที่เรียนรู้อมาแล้ว ทักษะในการเลือกใช้ยุทธวิธีที่เหมาะสม เช่น เลือกใช้การเขียนรูป หรือแผนภาพ ตาราง การสังเกตหาแบบรูปหรือความสัมพันธ์ เป็นต้น ในบางปัญหาอาจใช้ทักษะในการประมาณค่า คาดการณ์ หรือคาดคะเนคำตอบประกอบด้วย ผู้สอนจะต้องหาวิธีฝึกวิเคราะห์แนวคิดในขั้นนี้ให้มาก

ขั้นที่ 3 ขั้นดำเนินการแก้ปัญหา ต้องอาศัยทักษะในการคิดคำนวณหรือการ
ดำเนินการทางคณิตศาสตร์ ทักษะในการพิสูจน์หรือการอธิบายและแสดงเหตุผล

ขั้นที่ 4 ขั้นตรวจสอบ หรือมองย้อนกลับ ต้องอาศัยทักษะในการคำนวณ การ
ประมาณ คำตอบ การตรวจสอบผลลัพธ์ที่หาได้โดยอาศัยความรู้สึกเชิงจำนวน (number sense) หรือ
ความรู้สึกเชิงปริภูมิ (spatial sense) ในการพิจารณาความสมเหตุสมผลของคำตอบที่สอดคล้องกับ
สถานการณ์หรือปัญหา

อุษาวดี จันทรสุนธิ (ม.ป.ป.: 3-23 - 3-26) ได้เสนอกระบวนการสอนคณิตศาสตร์
ที่ใช้การเรียนรู้แบบแก้ปัญหาไว้ ดังนี้

1) ขั้นนำเข้าสู่เรื่องที่จะสอน เป้าหมายของขั้นนี้เพื่อสร้างแรงจูงใจผู้เรียนทั้งชั้น
ให้เกิดความสนใจ ความใฝ่รู้ และความต้องการเรียนรู้หัวข้อคณิตศาสตร์ในชั่วโมงนั้น โดยมุ่งมั่นที่
เรียนรู้ให้สำเร็จผล ขั้นนำจึงเป็นขั้นที่สำคัญที่สุด ครูคณิตศาสตร์จึงควรกำหนดปัญหาคณิตศาสตร์
ในขั้นนำเข้าสู่เรื่องที่จะสอนให้เป็นปัญหาที่น่าสนใจ ทำทนายให้ผู้เรียนอยากค้นคว้าหาความรู้

2) ขั้นดำเนินการกิจกรรมแก้ปัญหา เป้าหมายของขั้นตอนนี้เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความคิด
รวบยอดเรื่องใหม่ที่ไม่เคยเรียนมาก่อน หรือเกิดความคิดกระจ่างในความคิดรวบยอดที่เคยเรียน
มาแล้ว หรือเพื่อฝึกทักษะหรือนำความคิดรวบยอดที่รู้แล้วไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ หรือเพื่อ
ทบทวนความคิดรวบยอดที่สำคัญ ๆ ให้แม่นยำขึ้น ขั้นนี้เปรียบเสมือนขั้นตอนการสอนโดยผ่าน
ปัญหาและกระบวนการแก้ปัญหา

3) ขั้นสรุปความรู้ เป็นขั้นที่สรุปความรู้ โดยทบทวนประเด็นที่สำคัญ และการ
แสดงความเชื่อมโยงระหว่างประเด็นที่สำคัญเหล่านั้นเข้าด้วยกันจนเห็นความรู้เป็นองค์รวม ครูอาจ
ตั้งคำถามให้ผู้เรียนตอบประกอบการสรุปก็ได้

4) ขั้นมอบหมายงานให้ศึกษาโดยอิสระ โดยงานที่มอบให้อาจเป็นงาน
คณิตศาสตร์ที่เป็นการฝึกทักษะหรือใช้ความคิดรวบยอดที่สอนในชั่วโมงนั้น หรืออาจเป็นงานการ
แก้ปัญหาคณิตศาสตร์ประจำหน่วยการเรียน หรือแต่ละสัปดาห์ให้นักเรียนได้ศึกษาหรือค้นคว้า
อย่างเป็นอิสระช่วยให้เกิดการต่อยอดความรู้และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียน

สรุปได้ว่า ในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น จะต้องมีการดำเนินการอย่างเป็น
ระบบมีขั้นตอน จึงจะสามารถแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ได้อย่างถูกต้องรวดเร็วและได้คำตอบที่
ถูกต้อง

1.6 ยุทธวิธีในการแก้ปัญหา

ยุทธวิธีในการแก้ปัญหาเป็นเครื่องมือทางคณิตศาสตร์ที่มีความสำคัญอย่างยิ่งที่ช่วยให้นักเรียนสร้างความก้าวหน้าในการแก้ปัญหา ซึ่งมีผู้เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาไว้ ดังนี้
 เคนเนดี (Kennedy, 1984: 81-82) กล่าวว่ายุทธวิธีในการแก้ปัญหานั้นมีอยู่หลายวิธี ดังนี้

- 1) การหารูปแบบเป็นการจัดระบบข้อมูลเพื่อหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในปัญหาหรือสถานการณ์ที่กำหนดและการจัดรูปแบบทั่วไป ซึ่งอาจเป็นรูปแบบของจำนวน รูปเรขาคณิต เพื่อนำมาใช้เขียนแทนจำนวนหรือสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนได้เรียนรู้จำนวนหรือการจัดจำนวนเหล่านั้นในรูปแบบต่าง ๆ ให้มีความเป็นนามธรรมให้มาก ๆ เพื่อนำไปสู่กระบวนการคิดที่เป็นนามธรรมต่อไปได้
- 2) การเขียนแผนผังหรือภาพประกอบ เป็นการเขียนแผนผังหรือภาพของปัญหาหรือสถานการณ์เพื่อช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์และแนวทางในการหาคำตอบ
- 3) การสร้างรูปแบบ เป็นยุทธวิธีในการแก้ปัญหาที่คล้ายกับการเขียนภาพ แต่มีประโยชน์ดีกว่าตรงที่สามารถเคลื่อนที่สิ่งที้นำมาจัดรูปแบบ
- 4) การสร้างตารางหรือกราฟ เป็นการจัดข้อมูลลงในตารางและนำไปสู่การค้นพบรูปแบบและข้อชี้แนะอื่น ๆ
- 5) การเดาและการตรวจสอบ เป็นการหาคำตอบของปัญหาจากสามัญสำนึกโดยผู้แก้ปัญหาเดาแล้วตรวจสอบ หากไม่ได้คำตอบก็เปลี่ยนแปลงการเดาและตรวจสอบอีกครั้งหนึ่งจนได้คำตอบ การเดาและการตรวจสอบเป็นวิธีการง่ายแต่อาจใช้เวลามากกว่ายุทธวิธีอื่น
- 6) การแจกกรณีที่เป็นไปได้ เป็นการแจกกรณีที่เป็นไปได้ทั้งหมดของปัญหาใช้ได้กรณีที่มีจำนวนที่เป็นไปได้แน่นอน มักจะใช้ตารางช่วยในการแจกกรณี
- 7) การเขียนเป็นประโยคทางคณิตศาสตร์ เป็นการเขียนแสดงความเข้าใจสถานการณ์ปัญหา มีเป้าหมาย 2 ประการ คือ เป็นการแสดงความเข้าใจสถานการณ์ปัญหาและการแสดงให้รู้ว่าต้องคิดคำนวณอย่างไรในการแก้ปัญหา นักเรียนที่สามารถเขียนประโยคทางคณิตศาสตร์ได้ถูกต้องแสดงว่าเข้าใจปัญหานั้นและนำไปสู่การดำเนินการหาคำตอบได้ถูกต้อง
- 8) การดำเนินการแบบย้อนกลับ เป็นการดำเนินการในขั้นสุดท้ายแล้วทำย้อนกลับมาสู่ข้อความที่กำหนดเริ่มต้น ใช้ได้ดีกับปัญหาที่ต้องการอธิบายถึงขั้นตอนการได้มาซึ่งคำตอบ
- 9) การแบ่งเป็นปัญหาย่อย ๆ หรือเปลี่ยนมุมมองของปัญหา ส่วนปัญหาที่มีความซับซ้อนเพื่อความสะดวกอาจแบ่งปัญหาย่อย ๆ แล้วนำผลการแก้ปัญหาย่อยเหล่านั้นไปตอบปัญหา

ที่กำหนดหรือบางปัญหาอาจต้องใช้การคิดและการเปลี่ยนมุมมองที่ต่างไปจากที่คุ้นเคยที่ต้องทำตามทีละขั้นตอนก็จะช่วยให้การแก้ปัญหานั้นมีประสิทธิภาพมากขึ้น การที่นักเรียนจะเลือกใช้ยุทธวิธีใดมาช่วยในการแก้ปัญหานั้น นักเรียนก็ต้องพิจารณาว่าปัญหาใดมีความเหมาะสมกับยุทธวิธีใด

แฮทฟิลด์ เอ็ดวาร์ดส์ และบิทเทอร์ (Hatfield, Edward ;& Bitter, 1993: 55-60 อ้างถึงใน อรรถ ฤบุญเต็ม 2550: 20) ได้เสนอยุทธวิธีแก้ปัญหาไว้ 11 กลวิธี ดังนี้

1) กลวิธีประมาณและตรวจสอบ (Estimation and Check) เป็นกลวิธีหนึ่งในการเสนอคำตอบที่ใกล้เคียงเพื่อตัดสินใจว่าแนวทางแก้ปัญหานั้นจะเป็นวิธีใด คำตอบที่สันนิษฐานไว้ต้องสัมพันธ์กับคำตอบที่ได้จากการแก้ปัญหา และการประมาณคำตอบสามารถทำได้เป็นประจำในชั้นเรียน

2) กลวิธีค้นหารูปแบบ (Looking for Patterns) ปัญหาบางปัญหามีวิธีแก้วิธีเดียว คือ การหารูปแบบได้จากข้อมูลที่ให้มา

3) กลวิธีพิจารณาว่าข้อมูลเพียงพอหรือไม่ (Insufficient Information) ในบางครั้งข้อมูลที่ให้มานั้นไม่เพียงพอคือ บางส่วนหายไปจากโจทย์ปัญหา

4) กลวิธีวาดภาพ กราฟ และตาราง (Drawing Pictures, Graph and Table) การวาดภาพกราฟ และตารางช่วยให้นักเรียนมองเห็นภาพจากข้อมูลที่เป็นตัวเลขได้ กราฟช่วยให้มองเห็นความสัมพันธ์ระหว่างข้อมูลที่ไม่ปรากฏโดยทันที

5) กลวิธีตัดข้อมูลที่ไม่เกี่ยวข้องออก (Elimination of Extraneous Data) โจทย์ปัญหาบางโจทย์ปัญหาให้ข้อมูลที่จำเป็นและไม่จำเป็นในการหาคำตอบ ซึ่งนักเรียนจะต้องตัดข้อมูลที่ไม่น่าจำเป็นออก เพื่อที่จะให้ข้อมูลนั้นแคลง แทนที่จะใช้ข้อมูลทั้งหมดที่ไม่มีความหมาย

6) กลวิธีพัฒนาสูตรและเขียนสมการ (Developing Formulas and Writing Equation) การสร้างสูตรมีประโยชน์ต่อการเอาจำนวนมาใส่ในสูตร เพื่อคำนวณให้ได้คำตอบ

7) กลวิธีสร้างแบบจำลอง (Modeling) เป็นหนทางที่ช่วยให้นักเรียนมองเห็นความสัมพันธ์ที่จำเป็นในการแก้ปัญหา ครูซึ่งมีความเข้าใจถึงไมโครคอมพิวเตอร์สามารถใช้ในการสร้างแบบจำลองได้ดี

8) กลวิธีย้อนกลับ (Working Backwards) ในการพิสูจน์เรขาคณิตใช้กลวิธีนี้เพื่อพิจารณาการเขียนพิสูจน์

9) กลวิธีเขียนผังงาน (Flowcharting) ขั้นตอนการดำเนินงานการเขียนผังงาน จะช่วยให้มองเห็นกระบวนการในการแก้ปัญหา ซึ่งผังงานเป็น โครงที่แสดงรายละเอียดของขั้นตอนที่ต้องดำเนินการตามเงื่อนไขต่างๆ ที่ต้องการก่อนที่จะไปถึงทางแก้ปัญหา

10) กลวิธีเทียบเคียงปัญหาอื่น (Acting out the Problem) การมองปัญหาว่าเป็นสถานการณ์ที่เคยพบมาก่อน ทำให้เห็นขั้นตอนในการแก้ปัญหาที่เกี่ยวข้องได้ง่ายขึ้น

11) กลวิธีทำให้เป็นปัญหาอย่างง่าย (Simplifying the Problem) ในโจทย์ปัญหาบางโจทย์มีการคิดคำนวณที่ใช้ตัวเลขที่มีค่ามากๆ การนำตัวเลขที่มีค่าน้อยกว่าสามารถช่วยคำนวณได้อย่างรวดเร็วและสามารถนำมาแทนที่จำนวนที่มีค่ามากๆนั้นเพื่อช่วยให้นักเรียนตรวจสอบคำตอบอย่างมีเหตุผลได้ก่อนที่จะแก้ปัญหาโจทย์ที่กำหนดให้

โฮล์มส์ (Holmes, 1995: 37 อ้างถึงในปริษา เนาว์เย็นผล 2544: 44) กล่าวว่าในการสอนยุทธวิธีในการแก้ปัญหาคควรดำเนินการ ดังนี้

1) กำหนดปัญหาให้นักเรียนอ่านปัญหาในใจหรืออ่านออกเสียง ครูถามเกี่ยวกับคำที่นักเรียนไม่ทราบความหมาย เพื่อทำความเข้าใจคำต่าง ๆ ให้ชัดเจนตรงกันแล้วให้นักเรียนแก้ปัญหาเป็นรายบุคคล หรือเป็นกลุ่มเล็ก ๆ ในขณะที่นักเรียนลงมือแก้ปัญหา ครูเฝ้าสังเกตการทำงาน of นักเรียนอย่างใกล้ชิด และให้คำแนะนำ

2) ให้นักเรียนรายงานผลการแก้ปัญหาต่อชั้นเรียน ให้นักเรียนทั้งชั้นร่วมกันอภิปรายถึงวิธีคิดหาคำตอบของแต่ละคน แต่ละกลุ่ม

3) ใช้คำถามที่ทำให้สามารถกระตุ้นนักเรียนให้พิจารณาไตร่ตรองกระบวนการที่ใช้ในการหาคำตอบ และใช้คำตอบของนักเรียนให้เป็นประโยชน์ในการกล่าวถึงยุทธวิธีของการแก้ปัญหา ถ้าเป็นไปได้ให้นักเรียนระบุชื่อของยุทธวิธีนั้น

4) จัดหาโอกาสที่เหมาะสมแก่นักเรียนในการใช้ยุทธวิธีหลายๆ อย่างและแลกเปลี่ยนความคิดเกี่ยวกับการใช้ยุทธวิธีที่แตกต่างกัน ให้นักเรียนได้เขียนอธิบายถึงวิธีการที่นักเรียนคิดในขณะที่แก้ปัญหา ให้นักเรียนได้รับประสบการณ์และคุ้นเคยว่าปัญหาหนึ่งๆ อาจใช้ยุทธวิธีหลายๆ อย่างในการแก้ปัญหา

กรมวิชาการ (2541: 5) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาไว้ ดังนี้

1) การเดาและการตรวจสอบ (Guess and check) เป็นการหาคำตอบจากสามัญสำนึก โดยผู้แก้ปัญหาคาดเดาคำตอบ หากไม่ได้คำตอบก็แปลการเดาจนกว่าจะได้คำตอบ

2) การทำปัญหาให้ง่ายลง (Make an easier problem) เป็นการจัดกระทำกับปัญหาเพื่อให้ปัญหาที่มีความซับซ้อนให้ซับซ้อนน้อยลง อาจแยกปัญหาออกเป็น ส่วน ๆ หรือการใส่กราฟฟิก การเขียนเป็นภาพจะช่วยให้การแก้ปัญหานั้นง่ายขึ้น

3) การค้นหารูปแบบ (Look a pattern) เป็นการจัดระบบข้อมูลหาความสัมพันธ์ของข้อมูลในสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดแล้วจัดรูปแบบทั่วไปในการแก้ปัญหอาจเป็นรูปแบบในลักษณะของจำนวนหรือสัญลักษณ์

4) การเขียนแผนผังหรือภาพประกอบ (Draw and picture) เป็นการใช้อาพจากสถานการณ์ปัญหาเพื่อให้สามารถมองเห็นปัญหาได้ชัดเจนยิ่งขึ้น

5) การสร้างตาราง (Make a table) เป็นการใช้อย่างตารางเพื่อแยกประเด็นปัญหาเพื่อให้สามารถมองเห็นความสัมพันธ์ของปัญหาในแต่ละส่วนเพื่อนำไปสู่การสร้างรูปแบบในการแก้ปัญหา

6) การแจกแจงอย่างเป็นระบบ (Make an organize list) จะเป็นการแจกแจงที่เป็นไปได้ของปัญหาทั้งหมดโดยอาจจัดทำในรูปตารางเพื่อให้สามารถมองเห็นปัญหาได้ง่ายลง

7) การทำย้อนกลับ (Work backward) เป็นการตรวจสอบขั้นตอนต่าง ๆ ในการแก้ปัญหาโดยให้มีการทำย้อนกลับไปยังจุดเริ่มต้นแรก ๆ ของการแก้ปัญหาเพื่อให้สามารถตรวจสอบถึงขั้นตอนในการแก้ปัญหาว่ามีขั้นตอนใดบ้างที่ไม่ถูกต้องหรือไม่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดในปัญหาก็จะช่วยให้สามารถปรับปรุงการแก้ปัญหาในแต่ละขั้นตอนให้ถูกต้องเหมาะสม

สภาครุคณิตศาสตร์แห่งชาติของสหรัฐอเมริกา (NCTM, 2000: 64 อ้างถึงใน ชัยยุทธ บุญธรรม 2549: 72) ได้เสนอยุทธวิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ไว้ดังนี้

วิธีการแก้ปัญหามีความน่าสนใจในเรื่องกิจกรรมการเรียนการสอน ซึ่งเป็นการพัฒนาวิธีการแก้ไขสิ่งที่ไม่รู้ ดังนั้นนักแก้ปัญหาที่ดีจะต้องมี “กระบวนการทางคณิตศาสตร์” ซึ่งจะต้องวิเคราะห์สถานการณ์ด้วยความระมัดระวังในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ และใช้คุณสมบัติที่เหมาะสมในการกำหนดปัญหาบนสถานการณ์พื้นฐานที่เขพบ ตัวอย่างเช่น เด็กน้อยคนหนึ่งรู้สึกประหลาดใจเมื่อเขาคิดว่า จะต้องใช้เวลานานเท่าไรในการนับเลขจากหนึ่งถึงล้าน

การแก้ปัญหาที่ดีเพื่อให้นักเรียนได้ฝึกจะทำให้ความรู้ของเขามั่นคงและเพิ่มพูน โดยจะกระตุ้นให้เกิดความสนใจที่จะเรียนรู้สิ่งใหม่ๆ ซึ่งความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ทั้งหลายนั้นสามารถที่จะเกิดขึ้นได้โดยผ่านทางปัญหาพื้นฐานและจากมวลประสบการณ์ชีวิตของนักเรียนหรือเนื้อหาทางคณิตศาสตร์ตัวอย่างเช่นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นสนใจที่จะหาสูตรทำพินช์ (punch) ซึ่งมีส่วนผสมระหว่างน้ำกับน้ำผลไม้ เพื่อให้มีรสผลไม้มากขึ้น ซึ่งนักเรียนพยายามคิดวิธีที่แตกต่างกัน ถึงตอนนี้ครูช่วยให้นักเรียนเกิดการใช้ทักษะสัมพันธ์ร่วมกัน การกระทำดังนี้เป็นความสำคัญอันดับแรกที่จะนำไปสู่ความคิดรวบยอดที่สูงขึ้นไป

นักเรียนต้องการที่จะพัฒนากรอบของยุทธวิธีการแก้ปัญหา ซึ่งอาจใช้แผนภาพสังเกตุหาแบบรูป หรือพยายามหาความหมายพิเศษ หรือเลือกใช้การตรวจสอบ ยุทธวิธีเหล่านี้ต้องการชี้แนะอย่างยิ่ง เพื่อให้นักเรียนสามารถเรียนรู้ด้วยตนเอง อย่างไรก็ตามการใช้ยุทธวิธีการแก้ปัญหา

ควรต้องมีความสอดคล้องกับหลักสูตรด้วย ทั้งนี้เพื่อให้นักเรียนเกิดความสนใจที่จะเรียน ที่จะตรวจสอบและปรับปรุงยุทธวิธี ซึ่งทำให้นักเรียนสามารถนำไปใช้ในการแก้ปัญหาได้อย่างเหมาะสม

การสอนของครูมีบทบาทที่สำคัญยิ่งในการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาของนักเรียน ครูต้องเลือกปัญหาที่ดึงดูดความสนใจของนักเรียน หาวิธีการ สถานการณ์แวดล้อมที่จะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนได้สำรวจ ลองผิดลองถูก แบ่งปันความล้มเหลว และความสำเร็จร่วมกัน ซึ่งครู ควรใช้คำถามนำเรื่อยไป ดังนั้นภายในสภาพแวดล้อมที่เหมาะสม จะทำให้นักเรียนสามารถพัฒนาความเชื่อมั่นและต้องการที่จะสำรวจปัญหาต่างๆ สามารถพิจารณาและตัดสินใจภายใต้ยุทธวิธีการแก้ปัญหาของตนเองได้

ปรีชา เนาวีเย็นผล (2544: 45) กล่าวว่า ในการฝึกให้นักเรียนแก้ปัญหานั้นควรให้นักเรียนได้แก้ปัญหาคด้วยวิธีการหลาย ๆ วิธีซึ่งอาจแตกต่างกันไปจากครูกคิดเอาไว้ ยุทธวิธีต่าง ๆ อาจมีความเหมาะสมหรือไม่เหมาะสม ต้องมีการพิจารณาอย่างมีเหตุผล และต้องมีการสรุปให้ทราบว่า ถ้าไม่เหมาะสมเป็นเพราะเหตุใดด้วย ในการสอนยุทธวิธีในการแก้ปัญหานั้น ไม่ควรนำเสนอโดยชี้แจงว่า วิธีการของครูกดีกว่าวิธีการของนักเรียน แต่ควรชี้ให้เห็นถึงข้อดีและใช้เป็นอีกทางเลือกหนึ่งของการแก้ปัญหาเท่านั้น ซึ่งจะสอดคล้องกับปัญหาในชีวิตจริงซึ่งต้องแก้ปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีอย่างหลากหลายจึงจะแก้ปัญหานั้นได้ ในการแก้ปัญหานั้นก็ขึ้นอยู่กับความรู้ ประสบการณ์ และมุมมองของแต่ละบุคคล การส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้ยุทธวิธีต่าง ๆ อย่างหลากหลายจะช่วยให้ นักเรียนสามารถเลือกใช้ยุทธวิธีที่ตนเองถนัด ทำให้สามารถแสดงศักยภาพในการแก้ปัญหาได้อย่างเต็มที่และนำไปสู่ความสำเร็จได้ การสนับสนุนให้นักเรียนได้ฝึกแก้ปัญหาเดี่ยวด้วยวิธีการที่หลากหลายจะมีประโยชน์มากกว่าการแก้ปัญหามากมาย ปัญหาแต่ใช้ยุทธวิธีเดียว

อุยวดี จันทรสุนธิ (ม.ป.ป.: 1-16) ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหามี ดังนี้

1) การคาดเดาและการตรวจสอบ การเดาและการตรวจสอบเหมาะกับปัญหาที่จำนวนคำตอบจำกัด การเดาและการตรวจสอบโดยใช้วิธีคิดอย่างเป็นระบบทำให้ตัดทางเลือกที่ไม่เกี่ยวข้องทิ้งไปได้

2) การเขียนภาพ ใช้ได้ดีกับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตหรือการวัด

3) การใช้ตัวแปร เหมาะกับปัญหาซึ่งมีปริมาณที่ไม่ทราบค่าสัมพันธ์กับปริมาณที่รู้ค่าและมุ่งหมายหาคำตอบที่เป็นกรณีทั่วไป

4) การค้นหาแบบรูป เป็นการค้นหาแบบรูปที่เกี่ยวข้องกับการคิดหาเหตุผลแบบอุปนัยจากการศึกษาตัวอย่างชุดหนึ่ง

5) การแจกแจงรายการและการแปลงปัญหาให้ซับซ้อนน้อยลง ยุทธวิธีแปลงปัญหาให้ซับซ้อนน้อยลง มักถูกใช้กับยุทธวิธีอื่น ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการใช้ร่วมกับการค้นหาแบบรูปสรุปได้ว่า ยุทธวิธีในการแก้ปัญหามักเป็นวิธีการที่ผู้แก้ปัญหามานำมาใช้แก้ปัญหามีประสิทธิภาพมากขึ้น โดยในแต่ละปัญหาจะใช้ยุทธวิธีในการแก้ปัญหานั้นที่แตกต่างกันออกไปซึ่งมีอยู่อย่างหลากหลายวิธี ได้แก่ การค้นหาแบบ การเดาและการตรวจสอบ การทำปัญหาให้ง่ายลง การเขียนแผนผังหรือภาพประกอบ การสร้างตาราง การแจกแจงกรณีอย่างเป็นระบบ การทำย้อนกลับ ซึ่งสามารถใช้ได้กับปัญหาต่าง ๆ ได้ตามความเหมาะสมกับปัญหานั้น ๆ

1.7 การจัดการเรียนรู้ที่ส่งเสริมการแก้ปัญหา

ในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์เกี่ยวกับการแก้ปัญหา มีผู้เสนอแนวทางในการจัดการเรียนรู้ที่เป็นการส่งเสริมการแก้ปัญหา ดังนี้

ธีสเซนและคณะ (Thiessen and others, 1989: 38) ได้กล่าวไว้ว่า เนื่องจากสภาพของปัญหาที่มีความแตกต่างกันการแก้ปัญหามักเป็นรายบุคคลอาจทำให้ได้วิธีน้อยกว่าการแก้ปัญหากลุ่มจะช่วยให้สามารถได้วิธีการที่หลากหลายกว่าแบบรายบุคคล

เรย์ ชุยคัม และ ลินด์ควิสต์ (Rey Suydum and Lindquist, 1992: 30) ได้กล่าวไว้ว่าการใช้เวลาในการแก้ปัญหานั้นนักเรียนต้องใช้เวลาในการทำความเข้าใจ สำรวจแนวทางในการแก้ปัญหาและตรวจสอบคำตอบ โดยเฉพาะปัญหาที่ยังไม่รู้วิธีการแก้ปัญหานั้นต้องใช้เวลาเพิ่มอีกและควรจะให้เวลาสำหรับนักเรียนแต่ละคนหรือแต่ละกลุ่มได้ดำเนินการตามแนวคิดของตนเองหรือกลุ่มอย่างอิสระเพื่อให้ได้วิธีการที่ดีที่สุด ดังนั้นเวลาจึงเป็นปัจจัยสำคัญอย่างหนึ่งของการแก้ปัญหา

ฮาร์ท (Hart, 1993: 169-170) กล่าวว่า การแก้ปัญหามักเป็นกลุ่มช่วยทำให้เกิดการเรียนรู้ วิธีแก้ปัญหามาจากกันและกันด้วยและพบว่าองค์ประกอบที่จะช่วยให้นักเรียนแก้ปัญหาได้ดีคือ ความร่วมมือในกลุ่ม การช่วยเหลือพึ่งพากันในกลุ่ม

สมเดช บุญประจักษ์ (2540 : 28) กล่าวว่า การจัดบรรยากาศในห้องเรียนส่งผลต่อความสามารถแก้ปัญหา โดยจะต้องเป็นบรรยากาศที่นักเรียนรู้สึกสะดวกสบายในการแสดงความคิด ไม่เข้มงวด เอาจริงเอาจังจนเกิดความตึงเครียด เพราะถ้านักเรียนเกิดความรู้สึกกลัวในสิ่งที่ทำผิดพลาดหรือถูกหัวเราะเยาะจากเพื่อน ๆ ก็จะไม่กล้าแสดงออกหรือออกความคิดเห็นในเรื่องต่าง ๆ ดังนั้นครูต้องให้นักเรียนมีอิสระ ครูหรือนักเรียนคนอื่น ๆ จะต้องยอมรับวิธีการที่นักเรียนคนใดคนหนึ่งนำเสนอแล้วจึงช่วยกันหาข้อผิดพลาดหรือยอมรับในสิ่งที่ผิดพลาดอย่างมีหลักเกณฑ์ในด้านเวลาจะต้องจัดให้พอสมควรเพราะแต่ละคนใช้เวลาในการแก้ปัญหานั้นที่ต่างกัน เนื่องจากนักเรียนมีความสามารถแตกต่างกัน

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 35-36) กล่าวว่า สิ่งที่จะช่วยส่งเสริมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มีดังนี้

1) การให้นักเรียนแต่ละคนได้มีโอกาสแสดงแนวคิด วิธีการของตนเองได้อย่างอิสระและทั่วถึงภายในกลุ่มโดยให้มีการยืดหยุ่นด้านเวลาซึ่งจะทำให้แต่ละคนกล้าเสี่ยงที่จะเสนอแนวความคิดของตนเองโดยไม่กลัวผิด ไม่เฉพาะแนวคิดของนักเรียนเก่งเท่านั้นแต่จะต้องช่วยกันตรวจสอบว่าแนวคิดใดเหมาะสมที่สุด โดยให้มีการอ้างเหตุผลประกอบ แล้วนำแนวคิดหรือวิธีการจากแต่ละคนมาเปรียบเทียบกันแล้วช่วยกันตรวจสอบเพื่อนำไปสู่ยุทธวิธีที่ดีที่สุด ซึ่งจะช่วยให้ทุกคนได้เรียนรู้แนวคิดหรือวิธีการจากคนอื่น นอกจากนั้นยังเป็นการฝึกให้นักเรียนมีเหตุผลรู้จักรับฟังเหตุผลของคนอื่น ๆ ด้วย

2) กิจกรรมจะช่วยให้นักเรียนได้แนวคิดในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ซึ่งอาจได้แนวคิดจากกลุ่มย่อยและเมื่อแต่ละกลุ่มนำเสนอต่อหน้าชั้นก็จะทำให้ได้แนวคิดมากขึ้น ซึ่งแตกต่างจากการแก้ปัญหาโดยคนคนเดียวจะทำให้ได้แนวคิดน้อยกว่า เนื่องสภาพปัญหาในปัจจุบันและอนาคตต้องใช้แนวคิดจากหลายคนหลายกลุ่มจึงจะสามารถแก้ปัญหาให้สำเร็จได้

3) ขณะที่นักเรียนร่วมกันแก้ปัญหาในกลุ่มย่อยนั้น ครูควรมีบทบาทเป็นผู้อำนวยความสะดวกให้คำแนะนำเท่าที่จำเป็นหรือมีการใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้เกิดการคิด ไม่ควรใช้วิธีบอกให้กระทำตาม รวมทั้งเสนอแนะวิธีการทำงานกลุ่มให้มีประสิทธิภาพ แม้กิจกรรมกลุ่มจะมีบทบาทต่อการแก้ปัญหาค่อนข้างมากแต่กิจกรรมรายบุคคลก็ไม่ควรละเลย เพราะจะช่วยส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาให้กับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

อุษาวดี จันทรสนธิ (ม.ป.ป.: 3-6) ได้เสนอการจัดกิจกรรมส่งเสริมการสอนโดยวิธีแก้ปัญหา สรุปได้ ดังนี้

1) รูปแบบกิจกรรมอาจใช้เป็นกิจกรรมกลุ่มใหญ่ทั้งชั้น หรือกลุ่มย่อยแบบเรียนร่วมกัน เป็นรายบุคคลและทำงานอิสระนอกชั้นเรียน โดยใช้งานคณิตศาสตร์ที่มุ่งให้ผู้เรียนได้ปฏิบัติการแก้ปัญหาเป็นศูนย์กลางของกิจกรรม

2) กิจกรรมกลุ่มใหญ่แก้ปัญหานั้นนำเข้าสู่บทเรียนเพื่อสร้างแรงจูงใจหรือเพื่อทบทวนความรู้เดิมและประสบการณ์ และกิจกรรมกลุ่มใหญ่เพื่อไตร่ตรองและสรุป

3) กิจกรรมกลุ่มย่อย 4-6 คนแก้ปัญหาแบบเรียนร่วมกัน เพื่อค้นหาความคิดรวบยอดใหม่หรือแก้ปัญหาร่วมกันเพื่อฝึกฝนการนำความรู้ใหม่ไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ หรือแก้ปัญหามาเพื่อทบทวนสิ่งที่เรียนมาแล้วหรือแก้ปัญหามาเพื่อเชื่อมโยงคณิตศาสตร์

4) กิจกรรมนอกชั้นเรียน โดยศึกษาด้วยตนเองในรูปแบบแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ประจำหน่วยการเรียนรู้ที่มอบหมายให้เป็นการบ้าน

สรุปได้ว่า ในการจัดการเรียนรู้ที่เป็นการส่งเสริมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ควรจัดนักเรียนเป็นกลุ่มย่อยเพื่อนักเรียนจะได้เรียนรู้แนวคิดหรือวิธีแก้ปัญหาร่วมกัน ควรมีการจัดบรรยากาศให้นักเรียนรู้สึกสบาย ไม่เข้มงวดจนเกินไป เน้นให้นักเรียนได้แสดงความคิดเห็นอย่างเป็นอิสระ ให้อิสระ ให้รู้จักยอมรับซึ่งกันและกันจัดเวลาในการแก้ปัญหาให้พอสมควรเพื่อนักเรียนจะได้มีโอกาสตรวจสอบไตร่ตรองถึงแนวคิดของตนเองหรือกลุ่มของตนเองให้มากจะช่วยให้การแก้ปัญหา นั้นมีประสิทธิภาพมากขึ้น

2. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 งานวิจัยภายในประเทศ

ราพีง นิรารัมย์ (2546) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหา เรื่องการประยุกต์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนเพชรพิทยาคม จังหวัดเพชรบูรณ์ โดยมีวัตถุประสงค์การวิจัยเพื่อ (1) พัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหา เรื่องการประยุกต์ (2) เปรียบเทียบความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ระหว่างก่อนและหลังการใช้กิจกรรมการเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหา เรื่องการประยุกต์ กลุ่มตัวอย่าง คือนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2546 โรงเรียนเพชรพิทยาคม จังหวัดเพชรบูรณ์ จำนวน 45 คน โดยใช้วิธีการสุ่มแบบกลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยประกอบด้วย แผนการจัดการกิจกรรมการเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหา เรื่องการประยุกต์ และแบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้ปัญหามathematics สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ได้แก่ การหาค่าร้อยละและการทดสอบค่าที แบบไม่เป็นอิสระ กำหนดนัยสำคัญของการทดสอบสมมติฐานที่ระดับ .05 ผลการวิจัยพบว่า (1) กิจกรรมการเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหา เรื่องการประยุกต์ มีประสิทธิภาพ 75.55/75 (2) ความสามารถในการแก้ปัญหามathematics ของนักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหา เรื่องการประยุกต์ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญ

ชาญวิทย์ กรวยทอง (2547: 89) ได้พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหา เรื่อง จำนวนและการบวก การลบ การคูณ การหารชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่านักเรียนมีทักษะการแก้โจทย์ปัญหาหลังเรียนเพิ่มขึ้นจากก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 ดัชนีประสิทธิผลของแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการฝึกทักษะการแก้โจทย์

ปัญหา มีค่าเท่ากับ 0.70 นั่นคือ นักเรียนมีความก้าวหน้าในการเรียนสูงขึ้นร้อยละ 70 และนักเรียนมีความพึงพอใจต่อการเรียน โดยใช้เทคนิคการฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหาอยู่ในระดับพึงพอใจมาก

บุญพา อร่ามโชติ (2549: 102) ได้ศึกษาผลการปฏิบัติการพัฒนาคุณภาพการเรียนรู้อบรมสาระคณิตศาสตร์เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ในด้านทักษะการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์และด้านพฤติกรรมการเรียนรู้ในห้องเรียน โดยใช้แผนการจัดการเรียนรู้ในด้านทักษะกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อศึกษาผลการพัฒนาคุณภาพการเรียนรู้อบรมสาระคณิตศาสตร์เรื่องการแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3 ในด้านทักษะการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ และด้านพฤติกรรมการเรียนรู้ในห้องเรียน โดยใช้แผนการจัดการเรียนรู้ในด้านทักษะกระบวนการแก้โจทย์ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า 1) การพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์โดยใช้เทคนิคการสอนที่จัดทำขึ้น มีหลักการและเป้าหมายเพื่อให้ผู้เรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง สามารถนำประสบการณ์ด้านทักษะที่ได้จากการเรียนการสอนสาระคณิตศาสตร์ไปใช้ในชีวิตประจำวัน รวมทั้งให้มีการช่วยเหลือซึ่งกันและกัน ซึ่งเป็นเทคนิคการสอนการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ 2) นักเรียนที่ได้รับการพัฒนาการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนด คะแนนเฉลี่ยร้อยละ 70 ดังนี้ วงจรที่ 1 คิดเป็นร้อยละ 73.50 วงจรที่ 2 คิดเป็นร้อยละ 76.50 วงจรที่ 3 คิดเป็นร้อยละ 77.00 และทำการทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียนและหลังเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 นั่นคือ การทดสอบหลังเรียน นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น 3) นักเรียนที่ได้รับการพัฒนาการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์มีพฤติกรรมการเรียนรู้ในห้องเรียนในด้านความคล่องตัวในการทำงาน สนุกสนาน และตั้งใจเรียน ฝึกฝนตนเองอยู่เสมอ มีความเชื่อมั่นและภูมิใจในผลงานของตนเอง

จันทร์ลา ศิลปประย (2551) ได้พัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้อบรมเน้นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และเพื่อศึกษากระบวนการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้อบรมเน้นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนชุมชนบ้านไร่สีสุก สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาอำนาจเจริญ กลุ่มเป้าหมายในการวิจัย เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนชุมชนบ้านไร่สีสุก สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาอำนาจเจริญ อำเภอเสนางคณคม จังหวัดอำนาจเจริญ ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2550 จำนวน 26 คน ผลการวิจัยพบว่า การพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังจากใช้กิจกรรมการเรียนรู้อบรมเน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ที่ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแล้ว นักเรียน

จำนวนร้อยละ 76.92 ของนักเรียนทั้งหมด (จำนวน 20 คน) มีทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ตั้งแต่ร้อยละ 65 ขึ้นไป

ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544) ใช้กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยการแก้ปัญหาปลายเปิดที่มีขั้นตอนของกิจกรรมการเรียนการสอน 4 ขั้นตอน คือ 1) การแก้ปัญหาร่วมกันในกลุ่มใหญ่ 2) การแก้ปัญหาร่วมกันในกลุ่มย่อย 3) การนำเสนอผลการปฏิบัติ และ 4) กิจกรรมรายบุคคล เป็นการฝึกแก้ปัญหาเพิ่มเติม ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนรายวิชา ค 101 คณิตศาสตร์ 1 ของนักเรียนในกลุ่มที่เรียนโดยใช้กิจกรรมดังกล่าวที่เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 มีค่าสูงกว่าเกณฑ์ปกติของโรงเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 มีพฤติกรรมการแก้ปัญหาอยู่ในระดับดีและมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

2.2 งานวิจัยในต่างประเทศ

เทอร์เกอร์ (Tougaw, 1994: 2934 – A อ้างถึงใน อรรถ ฎบุญเติม 2550: 25) ได้ทำการวิจัยเกี่ยวกับผลที่เกิดขึ้นจากการสอนโดยใช้การแก้ปัญหาแบบเปิดกว้างในการสอนคณิตศาสตร์ โดยศึกษาพฤติกรรมในการแก้ปัญหาและเจตคติเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษา การแก้ปัญหาแบบเปิดกว้างหมายถึง การสร้างข้อาคดเคา การสืบค้น การค้นพบ การอภิปราย การพิสูจน์ และการหารูปทั่วไปในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ นักเรียนต้องใช้ความรู้ ทักษะ กระบวนการคิด และเจตคติทางบวกเป็นพื้นฐาน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ผ่านการทดสอบโดยใช้ปัญหาแบบเปิดกว้างมีเจตคติทางบวกต่อการเรียนและเพศไม่มีความแตกต่างต่อพฤติกรรมในการแก้ปัญหา

ฮอลย์ (Hall, 1997 : 6324-A) ได้วิจัยเรื่อง การศึกษาผลการสอนการวิเคราะห์การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์และความสามารถในการวิเคราะห์ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนเกรด 5 จำนวน 60 คน ซึ่งแบ่งเป็นกลุ่มควบคุมและกลุ่มทดลอง กลุ่มละ 30 คน แต่ละกลุ่มประกอบด้วยนักเรียนที่คาตะเนเก่งและไม่เก่ง กลุ่มละ 15 คน กลุ่มทดลองนี้ได้เรียนเกี่ยวกับการวิเคราะห์เป็นเวลา 8.5 ชั่วโมง แล้วทดสอบการวิเคราะห์และความสามารถในการแก้ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า

- 1) นักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์สูง มีความสามารถในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่มีความสามารถในการวิเคราะห์ต่ำ
- 2) นักเรียนที่ได้รับการสอนการวิเคราะห์ มีความสามารถในการแก้ปัญหาโจทย์คณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ไม่ได้เรียนการวิเคราะห์

เบย์ (Bay, 2000) ได้สรุปงานวิจัยเกี่ยวกับการสอนที่ใช้วิธีการแก้ปัญหา คณิตศาสตร์ในบทความเรื่อง “ Linking Problem Solving to Student Achievement in Mathematics : Issues & Outcomes” ว่ามีผลต่อการพัฒนาด้านทักษะ/กระบวนการและมโนคติทาง คณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนเกรด 3 ที่เรียนโดยวิธีการแก้ปัญหาจะมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีกว่า ที่เรียนแบบอื่น ส่วนการศึกษานักเรียนเกรด 5 และ เกรด 7 พบว่านักเรียนที่เรียนด้วยการเน้น กระบวนการแก้ปัญหามีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนดีกว่านักเรียนในกลุ่มอื่น

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้การแก้ปัญหา ทางคณิตศาสตร์สรุปได้ว่าการแก้ปัญหาวงคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการที่สามารถส่งเสริมให้ นักเรียนได้พัฒนาทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ด้านความสามารถในการแก้ปัญหาให้เกิด ขึ้นกับนักเรียน ได้เป็นอย่างดี ซึ่งจะส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนในการเรียนวิชา คณิตศาสตร์สูงขึ้นได้

บทที่ 3

วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัสที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร ครั้งนี้ผู้วิจัยมีวิธีดำเนินการวิจัยดังนี้

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การวิเคราะห์ข้อมูล

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

ประชากร คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร จำนวน 2 ห้องเรียน มีนักเรียน 50 คน จัดชั้นเรียนแบบคละความสามารถ

กลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 20 คน ได้มาโดยการสุ่มแบบกลุ่ม

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ประกอบด้วย

2.1 แผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีแก้ปัญหา สำหรับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 4 แผน ผู้วิจัยได้ดำเนินการตามขั้นตอนดังนี้

2.1.1 ศึกษาหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ของกรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ คู่มือครูสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์ เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และ

เทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้พื้นฐาน คณิตศาสตร์เล่ม 2 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544 ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ คู่มือวัดผลประเมินผล คณิตศาสตร์ของสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ

2.1.2 วิเคราะห์หลักสูตร เนื้อหาสาระ มาตรฐานการเรียนรู้และผลการเรียนรู้ที่คาดหวังของนักเรียนในช่วงชั้นที่ 3 (ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 – 3) รวมทั้งกรอบแนวคิด ขอบเขตของกลุ่มสาระการเรียนรู้มาใช้เป็นกรอบในการทำแผนการจัดการเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยใช้วิธีการสอนแบบแก้ปัญหา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

2.1.3 ศึกษารายละเอียดเกี่ยวกับหลักการ แนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับกระบวนการและขั้นตอนในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้นำรูปแบบกระบวนการและขั้นตอนในการสอนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของรองศาสตราจารย์ อุษาวดี จันทรสนธิ ที่ได้กล่าวถึงกระบวนการสอนคณิตศาสตร์ที่ใช้การเรียนรู้แบบแก้ปัญหา มาใช้เป็นกรอบความคิดในการพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญหา

2.1.4 วิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้จากผลการเรียนรู้ที่คาดหวังรายปี/รายภาค เพื่อกำหนดโครงสร้างของแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้

- 1) แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และทฤษฎีบทพีทาโกรัส จำนวน 2 ชั่วโมง
- 2) แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2 การประยุกต์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ไปใช้ในการแก้ปัญหา จำนวน 2 ชั่วโมง
- 3) แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส จำนวน 2 ชั่วโมง
- 4) แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4 การประยุกต์บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ไปใช้ในการแก้ปัญหา จำนวน 2 ชั่วโมง

2.1.5 คำเนิการสร้างแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 จำนวน 4 แผน รวม 8 ชั่วโมง โดยแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้มีองค์ประกอบดังนี้

- 1) สาระสำคัญ
- 2) จุดประสงค์การเรียนรู้

- 3) สารการเรียนรู้
- 4) จุดประสงค์การเรียนรู้รายคาบ
- 5) กิจกรรมการเรียนการสอนรายคาบ
- 6) ชั้นสรุป
- 7) สื่อการเรียนการสอน
- 8) การวัดและประเมินผล

2.1.6 นำแผนการจัดการเรียนรู้ เสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษา เพื่อตรวจสอบความถูกต้องและความเหมาะสมของเนื้อหา เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไข

2.1.7 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่จัดทำเรียบร้อยแล้วเสนอผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน(รายละเอียดแสดงผลไว้ในภาคผนวก ก) เพื่อตรวจสอบความถูกต้อง และความเหมาะสมของเนื้อหา แล้วนำผลจากการตรวจสอบของผู้เชี่ยวชาญมาปรับปรุงแก้ไข

2.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ผู้วิจัยดำเนินการ ดังนี้

2.2.1 ศึกษาวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

2.2.2 วิเคราะห์เนื้อหาสาระการเรียนรู้และ จุดประสงค์การเรียนรู้เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

2.2.3 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องทฤษฎีพีทาโกรัส ซึ่งเป็นแบบทดสอบแบบกลุ่มงาน แบบเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 2 ฉบับๆละ 30 ข้อ

2.2.4 นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาตรวจสอบความถูกต้องและความเหมาะสมของเนื้อหา

2.2.5 ปรับปรุงแก้ไขแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนตามข้อเสนอแนะของอาจารย์ที่ปรึกษา และนำแบบทดสอบให้ผู้เชี่ยวชาญ ตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหา โดยการหาค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบแต่ละข้อ กับจุดประสงค์ (Index of Item -Objective Congruence: IOC) โดยใช้เกณฑ์ประเมิน ดังนี้

1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อสอบวัดตรงจุดประสงค์และระดับพฤติกรรม

0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อสอบวัดตรงจุดประสงค์และระดับพฤติกรรม

1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อสอบวัดไม่ตรงจุดประสงค์และระดับพฤติกรรม

2.2.6 นำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั้ง 2 ฉบับ ที่ได้รับการตรวจจากผู้เชี่ยวชาญคำนวณค่า IOC พบว่า ค่า IOC ของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั้ง 2 ฉบับมีค่าอยู่ระหว่าง 0.86- 0.90

2.2.7 ผู้วิจัยนำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั้ง 2 ฉบับ ไปทดลองใช้กับนักเรียนที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 30 คน เพื่อหาค่าความยาก ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเที่ยง โดยใช้สูตรคูคอร์ต ริชาร์ดสันที่ 20 (KR-20) พบว่า แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียนมีค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.46 - 0.63 ค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.42 - 0.58 และมีค่าความเที่ยง 0.86 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนมีค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.50 - 0.67 ค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.25 - 0.58 และมีค่าความเที่ยง 0.86

2.2.8 จัดทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั้ง 2 ฉบับ ให้เป็นฉบับสมบูรณ์ เพื่อนำไปใช้เป็นแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

ในการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยใช้วิธีการสอนแบบแก้ปัญหา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผู้วิจัยได้ดำเนินการดังนี้

3.1 ทดสอบความรู้ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เป็นเวลา 1 ชั่วโมง แล้วบันทึกผลการสอบเป็นคะแนนก่อนเรียน

3.2 สอนนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ตามแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งผู้วิจัยได้จัดทำขึ้นจำนวน 4 แผน เป็นเวลา 8 ชั่วโมง โดยจัดการเรียนการสอนวันละ 1 ชั่วโมง เป็นเวลา 8 วัน

3.3 ทดสอบวัดความรู้ของนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เป็นเวลา 1 ชั่วโมง และบันทึกผลการสอบเป็นคะแนนหลังเรียน

3.4 นำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ โดยใช้วิธีการทางสถิติ เพื่อทดสอบสมมติฐานการวิจัย

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียน โดยใช้การทดสอบค่าที (t – test dependent)

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลในการศึกษาในครั้งนี้ ผู้วิจัยได้เสนอผลการทดลองการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ปีการศึกษา 2552 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ อำเภอบางมูลนาก จังหวัดพิจิตร จำนวน 20 คน ได้ผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

ตารางที่ 4.1 ผลการหาค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และร้อยละ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ระหว่างก่อนเรียนกับหลังเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญห

กลุ่ม	n	คะแนนเต็ม	\bar{X}	S	ร้อยละ	คะแนน	
						เฉลี่ย	ร้อยละ
ก่อนเรียน	20	30	14.70	2.08	49.00	8.55	28.50
หลังเรียน	20	30	23.25	1.62	77.50		

จากตารางที่ 4.1 จะเห็นว่าคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเฉลี่ยก่อนเรียนเรื่อง ทฤษฎีบท พีทาโกรัส โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญห ได้เท่ากับ 14.70 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 49.00 และคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเฉลี่ยหลังเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญห ได้ เท่ากับ 23.25 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 77.50 มีคะแนนเฉลี่ยเพิ่มขึ้น 8.55 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 28.50 ของคะแนนเต็ม 30 คะแนน

ตารางที่ 4.2 การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างก่อนเรียนกับหลังเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญา

กลุ่ม	n	คะแนน เต็ม	\bar{X}	S.D	\bar{d}	S_d	t
ก่อนเรียน	20	30	14.70	2.08			
หลังเรียน	20	30	23.25	1.62	8.55	1.91	19.51*

*p < .05

จากตารางที่ 4.2 จะเห็นว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัสโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญา สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

บทที่ 5

สรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่องผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีการแก้ปัญหา เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร ผู้วิจัยขอกล่าวถึงสรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะดังนี้

1. สรุปการวิจัย

1.1 วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างก่อนและหลังเรียน โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีการแก้ปัญหา เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

1.2 สมมติฐานการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียน โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีการแก้ปัญหา เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน

1.3 วิธีการดำเนินการวิจัย

1.3.1 กลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ จังหวัดพิจิตร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 20 คน ได้มาโดยการสุ่มแบบกลุ่ม

1.3.2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้ วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องทฤษฎีบทพีทาโกรัส

1.3.3 การเก็บรวบรวมข้อมูล

1) ทดสอบความรู้ของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างด้วยแบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เป็นเวลา 1 ชั่วโมง แล้วบันทึกผลการสอบเป็นคะแนนก่อนเรียน

2) สอนนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชา

คณิตศาสตร์ เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ตามแผนการจัดการเรียนรู้ ซึ่งผู้ศึกษาวิจัยได้จัดทำขึ้น จำนวน 4 แผน เป็นเวลา 8 ชั่วโมง โดยจัดการเรียนการสอนวันละ 1 ชั่วโมง เป็นเวลา 8 วัน

3) ทดสอบวัดความรู้ของนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้แบบทดสอบ วัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส เป็นเวลา 1 ชั่วโมง และบันทึกผล การสอบเป็นคะแนนหลังเรียน

1.3.4 การวิเคราะห์ข้อมูล

เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียนและหลังเรียนของนักเรียน โดยใช้การทดสอบค่าที (t – test dependent)

1.3.5 ผลการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยการจัด กิจกรรมการเรียนรู้โดยวิธีแก้ปัญหา สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. อภิปรายผล

จากการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียน เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีแก้ปัญหาหลังเรียนสูงกว่าก่อน เรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ทั้งนี้อาจเป็นผลมาจากปัจจัยหลายประการดังนี้ ประการ แรกการที่ผู้วิจัยกำหนดกิจกรรมการเรียนรู้อย่างเป็นขั้นตอน โดยกระบวนการและขั้นตอนของการ แก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ที่ผู้วิจัยนำมาใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน มีผลทำให้นักเรียนมี ความรู้ และความเข้าใจ เกี่ยวกับทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ดีขึ้น โดยกระบวนการและ ขั้นตอนที่ผู้วิจัยนำมาใช้เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้นั้น ประกอบด้วย 4 ขั้นตอนดังนี้ ขั้นตอนที่หนึ่ง คือ ขั้นนำเข้าสู่เรื่องที่สอน ขั้นที่สอง คือ ขั้นดำเนินการกิจกรรมการแก้ปัญหา ขั้น ที่สาม คือ ขั้นสรุปความรู้ และขั้นที่สี่ คือ ขั้นมอบหมายงานให้ศึกษาโดยอิสระ ซึ่งสอดคล้องกับ กระบวนการและขั้นตอนของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของ อุซาวดี จันทรสุนธิ (ม.ป.ป.: 3-23 - 3-26) ที่ได้เสนอกระบวนการสอนคณิตศาสตร์ที่ใช้การเรียนรู้แบบแก้ปัญหาไว้ ดังนี้ 1) ขั้น นำเข้าสู่เรื่องที่สอน เป้าหมายของขั้นนี้เพื่อสร้างแรงจูงใจผู้เรียนทั้งชั้นให้เกิดความสนใจ ความ ใฝ่รู้ และความต้องการเรียนรู้หัวข้อคณิตศาสตร์ในชั่วโมงนั้น โดยมุ่งมั่นที่เรียนรู้ให้สำเร็จผล ขั้น นำจึงเป็นขั้นที่สำคัญที่สุด ครูคณิตศาสตร์จึงควรกำหนดปัญหาคณิตศาสตร์ในขั้นนำเข้าสู่เรื่องที่ จะสอนให้เป็นปัญหาที่น่าสนใจ ทำทนายให้ผู้เรียนอยากค้นคว้าหาความรู้ 2) ขั้นดำเนินการกิจกรรม แก้ปัญหา เป้าหมายของขั้นตอนนี้เพื่อให้ผู้เรียนเกิดความคิดรวบยอดเรื่องใหม่ที่ไม่เคยเรียนมาก่อน

หรือเกิดความคิดกระ้างในความคิดรวบยอดที่เคยเรียนมาแล้ว หรือเพื่อฝึกทักษะหรือนำความคิดรวบยอดที่รู้แล้วไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ หรือเพื่อทบทวนความคิดรวบยอดที่สำคัญ ๆ ให้แม่นยำขึ้น ขั้นนี้เปรียบเสมือนขั้นตอนการสอนโดยผ่านปัญหาและกระบวนการแก้ปัญหา 3) ขั้นสรุปความรู้เป็นขั้นที่สรุปความรู้โดยทบทวนประเด็นที่สำคัญ และการแสดงความเชื่อมโยงระหว่างประเด็นที่สำคัญเหล่านั้นเข้าด้วยกันจนเห็นความรู้เป็นองค์รวมครูอาจตั้งคำถามให้ผู้เรียนตอบประกอบการสรุปก็ได้ 4) ขั้นมอบหมายงานให้ศึกษาโดยอิสระ โดยงานที่มอบให้อาจเป็นงานคณิตศาสตร์ที่เป็นการฝึกทักษะหรือใช้ความคิดรวบยอดที่สอนในชั่วโมงนั้น หรืออาจเป็นงานการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์ประจำหน่วยการเรียนรู้ หรือแต่ละสัปดาห์ให้นักเรียนได้ศึกษาหรือค้นคว้าอย่างเป็นอิสระช่วยให้เกิดการต่อยอดความรู้และทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ให้กับผู้เรียน

ประการที่สอง การที่ผู้วิจัยนำปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับเนื้อหาวิชาและสถานการณ์ปัญหาที่เกิดขึ้นจริงหรือเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวันของนักเรียน โดยเลือกปัญหาที่ตรงกับความสนใจ และใกล้ตัวนักเรียนมาใช้ในการจัดกิจกรรม ทำให้นักเรียนตระหนักถึงความสำคัญของการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยลักษณะของปัญหาทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยนำมาใช้สอดคล้องกับปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 62) ได้กล่าวถึงประเภทของปัญหาไว้ดังนี้ 1) ปัญหาปกติ (Routine problem) เป็นปัญหาที่พบในหนังสือเรียนหรือหนังสือทั่วไป โดยผู้แก้ปัญหามีความคุ้นเคยในโครงสร้างและวิธีแก้ปัญหา 2) ปัญหาไม่ปกติ (Non - Routine problem) เป็นปัญหาที่เน้นกระบวนการคิดและปริศนาต่าง ๆ โดยผู้แก้ปัญหามองต้องประมวลความรู้ความสามารถหลายอย่างเข้าด้วยกัน

ประการที่สาม อาจเป็นผลมาจากการที่ผู้วิจัยมีการจัดกิจกรรมโดยแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ให้อิสระแก่นักเรียนในการปฏิบัติกิจกรรม เพื่อวางแผนการแก้ปัญหาร่วมกันภายในกลุ่ม ในระหว่างการปฏิบัติกิจกรรมผู้วิจัยกระตุ้นให้นักเรียนแสวงหาทางเลือกในการแก้ปัญหาที่หลากหลายและเหมาะสม ติดตามการปฏิบัติงานของนักเรียนและให้คำแนะนำอย่างใกล้ชิด พร้อมกับสร้างบรรยากาศในห้องเรียนเพื่อให้นักเรียนกล้าแสดงออกด้านความคิดเห็นและแสดงออกด้านการกระทำที่เหมาะสม และได้ให้เวลากับนักเรียนมากพอสมควรในการปฏิบัติกิจกรรมแต่ละกิจกรรม ซึ่งการจัดสภาพแวดล้อมดังกล่าวเป็นแนวทางการส่งเสริมการแก้ปัญหา ดังที่ สมเดช บุญประจักษ์ (2540 : 28) ได้กล่าวว่า การจัดบรรยากาศในห้องเรียนส่งผลต่อความสามารถแก้ปัญหา โดยจะต้องเป็นบรรยากาศที่นักเรียนรู้สึกสะดวกสบายในการแสดงความคิดเห็น ไม่เข้มงวดเอาจริงเอาจังจนเกิดความตึงเครียด เพราะถ้านักเรียนเกิดความรู้สึกลัวในสิ่งที่ทำผิดพลาดหรือถูกหัวเราะเยาะจากเพื่อน ๆ ก็จะไม่กล้าแสดงออกหรือออกความคิดเห็นในเรื่องต่าง ๆ ดังนั้นครูต้องให้นักเรียนมีอิสระครูหรือนักเรียนคนอื่น ๆ จะต้องยอมรับวิธีการที่นักเรียนคนใดคนหนึ่งนำเสนอแล้ว

จึงช่วยกันหาข้อผิดพลาดหรือยอมรับในสิ่งที่ผิดพลาดอย่างมีหลักเกณฑ์ ในด้านเวลาจะต้องจัดให้พอสมควรเพราะแต่ละคนใช้เวลาในการแก้ปัญหาที่แตกต่างกันเนื่องจากนักเรียนมีความสามารถแตกต่างกัน สอดคล้องกับแนวทางการส่งเสริมการแก้ปัญหาของ ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 35-36) ที่กล่าวว่า สิ่งที่จะช่วยส่งเสริมการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ นั้นมีหลายประการ ประกอบด้วย

1) การให้นักเรียนแต่ละคนได้มีโอกาสแสดงแนวคิด วิธีการของตนเองได้อย่างอิสระและทั่วถึงภายในกลุ่มโดยให้มีการยืดหยุ่นด้านเวลาซึ่งจะทำให้แต่ละคนกล้าเสี่ยงที่จะเสนอแนวความคิดของตนเองโดยไม่กลัวผิด ไม่เฉพาะแนวคิดของนักเรียนเก่งเท่านั้นแต่จะต้องช่วยกันตรวจสอบว่าแนวคิดใดเหมาะสมที่สุด โดยให้มีการอ้างเหตุผลประกอบ แล้วนำแนวคิดหรือวิธีการจากแต่ละคนมาเปรียบเทียบกันแล้วช่วยกันตรวจสอบเพื่อนำไปสู่ยุทธวิธีที่ดีที่สุด ซึ่งจะช่วยให้ทุกคนได้เรียนรู้แนวคิดหรือวิธีการจากคนอื่น นอกจากนั้นยังเป็นการฝึกให้นักเรียนมีเหตุผลรู้จักรับฟังเหตุผลของคนอื่น ๆ ด้วย 2) กิจกรรมจะช่วยให้นักเรียนได้แนวคิดในการแก้ปัญหาที่หลากหลาย ซึ่งอาจได้แนวคิดจากกลุ่มย่อยและเมื่อแต่ละกลุ่มนำเสนอต่อหน้าชั้นก็จะทำให้ได้แนวคิดมากขึ้น ซึ่งแตกต่างจากการแก้ปัญหาโดยคนคนเดียวจะทำให้ได้แนวคิดน้อยกว่า เนื่องจากสภาพปัญหาในปัจจุบันและอนาคตต้องใช้แนวคิดจากหลายคนหลายกลุ่มจึงจะสามารถแก้ปัญหาให้สำเร็จได้ 3) ขณะที่นักเรียนร่วมกันแก้ปัญหาในกลุ่มย่อยนั้น ครูควรมีบทบาทเป็นผู้อำนวยความสะดวกให้คำแนะนำเท่าที่จำเป็นหรือมีการใช้คำถามกระตุ้นเพื่อให้เกิดการคิด ไม่ควรใช้วิธีบอกให้กระทำตาม รวมทั้งเสนอแนะวิธีการทำงานกลุ่มให้มีประสิทธิภาพ แม้กิจกรรมกลุ่มจะมีบทบาทต่อการแก้ปัญหาค่อนข้างมากแต่กิจกรรมรายบุคคลก็ไม่ควรละเลย เพราะจะช่วยส่งเสริมความสามารถในการแก้ปัญหาให้กับนักเรียนที่มีความสามารถพิเศษทางคณิตศาสตร์อีกด้วย

จากแนวทางการส่งเสริมการแก้ปัญหาดังกล่าวทำให้นักเรียนสามารถใช้รูปแบบหรือยุทธวิธีที่หลากหลายมาใช้ในการคิดแก้ปัญหาซึ่งได้แก่ การเขียนแผนผัง การเขียนภาพประกอบ การสร้างตาราง จากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ โดยรูปแบบหรือยุทธวิธีที่นักเรียนนำมาใช้นั้น นักเรียนสามารถดำเนินการแก้โจทย์ปัญหาและหาคำตอบได้ถูกต้อง ดังที่ปรีชา เนาว์เย็นผล (2544: 45) กล่าวว่า ในการฝึกให้นักเรียนแก้ปัญหานั้นควรให้นักเรียนได้แก้ปัญหาคด้วยวิธีการหลาย ๆ วิธีซึ่งอาจแตกต่างไปจากครูดคิดเอาไว้ ยุทธวิธีต่าง ๆ อาจมีความเหมาะสมหรือไม่เหมาะสม ต้องมีการพิจารณาอย่างมีเหตุผล และต้องมีการสรุปให้ทราบว่า ถ้าไม่เหมาะสมเป็นเพราะเหตุใดด้วย ในการสอนยุทธวิธีในการแก้ปัญหานั้นไม่ควรนำเสนอโดยชี้แจงว่า วิธีการของครูดดีกว่าวิธีการของนักเรียน แต่ควรชี้ให้เห็นถึงข้อดีและใช้เป็นอีกทางเลือกหนึ่งของการแก้ปัญหานั้น ซึ่งจะสอดคล้องกับปัญหาในชีวิตจริงซึ่งต้องแก้ปัญหาโดยใช้ยุทธวิธีอย่างหลากหลายจึงจะแก้ปัญหานั้นได้ ในการแก้ปัญหานั้นก็ขึ้นอยู่กับความรู้ ประสบการณ์ และมุมมองของแต่ละบุคคล การส่งเสริมให้นักเรียน

ได้เรียนรู้ยุทธวิธีต่าง ๆ อย่างหลากหลายจะช่วยให้นักเรียนสามารถเลือกใช้ยุทธวิธีที่ตนเองถนัด ทำให้สามารถแสดงศักยภาพในการแก้ปัญหาได้อย่างเต็มที่และนำไปสู่ความสำเร็จได้ การสนับสนุนให้นักเรียนได้ฝึกแก้ปัญหาด้วยวิธีการที่หลากหลายจะมีประโยชน์มากกว่าการแก้ปัญหาหลาย ๆ ปัญหาแต่ใช้ยุทธวิธีเดียว สอดคล้องกับอุยวาคี จันทรสนธิ (ม.ป.ป.: 1-16) ที่ได้เสนอยุทธวิธีในการแก้ปัญหาไว้หลายประการ ดังนี้ 1) การคาดเดาและการตรวจสอบ การเดาและการตรวจสอบเหมาะกับปัญหาที่จำนวนคำตอบจำกัด การเดาและการตรวจสอบโดยใช้วิธีคิดอย่างเป็นระบบทำให้ตัดทางเลือกที่ไม่เกี่ยวข้องทิ้งไปได้ 2) การเขียนภาพ ใช้ได้ดีกับปัญหาที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิตหรือการวัด 3) การใช้ตัวแปร เหมาะกับปัญหาซึ่งมีปริมาณที่ไม่ทราบค่าสัมพันธ์กับปริมาณที่รู้ค่าและมุ่งหมายหาคำตอบที่เป็นกรณีทั่วไป 4) การค้นหาแบบรูป เป็นการค้นหาแบบรูปที่เกี่ยวข้องกับการคิดหาเหตุผลแบบอุปนัยจากการศึกษาตัวอย่างชุดหนึ่ง 5) การแจกแจงและการแปลงปัญหาให้ซับซ้อนน้อยลง ยุทธวิธีแปลงปัญหาให้ซับซ้อนน้อยลง มักถูกใช้กับยุทธวิธีอื่น ๆ โดยเฉพาะอย่างยิ่งการใช้ร่วมกับการค้นหาแบบรูป

จากปัจจัยดังกล่าวข้างต้นจึงทำให้นักเรียนได้รับการประสบการณ์ในศีกวิธีแก้ปัญหาอย่างมีเหตุผล ฝึกการคิดวิเคราะห์และการตัดสินใจ ฝึกการค้นคว้าหาข้อมูลจากแหล่งความรู้ต่างๆ ฝึกการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มและฝึกความรับผิดชอบในงานที่ได้รับมอบหมาย ทำให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา เกิดทักษะกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นคุณลักษณะที่สำคัญและต้องการให้เกิดขึ้นกับนักเรียน จึงทำให้นักเรียนสามารถแก้ปัญหาได้ดี เมื่อนักเรียนต้องเผชิญกับปัญหาทางคณิตศาสตร์ทั้งในด้านการเรียนและชีวิตประจำวัน จึงส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงขึ้น สอดคล้องกับงานวิจัยของ ราฟิง นิรารมย์ (2546) ที่ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหา เรื่องการประยุกต์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนเพชรพิทยาคม จังหวัดเพชรบูรณ์ ผลการวิจัยพบว่า ความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนด้วยกิจกรรมการเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหา เรื่องการประยุกต์ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญ .05 สอดคล้องกับงานการวิจัยของ ชาญวิทย์ กรวยทอง (2547: 89) ที่พัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหา เรื่อง จำนวนและการบวก การลบ การคูณ การหารชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 พบว่านักเรียนมีทักษะการแก้โจทย์ปัญหาหลังเรียนเพิ่มขึ้นจากก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 สอดคล้องกับงานวิจัยของ จันตรา ศิลปราชะ (2551) ที่ได้พัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้นที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 และเพื่อศึกษากระบวนการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้นที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

โรงเรียนชุมชนบ้านไร่สีสุก สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาอำนาจเจริญ ผลการวิจัยพบว่าการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังจากใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ที่ครอบคลุมเนื้อหาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 เรื่อง ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับจำนวนจริง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส และการประยุกต์ของสมการเชิงเส้นตัวแปรเดียวแล้ว นักเรียนจำนวนร้อยละ 76.92 ของนักเรียนทั้งหมด (จำนวน 20 คน) มีทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ตั้งแต่ร้อยละ 65 ขึ้นไป

3. ข้อเสนอแนะ

3.1 ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

3.1.1 การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้วิธีการสอนแบบแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น ก่อนลงมือปฏิบัติกิจกรรมผู้สอนควรแนะนำให้ผู้เรียนมีความรู้และความเข้าใจเกี่ยวกับขั้นตอนและกระบวนการที่ใช้ในการแก้ปัญหา

3.1.2 ในระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้วิธีการสอนแบบแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์นั้น ผู้สอนควรเน้นให้นักเรียนเห็นความสำคัญของกระบวนการแก้ปัญหาไปเพื่อนำไปใช้แก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ ได้โดย ผู้สอนอาจยกตัวอย่างปัญหาที่อยู่รอบๆ ตัวผู้เรียนพร้อมกับเพื่อให้ผู้เรียนสามารถมองปัญหาให้เป็นรูปธรรมมาประกอบการสอน แล้วจึงเพิ่มลักษณะของปัญหาที่เป็นนามธรรมหรือตัวเลขต่อไป

3.1.3 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้วิธีการสอนแบบแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ มุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้พัฒนาแนวคิดและทักษะการแก้ปัญหา ดังนั้นครูผู้สอนจึงควรจัดกิจกรรมที่หลากหลาย และเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้แสดงวิธีคิดแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย เพื่อให้นักเรียนได้มีแนวคิดในการแก้ปัญหาย่างกว้างขวางและหลากหลายมากยิ่งขึ้น

3.2 ข้อเสนอแนะในการศึกษาครั้งต่อไป

3.2.1 ควรมีการศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ที่สอน โดยใช้วิธีการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ในเนื้อหาอื่น ๆ

3.2.2 ควรมีการวิจัยเพื่อศึกษาความคงทนและความพึงพอใจของผู้เรียนที่มีต่อการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้แก้ปัญหา

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

- กรมวิชาการ (2541) เอกสารเสริมความรู้คณิตศาสตร์ระดับประถมศึกษา เรื่อง การแก้ปัญหาเชิงสร้างสรรค์ กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์
- จันทร์หา ศิลปะระยยะ (2542) “การปฏิบัติการพัฒนาทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยใช้กิจกรรมการเรียนรู้ที่เน้นกระบวนการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนชุมชนบ้านไร่สีสุก สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามหาสารคาม” วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิจัยและประเมินผล บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานี
- ชัยยุทธ บุญธรรม (2549) “การพัฒนาชุดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ที่เน้นทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์โดยการสอนแบบค้นพบ เรื่อง สมการเชิงเส้นตัวแปรเดียว ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1” วิทยานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชากรมมัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
- ชาญวิทย์ กรวยทอง (2547) “การพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการฝึกทักษะการแก้โจทย์ปัญหา เรื่อง จำนวนและการบวก การลบ การคูณ การหารชั้นประถมศึกษาปีที่ 6” การศึกษาค้นคว้าอิสระ ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยมหาสารคาม
- บุญพา อร่ามโชติ (2549) “การปฏิบัติการพัฒนาคุณภาพการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ เรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 3” วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาวิจัยและประเมินผลการศึกษา มหาวิทยาลัยราชภัฏอุบลราชธานี
- ปรีชา เนาว์เย็นผล (2537) “การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์” ใน *ประมวลสาระชุดวิชาสารัตถะและวิทยาวิธีทางคณิตศาสตร์* หน้าที่ 12 หน้า 1-110 นนทบุรี มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช บัณฑิตศึกษา สาขาวิชาศึกษาศาสตร์
- _____ (2544) “กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1” วิทยานิพนธ์การศึกษาคณะศึกษาศาสตร์ สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
- ร่ำฝิ่ง นิรามย์ (2546) “การพัฒนากิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหา เรื่อง การประยุกต์ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนเพชรพิทยาคม จังหวัดเพชรบูรณ์” วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต แขนงวิชาหลักสูตรและการสอน สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

- วิไลภรณ์ คำภีระปาวงศ์ (2540) “การพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนที่เน้นทักษะการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ในรายวิชาคณิตศาสตร์ ค 203 ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนแม่ทะประชาสามัคคีจังหวัดลำปาง” วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต แขนงวิชาหลักสูตรและการสอน สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ (2544) *คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์* กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์องค์การรับส่งสินค้าและพัสดุภัณฑ์
- _____ (2545) *คู่มือการจัดการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์* พิมพ์ครั้งที่ 3 กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว
- สมเดช บุญประจักษ์ (2540) “การพัฒนาศักยภาพทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยใช้การเรียนแบบร่วมมือ” วิทยานิพนธ์การศึกษาคณะศึกษาศาสตร์ สาขาคณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
- สิริพร ทิพย์คง (2544) “การแก้ปัญหาคณิตศาสตร์”. กรุงเทพมหานคร ศูนย์พัฒนาหนังสือ กระทรวงศึกษาธิการ
- สุนิสา พงษ์ประยูร (2543) “การศึกษาข้อบกพร่องในการแก้ปัญหาคณิตศาสตร์เรื่องสมการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2” สารนิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ
- สุรเชษฐ์ บุญรักษ์ (2550) “การพัฒนาชุดกิจกรรม เรื่อง การแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ โดยใช้เรื่องคำนวณเชิงกราฟ สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี ชั้นปีที่ 1 สาขาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์” วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยราชภัฏอุดรดิตถ์
- สุริเยศ สุขแสวง (2548) “ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิคการตั้งปัญหาที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความคิดสร้างสรรค์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จังหวัดสุรินทร์” วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการศึกษาคณิตศาสตร์ ภาควิชาหลักสูตร การสอนและเทคโนโลยีการศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย
- สำนักวิชาการและมาตรฐานการศึกษา กระทรวงศึกษาธิการ (2552) *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์* กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย

อรชร อนุญติม (2550) “การศึกษาความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์เรื่อง โจทย์สมการของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โดยการใช้ตัวแทน (Representation)” สารนิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

อุษาวดี จันทรสนธิ (ม.ม.ป.) *ประมวลสาระชุดฝึกอบรมทางไกล การพัฒนาสมรรถภาพครูคณิตศาสตร์* นนทบุรี มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช สาขาวิชาศึกษาศาสตร์

Bay J. (2000). *Linking Problem Solving to Student Achievement in Mathematics*. Issues and Outcomes. Retrieved May 8, 2010, from <http://www.ncacasi.org/jsi>.

Bitter Gary G., Hatfield Mary M. and Edwards Noney T. (1989). *Mathematics Method for the Elementary and Middle School A Comprehensive Approach*. Boston : Allyn and Bacon.

Hall William Dudley. (1997). *A Study of the Relationships Between Estimation and Mathematical Problem Solving Among Fifth Grade Student*. Dissertation Abstracts International Part A. 37(4): 6324 –A April.

Hart Lynn C. (1993). Some Factors That Impede or Enhance Performance in Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*. 24(12) March.

Hedden Jame W. and Speer William R. (2005). *Problem Solving Decision Making and Communication In Mathematic*. Retrieved September 14, 2010, from <http://www.Jiosseybass>.

Kennedy, L. M. (1984). *Guiding Children's Learning of Mathematic*. 4th ed. Belmont, California : Wadsworth Pubishing.

Reys Robert E. Marilyn N. and Lindquist Mary Montgomery. (1992). *Helping Children Learn Mathematical*. Boston: Allyn and Bacon.

Thiessen Diane and Others. (1989). *Elementary Mathematical Method*. New York: Macmillan.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก
รายนามผู้เชี่ยวชาญ

รายนามผู้เชี่ยวชาญ

1. นางสมจิตร เขม้นกิจ ตำแหน่งครู อันดับ ค.ศ. 3 วิทยฐานะชำนาญการพิเศษ
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนบางมูลนากภูมิวิทยาคม
จังหวัดพิจิตร
2. นางพุลศรี ยุราวรรณ ตำแหน่งครู อันดับ ค.ศ. 2 วิทยฐานะชำนาญการ
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนบางมูลนากภูมิวิทยาคม
จังหวัดพิจิตร
3. นางสิทธิณี อินทรา ตำแหน่งครู อันดับ ค.ศ. 2 วิทยฐานะชำนาญการ
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โรงเรียนบางมูลนากภูมิวิทยาคม
จังหวัดพิจิตร

ภาคผนวก ข
แผนการจัดการเรียนรู้
เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
เรื่อง สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

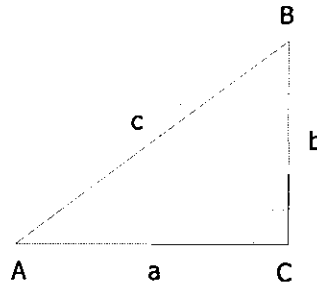
ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2
จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉาก เรียกว่าด้านตรงข้ามมุมฉากซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุด ในรูปสามเหลี่ยมอีกสองด้าน เรียกว่า ด้านประกอบมุมฉาก

ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี $\angle C$ เป็นมุมฉาก



เรียก \overline{AB} ว่า ด้านตรงข้ามมุมฉาก

และให้ c แทน ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

เรียก \overline{AC} และ \overline{BC} ว่า ด้านประกอบมุมฉาก

และให้ a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

ให้สังเกตว่า ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด

เมื่อพิจารณาจากรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จะได้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

หรือ

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งเป็นไปตามสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กล่าวว่า

**สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก
เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก**

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. เขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากได้
2. นำความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

สาระการเรียนรู้

สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ตอนที่ 1 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จุดประสงค์

นักเรียนสามารถเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับคุณสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ว่ารูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีส่วนประกอบต่างๆ อย่างไรบ้าง แล้วให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรม ดังนี้
 - 1.1 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4-6 คน
 - 1.2 แจกกระดาษ ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม แล้วให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ขนาดเท่าที่ต้องการ โดยกำหนดให้ด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้านมีความยาวเท่ากัน
 - 1.3 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
 - 1.4 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม ลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉากทั้งสองด้านรูปละ 1 เส้น และให้นักเรียนลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก จำนวน 2 เส้น
 - 1.5 ครูให้นักเรียนตัดกระดาษตามรอยเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉากออกเป็นส่วนๆ
 - 1.6 ครูให้นักเรียนนำชิ้นส่วนที่ได้จากการตัดตามรอยเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉากมาเรียงกันบนรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านตรงข้ามมุมฉาก

1.7 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอและอธิบายสิ่งที่นักเรียนพบจากการปฏิบัติกิจกรรมเพื่อนำไปสู่การค้นหาสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.10 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปจากการปฏิบัติกิจกรรม พร้อมทั้งแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น

คาบที่ 2 สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก (ต่อ)

จุดประสงค์ นักเรียนสามารถนำความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากไปใช้ในการแก้ปัญหาได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ครูสนทนากับนักเรียนเกี่ยวกับรูปร่าง โครงสร้างหรือรูปทรงต่างๆ ที่อยู่รอบตัวของนักเรียน ทั้งภายในห้องเรียนหรือภายนอกห้องเรียน โดยครูยกตัวอย่างสถานการณ์จริงที่อยู่รอบๆ ตัวของนักเรียน เช่น กระดานไวท์บอร์ด 1 แผ่น มีความสัมพันธ์ของความกว้าง ความยาว และเส้นทแยงมุมอย่างไร เพื่อนำไปสู่การค้นหาสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยครูใช้คำถามดังนี้

ตัวอย่างคำถาม

- ให้นักเรียนสังเกตสิ่งต่างๆ ที่อยู่รอบตัวของนักเรียนว่ามีสิ่งใดบ้างที่มองแล้วมีลักษณะเป็นรูปเรขาคณิต เช่น รูปสี่เหลี่ยม รูปสามเหลี่ยม

ครูใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนหาคำตอบ ซึ่งคำตอบที่ได้มีหลากหลาย และได้เสนอแนวทางในการหาคำตอบ โดยการใช้ความรู้ เรื่อง สมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งสมบัติของสามเหลี่ยมมุมฉาก คือ รูปสามเหลี่ยมที่มีมุมมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก ด้านที่อยู่ตรงข้ามกับมุมฉาก เรียกว่าด้านตรงข้ามมุมฉากซึ่งเป็นด้านที่ยาวที่สุดในรูปสามเหลี่ยม อีกสองด้านเรียกว่าด้านประกอบมุมฉาก พร้อมกับการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

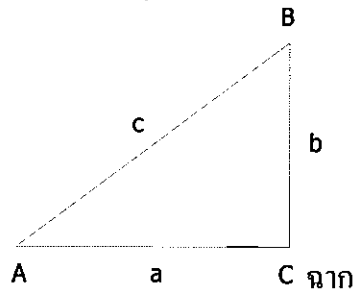
จากการตอบคำถามของนักเรียนมีคำตอบที่หลากหลาย ครูยกตัวอย่างโต๊ะนักเรียนซึ่งเป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า โดยให้นักเรียนลากเส้นทแยงมุมแล้ววัดความยาวของด้านกว้าง ด้านยาวและเส้นทแยงมุมของโต๊ะปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ได้ความยาวของด้านกว้าง 60 เซนติเมตรและด้านยาว 80 เซนติเมตร และความยาวของเส้นทแยงมุมยาวประมาณ 100 เซนติเมตร ถ้าสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านกว้าง ด้านยาวและบนเส้นทแยงมุมของโต๊ะปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ทั้งสามด้าน จงหาความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนความยาวของด้านทั้งสาม โดยครูใช้คำถาม ถามนักเรียนตามขั้นตอนต่อไปนี้

1. ครูถามคำถามนักเรียนว่า สิ่งที่โจทย์กำหนดให้คืออะไร

ตอบ ความกว้าง 60 เซนติเมตรและความยาว 80 เซนติเมตร และเส้นทแยงมุมยาวประมาณ 100 เซนติเมตรของโต๊ะปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์

2. ครูถามคำถามนักเรียนว่า สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร

ตอบ ความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสาม คือ ความกว้าง ความยาว และเส้นทแยงมุมของโต๊ะปฏิบัติการทางคณิตศาสตร์ มีความสัมพันธ์ดังนี้



$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{เมื่อ}$$

c แทน ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก

a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก

ซึ่งความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งเป็นไปตามสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่กล่าวไว้ว่า

“ สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก ”

3. ครูถามคำถามนักเรียนว่า นักเรียนหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสได้จากสูตรอะไร

ตอบ พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส = ความยาวของด้าน \times ความยาวของด้าน

4. ครูให้นักเรียนหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสาม

ตอบ พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านกว้าง = $60 \times 60 = 3,600$ ตารางเซนติเมตร

พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านยาว = $80 \times 80 = 6,400$ ตารางเซนติเมตร

พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นทแยงมุม = $100 \times 100 = 10,000$ ตารางเซนติเมตร

5. ครูถามคำถามนักเรียนว่า นักเรียนคิดว่าความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมนั้น น่าจะมีความสัมพันธ์อย่างไร ตอบ

พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นทแยงมุม = ผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านกว้างกับพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านยาว

แทนค่า $10,000$ ตารางเซนติเมตร = $3,600$ ตารางเซนติเมตร + $6,400$ ตารางเซนติเมตร

$10,000$ ตารางเซนติเมตร = $10,000$ ตารางเซนติเมตร

6. ครูถามคำถามนักเรียนว่า นักเรียนหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส ได้จากสูตรอะไร

ตอบ สูตรหาพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัส = ความยาวของด้าน \times ความยาวของด้าน

7. ครูถามคำถามนักเรียนว่า นักเรียนมีวิธีการตรวจคำตอบอย่างไรบ้าง

ตอบ ใช้วิธีการตรวจคำตอบ โดยการหาความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมจากขนาดของพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสที่หาจาก ความยาวของด้าน \times ความยาวของด้าน ดังนี้

พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านกว้าง = 3,600 ตารางเซนติเมตร = 60 เซนติเมตร \times 60 เซนติเมตร
ดังนั้น ความยาวของด้านกว้าง คือ 60 เซนติเมตร

พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านยาว = 6,400 ตารางเซนติเมตร = 80 เซนติเมตร \times 80 เซนติเมตร
ดังนั้น ความยาวของด้านยาว คือ 80 เซนติเมตร

พื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสบนเส้นทแยงมุม = 10,000 ตารางเซนติเมตร = 100 เซนติเมตร \times 100 เซนติเมตร

ดังนั้น ความยาวของเส้นทแยงมุม คือ 100 เซนติเมตร

ถ้าผลลัพธ์ของความยาวที่เกิดจากการแยกตัวประกอบของจำนวนที่เกิดจากพื้นที่สี่เหลี่ยมจัตุรัสเท่ากับความยาวที่ได้จากการวัดมีค่าเท่ากันแสดงว่าคำตอบถูกต้อง

8. ครูแบ่งกลุ่มนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ เพื่อแสดงวิธีการตรวจคำตอบของกิจกรรมที่นักเรียนได้ปฏิบัติมาแล้วในข้อ 5 บนกระดาน (ครูเฉลยและแก้ไขข้อบกพร่องในข้อที่นักเรียนมีแนวคิดที่คลาดเคลื่อน)

9. ครูให้นักเรียนปฏิบัติใบกิจกรรมที่ 1.1 เพื่อให้ นักเรียนเขียนสมการแสดงความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

10. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบใบกิจกรรมที่ 1.1

11. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 1.2

12. ครูและนักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบใบกิจกรรมที่ 1.2

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป พร้อมทั้งแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบกิจกรรมที่ 1.1 -1.2
2. กระดาษแข็ง
3. กรรไกร

4. ไม่บรรทัดหรือตลับเมตร
5. ไม่ไปแทรกเตอร์หรือเครื่องวงกลม

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตจากการทำกิจกรรมกลุ่ม
2. สังเกตจากการทำใบกิจกรรม
3. สังเกตจากการนำเสนอ

ใบกิจกรรมที่ 1.1

ปัญหา

ให้นักเรียนสังเกตสิ่งของหรือวัตถุใดๆ ที่อยู่รอบตัวของนักเรียนโดยที่สิ่งของหรือวัตถุนั้นมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก จากนั้นปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ระบุชนิดหรือประเภทของสิ่งของหรือวัตถุที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากจำนวน 4 ชนิด/ประเภท
2. วัดความยาวทุกด้านของสิ่งของหรือวัตถุที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉาก
3. ลากเส้นทแยงมุมของสิ่งของหรือวัตถุที่เป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจะได้รูปสามเหลี่ยม 2 รูป
4. วัดขนาดของมุมทุกมุมเมื่อลากเส้นทแยงมุม
5. วาดภาพจำลองของสิ่งของหรือวัตถุพร้อมทั้งกำหนดชื่อและขนาดของภาพจำลองนั้น
6. ให้นักเรียนระบุว่าด้านใดเป็นด้านตรงข้ามมุมฉากและด้านใดเป็นด้านประกอบมุมฉาก
7. ให้นักเรียนระบุว่ามุมใดเป็นมุมฉาก และมุมที่เหลือ

ใบกิจกรรมที่ 1.2

ปัญหา

ให้นักเรียนสังเกตสิ่งของหรือวัสดุใดๆ ที่อยู่รอบตัวของนักเรียน โดยสิ่งของหรือวัสดุนั้นมีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉาก จากนั้นปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1. ระบุชนิดหรือประเภทของสิ่งของหรือวัสดุที่มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากจำนวน 4 ชนิด/ประเภท
2. วัดความยาวของรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากทุกด้าน
3. ลากเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมที่มีมุมทุกมุมเป็นมุมฉากแล้ววัดความยาว
4. เขียนความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากที่เกิดขึ้น

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

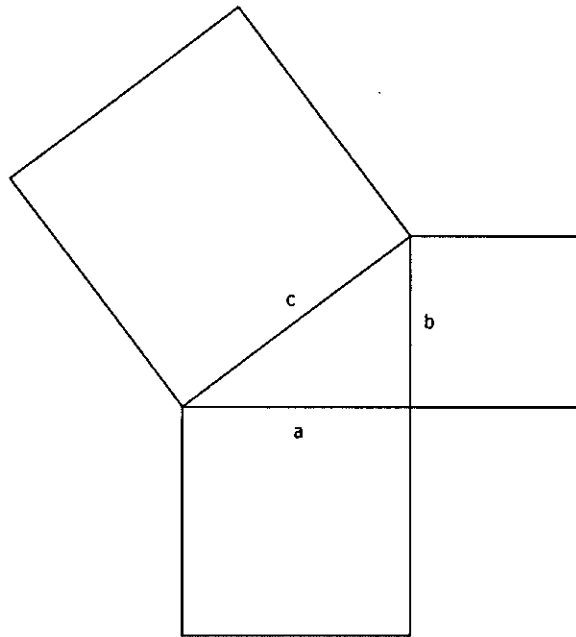
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
เรื่อง บทประยุกต์ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2
จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมี $\hat{A}CB$ เป็นมุมฉาก โดยที่ c แทนความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก a และ b แทนความยาวของด้านประกอบมุมฉาก จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ดังนี้ $c^2 = a^2 + b^2$



จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถ

1. เขียนความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้
2. หาคความยาวของด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดความยาวของด้านสองด้านให้โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้

สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

คาบที่ 3 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จุดประสงค์

เขียนความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูทบทวนความรู้เดิมเกี่ยวกับสมบัติของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก และการเขียนความสัมพันธ์ของความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมีความสัมพันธ์กันดังนี้

“ สำหรับรูปสามเหลี่ยมมุมฉากใดๆ กำลังสองของความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านประกอบมุมฉาก ”

ซึ่งเป็นความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก จากที่เรียนมาแล้วในคาบก่อน

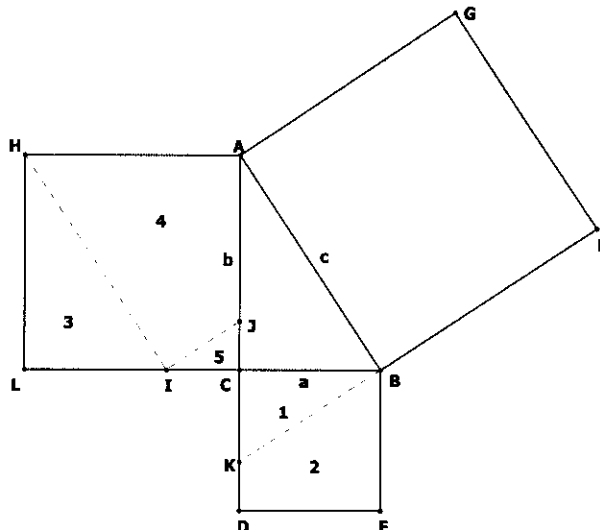
2. ครูให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมที่ 2.1 เพื่อแสดงการพิสูจน์ว่า ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากบนด้านประกอบมุมฉาก ดังนี้

2.1 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4-6 คน

2.2 แจกกระดาษ ให้นักเรียนแต่ละกลุ่ม แล้วให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี \hat{C} เป็นมุมฉาก จำนวน 1 รูป ขนาดเท่าที่ต้องการ

2.3 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

2.4 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มลากเส้นประ HI, IJ และ BK โดยที่ $\overline{HI} \parallel \overline{AB}$ \overline{BK} คือเส้นที่เกิดจากการต่อ \overline{FB} ออกไปทาง B ตัด \overline{CD} ที่จุด K และ $\overline{IJ} \parallel \overline{BK}$ ดังรูป



2.5 ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตัดตามรอยประ จะได้รูปที่ 1, 2, 3, 4 และ 5 จากนั้นให้นำรูปทั้งห้ารูป มาจัดเรียงลงในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AB

2.6 ครูให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอและอธิบายสิ่งที่นักเรียนพบจากการปฏิบัติกิจกรรมเพื่อนำไปสู่การค้นหาลักษณะของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

2.7 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปผลจากการปฏิบัติกิจกรรมที่ 2.1 พร้อมทั้งแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น

คาบที่ 4 ทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จุดประสงค์

หาความยาวของด้านใดด้านหนึ่งของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก เมื่อกำหนดความยาวของด้านสองด้านให้โดยใช้ทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูยกตัวอย่าง โจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับการนำความสัมพันธ์ระหว่างพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส ซึ่งโจทย์ปัญหามีดังนี้

เช้าวันหนึ่งนักเรียนมีหน้าที่ต้องเป็นผู้เชิญธงชาติขึ้นสู่ยอดเสาในกิจกรรมหน้าเสาธง และพบว่าเชือกที่มีไว้สำหรับเชิญธงชาติขาดเพราะเมื่อคืนที่ผ่านมามีพายุฝนฟ้าคะนอง นักเรียนต้องแก้ปัญหาโดยต้องหาซื้อเชือกมาเปลี่ยนใหม่ แต่ไม่ทราบว่าต้องใช้เชือกยาวเท่าไรจึงจะเหมาะสม ซึ่งข้อมูลที่มีคือเสาธงของโรงเรียนมีความสูง 12 เมตร และจุดที่นักเรียนยืนเชิญธงชาติจะอยู่ห่างจากฐานเสาธงประมาณ 5 เมตร ดังนั้นถ้าต้องซื้อเชือกเพื่อมาเปลี่ยนใหม่ต้องใช้เชือกยาวกี่เมตรจึงจะเหมาะสม

2. ครูใช้คำถาม ถามนักเรียนตามขั้นตอนดังนี้

2.1 ครูถามคำถามนักเรียนว่าสิ่งที่โจทย์กำหนดให้คืออะไร

ตอบ เสาธงของโรงเรียนสูง 12 เมตร

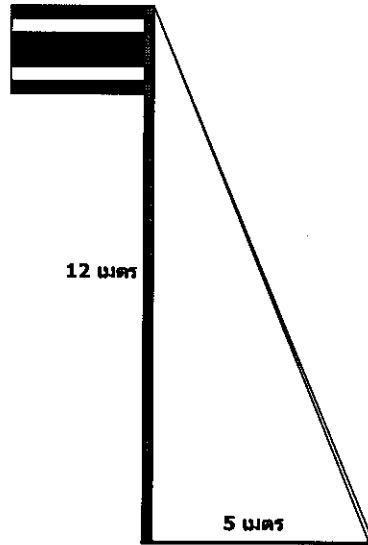
นักเรียนยืนเชิญธงชาติจะอยู่ห่างจากฐานเสาธงประมาณ 5 เมตร

2.2 ครูถามคำถามนักเรียนว่า สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร

ตอบ ต้องซื้อเชือกมาเปลี่ยนใหม่ยาวกี่เมตรจึงจะเหมาะสม

2.3 ครูถามคำถามนักเรียนว่าจะต้องทำอะไรบ้างจึงจะสามารถหาความยาวของเชือกได้

2.4 ครูนำเสนอรูปภาพ และให้นักเรียนแทนความยาวจากสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ลงในรูปภาพได้ดังนี้



2.5 กรุณาคำถามนักเรียนว่า นักเรียนสามารถเขียนความสัมพันธ์จากรูปได้อย่างไร

ตอบ $c^2 = a^2 + b^2$

เมื่อ c แทน ความยาวของเชือกที่ต้องซื้อ

a แทน ระยะห่างจากฐานเสาธง

b แทน ความสูงของเสาธง

2.6 ครูให้นักเรียนค้นหาคำตอบว่านักเรียนต้องซื้อเชือกเพื่อมาเปลี่ยนใหม่โดยต้องใช้เชือก

ยาว

กี่เมตรจึงจะเหมาะสม โดยครูแสดงวิธีค้นหาคำตอบดังนี้

จาก $c^2 = a^2 + b^2$

เมื่อ ความยาวของเชือกที่ต้องซื้อ คือ c

ระยะห่างจากฐานเสาธง (a) เท่ากับ 5 เมตร

ความสูงของเสาธง (b) เท่ากับ 12 เมตร

แทนค่า จะได้ $c^2 = 5^2 + 12^2$

$$c^2 = 25 + 144$$

$$c^2 = 169$$

$$c = 13$$

ตอบ ต้องซื้อเชือกเพื่อมาเปลี่ยนใหม่ โดยเชือกที่ใช้ต้องมีสองด้านสำหรับคนเชิญธงสองคน ดังนั้นต้องใช้เชือกยาว 26 เมตร

2.7 ครูถามคำถามนักเรียนว่า นักเรียนมีวิธีการตรวจสอบคำตอบที่นักเรียนหามาได้อย่างไร
ตอบ ตรวจสอบโดยใช้ความสัมพันธ์ของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของ
รูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามทฤษฎีบทพีทาโกรัส แสดงได้ดังนี้

$$\text{จาก } c^2 = a^2 + b^2$$

เมื่อ c แทน ความยาวของเชือกที่ต้องซื้อ เท่ากับ 13 เมตร

a แทน ระยะห่างจากฐานเสาธง เท่ากับ 5 เมตร

b แทน ความสูงของเสาธง เท่ากับ 12 เมตร

$$\text{จะได้ } 13^2 = 5^2 + 12^2$$

$$169 = 25 + 144$$

$$169 = 169$$

ดังนั้น กำลังสองของความยาวของด้านเชือก เท่ากับผลบวกของกำลังสองของระยะห่างจาก
ฐานเสาธงและความสูงของเสาธง

2.8 ให้นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมที่ 2.2

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปและเฉลยคำตอบใบกิจกรรมที่ 2.1, 2.2 พร้อมทั้งแก้ไข

ข้อบกพร่อง

ที่เกิดขึ้น

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบกิจกรรมที่ 2.1, 2.2
2. กระดาษแข็ง
3. กรรไกร
4. ไม้บรรทัดหรือตลับเมตร
5. ไม้โป๊วแทรกเตอร์หรือครึ่งวงกลม

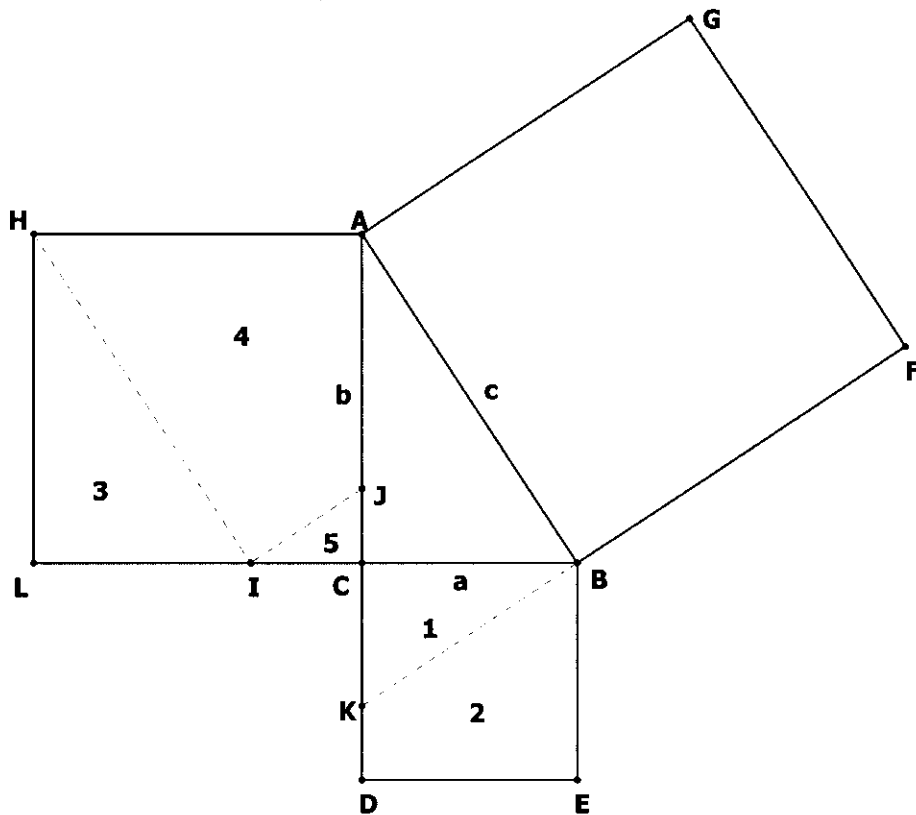
การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตจากการทำกิจกรรมกลุ่ม
2. สังเกตจากการทำใบกิจกรรม
3. สังเกตจากการนำเสนอ

ใบกิจกรรมที่ 2.1

คำสั่ง นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมต่อไปเพื่อแสดงการพิสูจน์ว่า ในรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉาก เท่ากับผลบวกของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านประกอบมุมฉากหรือไม่โดยปฏิบัติดังนี้

1. ให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มี \hat{C} เป็นมุมฉาก จำนวน 1 รูป ขนาดเท่าที่ต้องการ
2. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มสร้างรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
3. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มลากเส้นประ HI, IJ และ BK โดยที่ $\overline{HI} \parallel \overline{AB}$ \overline{BK} คือเส้นที่เกิดจากการต่อ \overline{FB} ออกไปทาง B ตัด \overline{CD} ที่จุด K และ $\overline{IJ} \parallel \overline{BK}$ โดยมีลักษณะดังรูป



4. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มตัดตามรอยประดังรูปข้างต้น จะได้รูปที่ 1, 2, 3, 4 และ 5 จากนั้นให้นำรูปทั้งห้ารูป มาจัดเรียงลงในรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้าน AB
5. ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มออกมานำเสนอและอธิบายสิ่งที่นักเรียนพบจากการปฏิบัติกิจกรรม

ใบกิจกรรมที่ 2.2

โจทย์ปัญหา

บริษัท โทรศัพท์เคลื่อนที่แห่งหนึ่งต้องการจะติดตั้งเสาส่งสัญญาณซึ่งมีความสูง 1,200 ฟุต โดยบริษัทกำหนดให้ช่างที่ทำการติดตั้งต้องใช้สายเคเบิลที่บริษัทจัดหามาให้ซึ่งมีความยาวต่อม้วน 3,900 ฟุต ให้หาคพอติดต่อการยึดเสาส่งสัญญาณหนึ่งต้น และกำหนดให้ช่างตัดสายเคเบิลได้เพียงสอง ครั้ง โดยสายเคเบิลที่ตัดแล้วต้องมีความยาวเท่ากันทุกเส้น อยากทราบว่าสายเคเบิลแต่ละเส้นยาวเท่าใด และเมื่อนำสายเคเบิลไปยึดเสาส่งสัญญาณจากปลายยอดเสาส่งสัญญาณลงมาถึงพื้นดินต้องตรงพอดีนั้น ปลายสายเคเบิลที่อยู่ที่พื้นดินอยู่ห่างจาก โคนเสาส่งสัญญาณเป็นระยะเท่าใด

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์
เรื่อง บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2
จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

สำหรับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถอธิบายความสัมพันธ์ของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้

สาระการเรียนรู้

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

คาบที่ 5

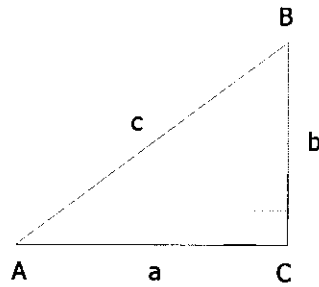
จุดประสงค์การเรียนรู้

อธิบายความสัมพันธ์ของความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากตามบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสได้

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูและนักเรียนปฏิบัติกิจกรรมเพื่อพิสูจน์แนวคิดเกี่ยวกับบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส โดยปฏิบัติกิจกรรม ดังนี้

1.1 ครูกำหนดรูปสามเหลี่ยม ABC รูปหนึ่ง โดยมีด้านยาว a , b และ c หน่วย เมื่อ $a = 6$ หน่วย $b = 8$ หน่วย $c = 10$ หน่วย ตามลำดับ และ $c^2 = a^2 + b^2$ ดังรูป



1.2 ครูให้นักเรียนสร้างรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก DEF โดยให้ด้านประกอบมุมฉาก EF และ DF ยาวเท่ากับ a หน่วย และ b หน่วย ตามลำดับ

1.3 ครูถามคำถามนักเรียนดังนี้

- 1) $EF = BC = a$ หรือไม่ แนวตอบ เท่ากัน เพราะ โจทย์กำหนด
- 2) $DF = AC = b$ หรือไม่ แนวตอบ เท่ากัน เพราะ โจทย์กำหนด
- 3) $DE^2 = a^2 + b^2$ หรือไม่ เพราะเหตุใด แนวตอบ เท่ากัน เพราะ DEF เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
- 4) $a^2 + b^2 = c^2$ หรือไม่ เพราะอะไร แนวตอบ เท่ากัน เพราะ โจทย์กำหนด
- 5) DE เกี่ยวข้องกับ c อย่างไร แนวตอบ $DE = c$ เพราะ $DE^2 = c^2$
- 6) $\triangle DEF \cong \triangle ABC$ หรือไม่ เพราะเหตุใด แนวตอบ เท่ากันทุกประการ เพราะ $EF = BC$, $AC = DF$ และ $DE = AB$ (ด้าน-ด้าน-ด้าน)
- 7) จากข้อคำถามในข้อ 6 ขนาดของมุม C เท่ากับขนาดของมุมใดใน $\triangle DEF$ และมีขนาดเท่าใด แนวตอบ $\hat{C} = \hat{DFE} = 90^\circ$
- 8) $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่ เพราะอะไร แนวตอบ เป็น เพราะมีมุม C เป็นมุมฉาก

1.4 ครูนำเสนอตัวอย่างปัญหาที่สอดคล้องกับบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ซึ่ง โจทย์ปัญหามีดังนี้

กำหนดความยาวของด้านของสามเหลี่ยมใดๆ ให้นักเรียนตรวจดูว่าข้อใดเป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนี้

- 1) 10, 24, 26
- 2) 3.5, 12, 12.5
- 3) 8, 15, 20

1.5 ครูใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนหาคำตอบ โดยใช้คำถามถามนักเรียนตามขั้นตอนดังนี้

1.5.1) ครูถามคำถามนักเรียนว่า สิ่งที่โจทย์กำหนดให้คืออะไร

ตอบ ความยาวของด้านของสามเหลี่ยมใดๆ

1.5.2) ครูถามคำถามนักเรียนว่า สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร

ตอบ ให้นักเรียนตรวจดูว่าข้อใดเป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.5.3) ครูถามคำถามนักเรียนว่าจะต้องทำอะไรบ้างจึงจะสามารถตรวจดูว่าข้อใดเป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.5.4) ครูเสนอแนะว่า จากบทกลับทฤษฎีบทพีทาโกรัส ที่กล่าวว่า สำหรับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ดังนั้นนักเรียนจะมีวิธีการตรวจสอบว่าข้อใดเป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก

1.5.5) ครูถามคำถามนักเรียนว่า นักเรียนสามารถเขียนความสัมพันธ์จากรูปได้อย่างไร

$$\text{ตอบ } c^2 = a^2 + b^2$$

เมื่อ c แทน ด้านที่ยาวที่สุดของสามเหลี่ยมเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก

a แทน ความยาวของด้านของสามเหลี่ยมด้านที่หนึ่ง

b แทน ความยาวของด้านของสามเหลี่ยมด้านที่เหลือ

1.5.6) ครูให้นักเรียนค้นหาคำตอบว่าข้อใดเป็นความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยครูเสนอแนะและแสดงวิธีค้นหาคำตอบดังนี้

$$1) \text{ จาก } c^2 = a^2 + b^2$$

ด้านที่ยาวที่สุด คือ ยาว 26

ด้านที่เหลือ ยาว 24 และ 10

$$\text{จะได้ว่า } 26^2 = 24^2 + 10^2$$

$$676 = 576 + 100$$

$$676 = 676$$

ตอบ ซึ่งเป็นจริง แสดงว่า ข้อ 1) เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$2) \text{ จาก } c^2 = a^2 + b^2$$

ด้านที่ยาวที่สุด คือ ยาว 12.5

ด้านที่เหลือ ยาว 12 และ 3.5

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } 12.5^2 &= 12^2 + 3.5^2 \\ 156.25 &= 144 + 12.25 \\ 156.25 &= 156.25 \end{aligned}$$

ตอบ ซึ่งเป็นจริง แสดงว่า ข้อ 2) เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$3) \text{ จาก } c^2 = a^2 + b^2$$

ด้านที่ยาวที่สุด คือ ยาว 20

ด้านที่เหลือ ยาว 8 และ 15

$$\begin{aligned} \text{จะได้ว่า } 20^2 &= 8^2 + 15^2 \\ 400 &= 64 + 225 \\ 400 &= 289 \end{aligned}$$

ตอบ ซึ่งไม่เป็นจริง แสดงว่า ข้อ 3) ไม่เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

2. ครูให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 3.1

3. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุป ผลการสร้างรูปสามเหลี่ยม โดยครูคอยช่วยเพิ่มเติมให้สมบูรณ์จนได้ข้อสรุปซึ่งเป็นบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสดังนี้

“ถ้า $\triangle ABC$ มีด้านยาว a , b และ c และ $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ว่า $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและมีด้านที่ยาว c หน่วยเป็นด้านตรงข้ามมุมฉาก”

คาบที่ 6 บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จุดประสงค์

นำบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสไปใช้แก้ปัญหาได้

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

1. ครูให้นักเรียนปฏิบัติใบกิจกรรมที่ 3.2 โดยปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

1.1 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4-6 คน

1.2 ครูแจกใบกิจกรรมที่ 3.2 ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มช่วยกันแก้ปัญหา

1.3 ครูสังเกตการปฏิบัติกิจกรรมและใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนหาคำตอบ

1.4 หลังจากที่นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมเสร็จเรียนร้อย ครูให้ตัวแทนนักเรียนแต่ละกลุ่ม

ออกมานำเสนอวิธีและแนวทางการแก้ปัญหาที่นักเรียนใช้จากการปฏิบัติกิจกรรม

2 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปจากการปฏิบัติกิจกรรม พร้อมทั้งแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปและเฉลยคำตอบใบกิจกรรมที่ 3.1, 3.2 พร้อมทั้งแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบกิจกรรมที่ 3.1, 3.2
2. กระดาษแข็ง
3. กรรไกร
4. ไม้บรรทัดหรือตลับเมตร
5. ไม้โปแตรกเตอร์หรือเครื่องวงกลม

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตจากการทำกิจกรรมกลุ่ม
2. สังเกตจากการทำใบงาน
3. สังเกตจากการนำเสนอ

ใบกิจกรรม ที่ 3.1

คำสั่ง เมื่อกำหนดให้ a , b และ c เป็นความยาวของด้านของ $\triangle ABC$ จงหาว่า $a^2 + b^2$ เท่ากับ c^2 หรือไม่เมื่อกำหนดให้

(1) $a = 6$ $b = 2.5$ $c = 6.5$

(2) $a = 4$ $b = 6.5$ $c = 8.5$

(3) $a = 1.5$ $b = 3.6$ $c = 3.9$

(4) $a = 9$ $b = 12$ $c = 15$

และตอบคำถามต่อไปนี้

- 1) นักเรียนคิดว่ารูปสามเหลี่ยมทุกรูปที่มีความสัมพันธ์ของความยาวของด้านเป็น $c^2 = a^2 + b^2$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากหรือไม่
- 2) รูปสามเหลี่ยมที่มีความสัมพันธ์ของความยาวด้านเป็น $c^2 = a^2 + b^2$ มีด้านใดยาวที่สุด

ใบกิจกรรมที่ 3.2

โจทย์ปัญหา

เสาสูง 28 เมตร ใช้เชือกยาว 70 เมตร โดยโยงจากยอดเสาถึงพื้นดิน เมื่อเชือกลงขันดู ยอดเสาจะต้องยื่นห่างจากเสาตรงเท่าไร จึงจะทำให้เชือกตึงพอดี

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ชั้น มัธยมศึกษาปีที่ 2

เรื่อง การประยุกต์บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

จำนวน 2 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

สำหรับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

จุดประสงค์การเรียนรู้

นักเรียนสามารถนำบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาไปประยุกต์ใช้ในการแก้ปัญหาได้

สาระการเรียนรู้

บทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส

คาบที่ 7

จุดประสงค์การเรียนรู้

นำบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาใช้ในการแก้ปัญหาได้

กิจกรรมการเรียนรู้

- ครูนำเสนอโจทย์ปัญหาที่เกี่ยวข้องกับบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ซึ่งโจทย์ปัญหามีดังนี้

ชายคนหนึ่งยืนอยู่บนหน้าผาแห่งหนึ่ง เขาใช้เชือกยาว 600 เมตร โยงถึงเรือ A พอดี และใช้เชือกยาว 360 เมตร โยงถึงเรือ B ได้พอดีเช่นกัน ถ้าเรือ B อยู่ห่างจากหน้าผา 180 เมตร อยากรทราบว่ามีเรือทั้งสองลำจอดอยู่ห่างจากกันเป็นระยะประมาณเท่าไร
- ครูใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนหาคำตอบ โดยใช้คำถามถามนักเรียนตามขั้นตอนดังนี้
 - ครูถามคำถามนักเรียนว่า สิ่งที่โจทย์กำหนดให้คืออะไร

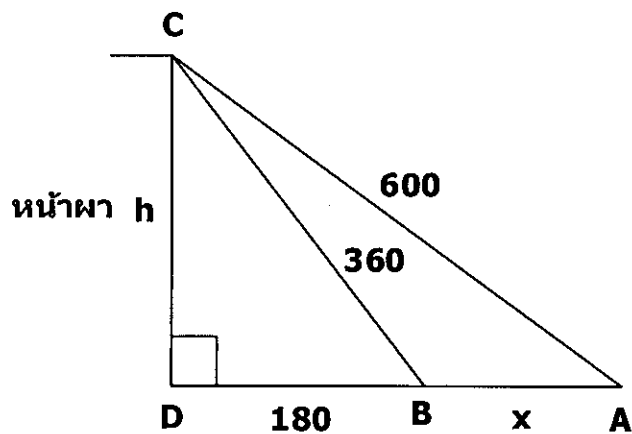
ตอบ ชายคนหนึ่งใช้เชือกยาว 600 เมตร โยงถึงเรือ A พอดี
ชายคนหนึ่งใช้เชือกยาว 360 เมตร โยงถึงเรือ B ได้พอดี
เรือ B อยู่ห่างจากหน้าผา 180 เมตร

2.2 ครูถามคำถามนักเรียนว่า สิ่งที่โจทย์ต้องการทราบคืออะไร

ตอบ เรือทั้งสองลำจอดอยู่ห่างจากกันเป็นระยะประมาณเท่าไร

2.3 ครูถามคำถามนักเรียนว่าจะต้องทำอะไรบ้างจึงจะสามารถหาว่าเรือทั้งสองลำจอดอยู่ห่างจากกันเป็นระยะประมาณเท่าไร

2.4 ครูนำเสนอรูปภาพและให้นักเรียนแทนสิ่งที่โจทย์กำหนดให้ลงในรูปภาพ ได้ดังนี้



2.5 ครูถามคำถามนักเรียนว่า นักเรียนสามารถเขียนความสัมพันธ์จากรูปได้อย่างไร

ตอบ ในรูปสามเหลี่ยม DCB : จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$CB^2 = CD^2 + DB^2$$

เมื่อ CB แทน ความยาวของเชือกที่โยงถึงเรือ B

CD แทน ความสูงของหน้าผา

DB แทน ระยะห่างจากหน้าผาถึงเรือ B

ในรูปสามเหลี่ยม DCA : จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส

$$AC^2 = CD^2 + DA^2$$

เมื่อ CA แทน ความยาวของเชือกที่โยงถึงเรือ A

CD แทน ความสูงของหน้าผา

DA แทน ระยะห่างจากหน้าผาถึงเรือ A

2.6 ครูให้นักเรียนค้นหาคำตอบว่าเรือทั้งสองลำจอดอยู่ห่างจากกันเป็นระยะประมาณเท่าไร โดยครูแสดงวิธีค้นหาคำตอบดังนี้

ในรูปสามเหลี่ยม DCB : จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส ; $CB^2 = CD^2 + DB^2$

เมื่อ CB แทน ความยาวของเชือกที่โยงถึงเรือ B เท่ากับ 360 เมตร

CD แทน ความสูงของหน้าผาเท่ากับ h เมตร

DB แทน ระยะห่างจากหน้าผาถึงเรือ B เท่ากับ 180 เมตร

แทนค่าเพื่อหาความสูงของหน้าผา จะได้ว่า

$$360^2 = h^2 + 180^2$$

$$h^2 = 129,600 - 32,400$$

$$h^2 = 97,200$$

ในรูปสามเหลี่ยม DCA : จากทฤษฎีบทพีทาโกรัส ; $AC^2 = CD^2 + DA^2$

เมื่อ CA แทน ความยาวของเชือกที่โยงถึงเรือ A เท่ากับ 600 เมตร

CD แทน ความสูงของหน้าผา เท่ากับ h เมตร ($h^2 = 97,200$)

DA แทน ระยะห่างจากหน้าผาถึงเรือ A เท่ากับ $180 + x$ เมตร

แทนค่าเพื่อหาระยะทางที่เรือ A จอด จะได้ว่า

$$600^2 = h^2 + DA^2$$

$$360,000 = 97,200 + DA^2$$

$$DA^2 = 360,000 - 97,200$$

$$DA^2 = 262,800$$

$$\therefore DA = 512.64$$

สามารถหาระยะห่างที่เรือทั้งสองลำจอดอยู่ห่างจากกันได้จาก

$$BA = DA - DB$$

$$\text{จะได้} \quad BA = 512.64 - 180$$

$$BA = 332.64 \text{ เมตร}$$

ตอบ เรือสองลำจอดห่างกันเป็นระยะประมาณ 333 เมตร

2.7 ครูถามคำถามนักเรียนว่า นักเรียนมีวิธีการตรวจสอบคำตอบที่นักเรียนหามาได้อย่างไร

ตอบ ตรวจสอบโดยใช้ความสัมพันธ์ของบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ที่กล่าวว่า “สำหรับรูปสามเหลี่ยมใดๆ ถ้ากำลังสองของความยาวของด้านด้านหนึ่งเท่ากับผลบวกของกำลังสองของความยาวของด้านอีกสองด้าน แล้วรูปสามเหลี่ยมนั้นเป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก” สำหรับรูปสามเหลี่ยม DCB และรูปสามเหลี่ยม DCA

คาบที่ 8

จุดประสงค์การเรียนรู้

นำบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัสมาใช้ในการแก้ปัญหาได้

กิจกรรมการเรียนรู้

1. ครูให้นักเรียนปฏิบัติใบกิจกรรมที่ 4.1 และ 4.2 เพื่อแก้ปัญหาเกี่ยวกับการนำบทกลับของทฤษฎีบทพีทาโกรัส ไปใช้ในการแก้ปัญหา โดยปฏิบัติตามขั้นตอนดังนี้

- 1.1 ครูแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 4-6 คน
- 1.2 ครูแจกใบกิจกรรมที่ 4.1 และ 4.2 ให้นักเรียนในแต่ละกลุ่มช่วยกันแก้ปัญหา
- 1.3 ครูสังเกตการปฏิบัติกิจกรรมและใช้คำถามกระตุ้นให้นักเรียนหาคำตอบ
- 1.4 หลังจากที่นักเรียนปฏิบัติกิจกรรมเสร็จเรียบร้อยแล้ว ครูให้ตัวแทนนักเรียนแต่ละกลุ่ม

ออกมานำเสนออุทวิวิธีและแนวทางการแก้ไขปัญหานักเรียนใช้จากการปฏิบัติกิจกรรม

2 ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปจากการปฏิบัติกิจกรรม พร้อมทั้งแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปและเฉลยคำตอบใบกิจกรรมที่ 4.1 และ 4.2 พร้อมทั้งแก้ไขข้อบกพร่องที่เกิดขึ้น

สื่อการเรียนการสอน

ใบกิจกรรมที่ 4.1 , 4.2

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตจากการทำกิจกรรมกลุ่ม
2. สังเกตจากการทำใบงาน
3. สังเกตจากการนำเสนอ

ใบกิจกรรมที่ 4.1

โจทย์ปัญหา

1. หน่วยดับเพลิงหน่วยหนึ่งได้รับแจ้งว่ามีเหตุเพลิงไหม้พิพิธภัณฑสถาน เมื่อมาถึงที่เกิดเหตุพบว่าจุดที่เพลิงไหม้อยู่ที่บริเวณชั้นสามของพิพิธภัณฑสถาน เจ้าหน้าที่ดับเพลิงต้องเลื่อนบันไดที่อยู่บนหลังรถดับเพลิงไปให้ถึงหน้าต่างของชั้นที่เกิดเหตุ ซึ่งพบว่าต้องเลื่อนบันไดยาวประมาณ 25 ฟุต จึงจะถึงจุดที่เกิดเหตุบริเวณชั้นสาม โดยที่ฐานของบันไดที่อยู่บนรถดับเพลิงสูงจากพื้น ประมาณ 7 ฟุต และรถดับเพลิงจอดอยู่ห่างจากตัวอาคารพิพิธภัณฑสถานประมาณ 10 ฟุต อยากรทราบว่าจุดที่เกิดเหตุบริเวณชั้นสามอยู่สูงจากพื้นเป็นระยะประมาณเท่าใด

ใบกิจกรรมที่ 4.2

โจทย์ปัญหา

1. ก่องโบริงหนึ่งมีขนาดความกว้าง ความลึก และความสูง เป็น 4, 4, และ 3 ฟุตตามลำดับ ถ้าต้องการนำคันเบ็ดคปลาซึ่งยาว 6 ฟุต มาใส่ในก่องดังกล่าวจำเป็นจะต้องหัดคันเบ็ดให้เหลือขนาดอย่างน้อยที่สุดเท่าไรจึงจะสามารถใส่ลงในก่องนั้นได้

2. เสาไฟส่องสว่างสูง 6 เมตร ตั้งอยู่ที่มุมหนึ่งของสนามหญ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าขนาดกว้าง 4 เมตร ยาว 6 เมตร
 - 2.1) จงหาระยะจากโคนเสาถึงจุดปลายของเส้นทแยงมุมที่อยู่ตรงข้าม
 - 2.2) จงหาระยะจากยอดเสาถึงจุดปลายของเส้นทแยงมุมที่อยู่ตรงข้าม

ภาคผนวก ก

**แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียนและหลังเรียน
เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2**

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียน รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ค 32101
เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

คำชี้แจง แบบทดสอบฉบับนี้มีจำนวน 30 ข้อ คะแนนเต็ม 30 คะแนน ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

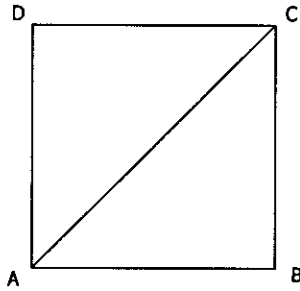
คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดยกาเครื่องหมาย ในช่องที่ตรงกับตัวเลือกในแต่ละข้อของ
 กระดาษคำตอบ

1. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากทุกรูปด้านที่ยาวที่สุดคือด้านใด
 - 1) ฐานของรูปสามเหลี่ยม
 - 2) ความสูงของรูปสามเหลี่ยม
 - 3) ด้านประกอบมุมฉาก
 - 4) ด้านตรงข้ามมุมฉาก
2. กำหนดให้ BC , CA และ AB ยาว a , b และ c ตามลำดับและกำหนดให้ $c^2 = a^2 + b^2$
 ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง
 - 1) $\hat{B}AC = 90^\circ$
 - 2) $\hat{B}CA = 90^\circ$
 - 3) $\hat{A}BC = 90^\circ$
 - 4) $\triangle ABC$ ไม่เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก
3. กำหนดความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมาให้ข้อใดต่อไปนี้ เป็นด้านของ
 รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
 - 1) 1 , 1 , 2
 - 2) 2 , 3 , 4
 - 3) 3 , 4 , 5
 - 4) 5 , 6 , 8
4. ข้อใดเป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
 - 1) 6 , 12 , 13
 - 2) 9 , 15 , 17
 - 3) 10 , 11 , 12
 - 4) 20 , 21 , 29

5. ข้อใดไม่เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
- 1) 3, 4, 5
 - 2) 1.5, 2, 2.5
 - 3) 3.5, 12, 12.5
 - 4) 7, 10, 12
6. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 13 หน่วย และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 5 หน่วย ด้านที่เหลือยาวเท่ากับข้อใด
- 1) 12 หน่วย
 - 2) 13 หน่วย
 - 3) 14 หน่วย
 - 4) 15 หน่วย
7. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 15 หน่วย และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 9 หน่วย สามเหลี่ยมมุมฉากรูปนี้มีความยาวรอบรูปเท่ากับข้อใด
- 1) 36 หน่วย
 - 2) 40 หน่วย
 - 3) 42 หน่วย
 - 4) 45 หน่วย
8. รูปสามเหลี่ยม ABC มี $\triangle ACB$ เป็นมุมฉากโดยกำหนดให้ด้านตรงข้าม \hat{A} , \hat{B} , \hat{C} ยาว a , b และ c หน่วยแล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง
- 1) $a + b = c$
 - 2) $a^2 = b^2 + c^2$
 - 3) $a^2 + c^2 = b^2$
 - 4) $c^2 = a^2 + b^2$
9. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากยาว ทั้งสองด้านยาว $2\sqrt{2}$ เซนติเมตร ด้านตรงข้ามมุมฉากจะยาวเท่าไร
- 1) 4 เซนติเมตร
 - 2) $4\sqrt{2}$ เซนติเมตร
 - 3) 8 เซนติเมตร
 - 4) $8\sqrt{2}$ เซนติเมตร

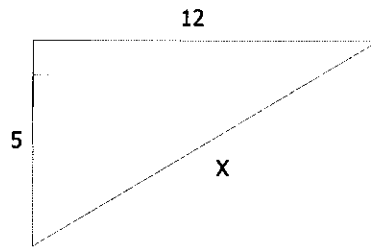
10. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 8 เซนติเมตร และมีพื้นที่ 24 ตารางเซนติเมตร รูปสามเหลี่ยมรูปนี้จะมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่าใด
- 1) 4 เซนติเมตร
 - 2) 6 เซนติเมตร
 - 3) 8 เซนติเมตร
 - 4) 10 เซนติเมตร
11. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 7 นิ้ว และมีพื้นที่ทั้งหมด 84 ตารางนิ้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก
- 1) 10 นิ้ว
 - 2) 12 นิ้ว
 - 3) 24 นิ้ว
 - 4) 25 นิ้ว
12. สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD มีด้านกว้าง 10 เมตร ด้านยาว 24 เมตร เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ยาวจะเท่าใด
- 1) 26 เมตร
 - 2) 32 เมตร
 - 3) 36 เมตร
 - 4) 42 เมตร
13. กำหนดให้ a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง ถ้ากำหนดให้ $a = 16$ หน่วย และ $B = 63$ หน่วย แล้ว c มีค่าตรงกับข้อใด
- 1) 59 หน่วย
 - 2) 61 หน่วย
 - 3) 65 หน่วย
 - 4) 69 หน่วย

14. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง



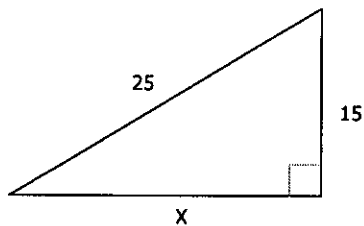
- 1) $2AC^2 = AB^2 + BC^2$
- 2) $AC^2 = 4AB^2$
- 3) $AC^2 = AD^2$
- 4) $AC^2 = 2AD^2$

15. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาความยาวของด้านที่เหลือ



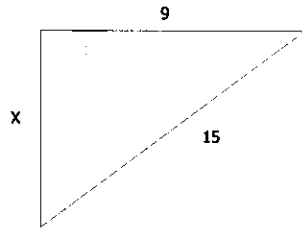
- 1) 13 หน่วย
- 2) 15 หน่วย
- 3) 17 หน่วย
- 4) 19 หน่วย

16. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาความยาวของด้านที่เหลือ



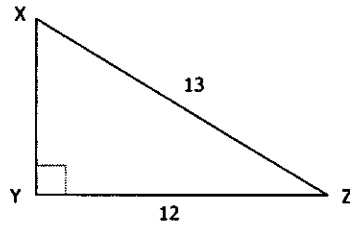
- 1) 10 หน่วย
- 2) 15 หน่วย
- 3) 20 หน่วย
- 4) 25 หน่วย

17. จงหาความยาวของด้านที่เหลือจากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้



- 1) 8 หน่วย
- 2) 10 หน่วย
- 3) 12 หน่วย
- 4) 15 หน่วย

18. รูปสามเหลี่ยม XYZ ที่กำหนดให้ ความยาวของด้านประกอบมุมฉากด้านที่เหลือยาวเท่ากับข้อใด

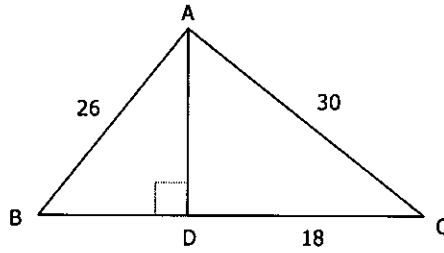


- 1) 5 หน่วย
- 2) 7 หน่วย
- 3) 8 หน่วย
- 4) 10 หน่วย

19. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 40 นิ้ว มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 41 นิ้ว ความยาวของด้านประกอบมุมฉากด้านที่เหลือยาวเท่ากับข้อใด

- 1) 9 ตารางนิ้ว
- 2) 13 ตารางนิ้ว
- 3) 16 ตารางนิ้ว
- 4) 18 ตารางนิ้ว

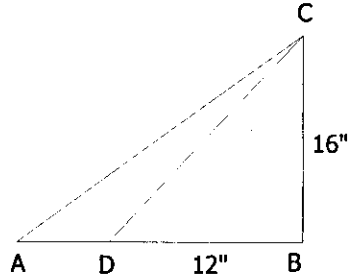
20. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาว่า ด้าน AD ยาวเท่าใด



- 1) 16 หน่วย
 - 2) 20 หน่วย
 - 3) 24 หน่วย
 - 4) 28 หน่วย
21. จากรูปข้อที่ 20 ด้าน BD ยาวเท่าใด
- 1) 8 หน่วย
 - 2) 10 หน่วย
 - 3) 12 หน่วย
 - 4) 16 หน่วย
22. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีด้านยาวด้านละ 4 เซนติเมตร รูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้ จะมีความสูงเท่ากับข้อใด
- 1) $2\sqrt{3}$ เซนติเมตร
 - 2) $3\sqrt{2}$ เซนติเมตร
 - 3) $2\sqrt{5}$ เซนติเมตร
 - 4) $5\sqrt{2}$ เซนติเมตร
23. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีเส้นทแยงมุมยาว $3\sqrt{2}$ เซนติเมตร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสนี้ มีความยาวด้านเท่ากับข้อใด
- 1) 3 เซนติเมตร
 - 2) 5 เซนติเมตร
 - 3) 7 เซนติเมตร
 - 4) 9 เซนติเมตร

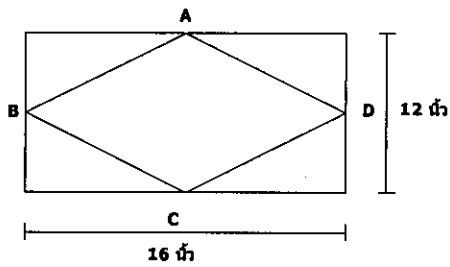
24. เครื่องบินลำหนึ่ง บินไปทางทิศตะวันออก 210 ไมล์ แล้วบินไปทางทิศเหนืออีก 200 ไมล์ เครื่องบินลำนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่ไมล์
- 1) 220 ไมล์
 - 2) 240 ไมล์
 - 3) 260 ไมล์
 - 4) 290 ไมล์
25. สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งยาว 16 เซนติเมตรและมีด้านแต่ละด้านยาว 17 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน
- 1) 120 ตารางเซนติเมตร
 - 2) 160 ตารางเซนติเมตร
 - 3) 240 ตารางเซนติเมตร
 - 4) 320 ตารางเซนติเมตร
26. การเดินทางไกลไปตั้งค่ายพักแรมของลูกเสือกองหนึ่งต้องเดินทางออกจากโรงเรียนไปทางทิศเหนือ 6 กิโลเมตร แล้วเดินต่อไปทางทิศตะวันออกอีก 6 กิโลเมตร จากนั้นต้องเดินทางขึ้นไปทางทิศเหนืออีก 2 กิโลเมตรจึงจะถึงที่ตั้งค่ายพักแรม ค่ายพักแรกอยู่ห่างจากโรงเรียนกี่กิโลเมตร
- 1) 6 กิโลเมตร
 - 2) 8 กิโลเมตร
 - 3) 10 กิโลเมตร
 - 4) 12 กิโลเมตร
27. เสาอากาศโทรทัศน์สูง 7 เมตร ตั้งอยู่ที่มุมหนึ่งของพื้นที่บริเวณบ้านพักอาศัย ขนาดความกว้าง 10 เมตร ยาว 24 เมตร จงหาระยะห่างจากโคนเสาถึงจุดปลายของเส้นทแยงมุมที่อยู่ตรงข้าม
- 1) 20 เมตร
 - 2) 24 เมตร
 - 3) 26 เมตร
 - 4) 28 เมตร

28. จากรูปที่กำหนดให้ $AB = CD$, $BD = 12''$, $BC = 16''$ จงหาความยาวด้าน CD



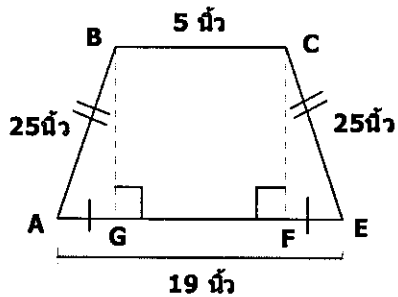
- 1) 20 นิ้ว
- 2) 25 นิ้ว
- 3) 30 นิ้ว
- 4) 35 นิ้ว

29. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาความยาวรอบรูปของสี่เหลี่ยม ABCD



- 1) 10 นิ้ว
- 2) 20 นิ้ว
- 3) 30 นิ้ว
- 4) 40 นิ้ว

30. จากรูปจงหาความยาวของด้าน BG หรือ CF



- 1) 18 นิ้ว
- 2) 22 นิ้ว
- 3) 24 นิ้ว
- 4) 28 นิ้ว

เฉลยคำตอบแบบทดสอบก่อนเรียน

1. 4)	2. 2)	3. 3)	4. 4)	5. 4)
6. 1)	7. 1)	8. 4)	9. 1)	10. 2)
11. 4)	12. 1)	13. 3)	14. 4)	15. 1)
16. 3)	17. 3)	18. 1)	19. 1)	20. 3)
21. 2)	22. 1)	23. 1)	24. 4)	25. 3)
26. 3)	27. 3)	28. 4)	29. 4)	30. 3)

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียน รายวิชาคณิตศาสตร์พื้นฐาน ค 32101
เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2

คำชี้แจง แบบทดสอบฉบับนี้มีจำนวน 30 ข้อ คะแนนเต็ม 30 คะแนน ใช้เวลา 1 ชั่วโมง

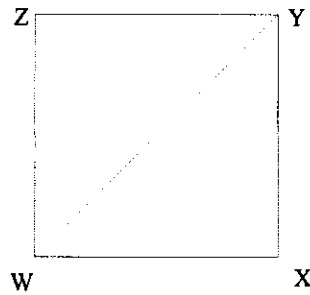
คำสั่ง จงเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด โดยกาเครื่องหมาย **X** ในช่องที่ตรงกับตัวเลือกในแต่ละข้อ
 ของกระดาษคำตอบ

1. ข้อใดต่อไปนี้กล่าวผิดเกี่ยวกับรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
 - 1) ด้านตรงข้ามมุมฉากเป็นด้านที่ยาวที่สุด
 - 2) ผลบวกของความยาวของด้านประกอบมุมฉากยาวกว่าด้านตรงข้ามมุมฉาก
 - 3) พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสบนด้านตรงข้ามมุมฉากเท่ากับผลรวมของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก
 - 4) พื้นที่ของรูปครึ่งวงกลมบนด้านตรงข้ามมุมฉากมากกว่าผลรวมของพื้นที่ของรูปครึ่งวงกลมที่อยู่บนด้านประกอบมุมฉาก
2. ถ้า ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากและ $\angle C = 90^\circ$ แล้วข้อใดเป็นจริง
 - 1) $AB^2 = BC^2 + CA^2$
 - 2) $BC^2 = CA^2 + AB^2$
 - 3) $CA^2 = AB^2 + BC^2$
 - 4) $AB = AC - CB$
3. กำหนดความยาวของด้านทั้งสามของรูปสามเหลี่ยมมาให้อ้างอิงต่อไปนี้เป็นด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
 - 1) 1, 1, $\sqrt{2}$
 - 2) $\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, 2
 - 3) 3, 4, 5
 - 4) ถูกทุกข้อ
4. ข้อใดเป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
 - 1) 4, 7, 8
 - 2) 5, 6, 8
 - 3) 10, 11, 12
 - 4) 20, 21, 29

5. ข้อใดไม่เป็นความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก
- 1) 1.5 , 2 , 2.5
 - 2) 3 , 4 , 5
 - 3) 3.5 , 12 , 12.5
 - 4) 6 , 8 , 10
6. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 17 หน่วย และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 8 หน่วย ด้านที่เหลือยาวเท่ากับข้อใด
- 1) 15 หน่วย
 - 2) 16 หน่วย
 - 3) 18 หน่วย
 - 4) 20 หน่วย
7. สามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 24 หน่วย และด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 7 หน่วย สามเหลี่ยมมุมฉากรูปนี้มีความยาวรอบรูปเท่ากับข้อใด
- 1) 36 หน่วย
 - 2) 42 หน่วย
 - 3) 48 หน่วย
 - 4) 56 หน่วย
8. รูปสามเหลี่ยม RST มี $\hat{R}\hat{S}\hat{T}$ เป็นมุมฉากโดยกำหนดให้ด้านตรงข้าม \hat{R} , \hat{S} , \hat{T} ยาว r , s และ t หน่วยแล้วข้อใดต่อไปนี้เป็นจริง
- 1) $r + t = s$
 - 2) $s^2 = r^2 + t^2$
 - 3) $t^2 + s^2 = r^2$
 - 4) $t^2 = r^2 + s^2$
9. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากยาว ทั้งสองด้านยาว 6 เซนติเมตร ด้านตรงข้ามมุมฉากจะยาวเท่าไร
- 1) $6\sqrt{2}$ เซนติเมตร
 - 2) $12\sqrt{2}$ เซนติเมตร
 - 3) 12 เซนติเมตร
 - 4) 24 เซนติเมตร

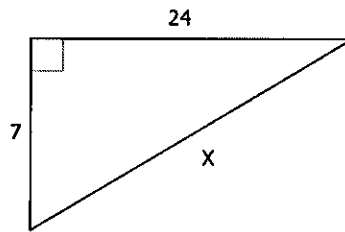
10. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 9 เซนติเมตร และมีพื้นที่ 36 ตารางเซนติเมตร รูปสามเหลี่ยมรูปนี้จะมีด้านตรงข้ามมุมฉากยาวเท่าใด
- 1) 4 เซนติเมตร
 - 2) 6 เซนติเมตร
 - 3) 8 เซนติเมตร
 - 4) 10 เซนติเมตร
11. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 24 นิ้ว และมีพื้นที่ทั้งหมด 84 ตารางนิ้ว ข้อใดต่อไปนี้เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉากด้านที่เหลือ
- 1) 10 นิ้ว
 - 2) 12 นิ้ว
 - 3) 24 นิ้ว
 - 4) 25 นิ้ว
12. สี่เหลี่ยมผืนผ้า ABCD มีด้านกว้าง 18 เมตร ด้านยาว 24 เมตรเส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้านี้ยาวจะเท่าใด
- 1) 25 เมตร
 - 2) 30 เมตร
 - 3) 35 เมตร
 - 4) 40 เมตร
13. กำหนดให้ a และ b เป็นความยาวของด้านประกอบมุมฉาก และ c เป็นความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉากของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่ง ถ้ากำหนดให้ $a = 13$ หน่วย และ $B = 84$ หน่วย แล้ว c มีค่าตรงกับข้อใด
- 1) 81 หน่วย
 - 2) 83 หน่วย
 - 3) 85 หน่วย
 - 4) 87 หน่วย

14. จากรูป ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมจัตุรัส ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง



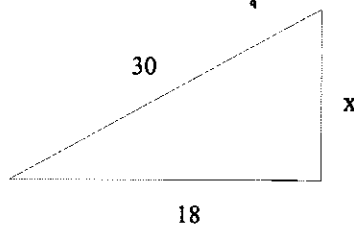
- 1) $WY^2 = 2WZ^2$
- 2) $WY^2 = 4WZ^2$
- 3) $WY^2 = WZ^2$
- 4) $2WY^2 = WX^2 + XY^2$

15. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาความยาวของด้านที่เหลื่อ



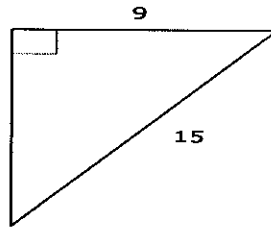
- 1) 15 หน่วย
- 2) 20 หน่วย
- 3) 25 หน่วย
- 4) 30 หน่วย

16. จากรูปที่กำหนดให้ ความยาวของด้านประกอบมุมฉากของด้านที่เหลื่อยาวเท่ากับข้อใด



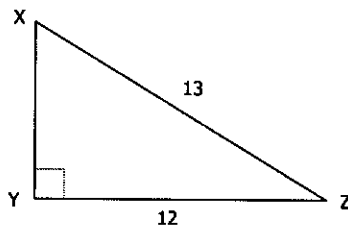
- 1) 18 หน่วย
- 2) 24 หน่วย
- 3) 32 หน่วย
- 4) 35 หน่วย

17. จากรูปที่กำหนดให้ต่อไปนี้มีควมยาวรอบรูปเท่ากับข้อใด



- 1) 36 หน่วย
- 2) 40 หน่วย
- 3) 42 หน่วย
- 4) 45 หน่วย

18. รูปสามเหลี่ยม XYZ ที่กำหนดให้ มีพื้นที่เท่ากับข้อใด

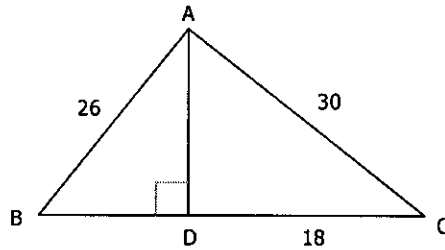


- 1) 30 ตารางหน่วย
- 2) 32 ตารางหน่วย
- 3) 35 ตารางหน่วย
- 4) 40 ตารางหน่วย

19. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาว 40 นิ้ว มีด้านตรงข้ามมุมฉากยาว 41 นิ้ว จงหาพื้นที่ของรูป สามเหลี่ยมมุมฉากนี้

- 1) 100 ตารางนิ้ว
- 2) 120 ตารางนิ้ว
- 3) 160 ตารางนิ้ว
- 4) 180 ตารางนิ้ว

20. จากรูปที่กำหนดให้จงหาความยาวด้าน BD



- 1) 10 หน่วย
 - 2) 12 หน่วย
 - 3) 14 หน่วย
 - 4) 16 หน่วย
21. จากรูปข้อที่ 20 พื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ADB มีค่าเท่ากับข้อใด
- 1) 100 ตารางหน่วย
 - 2) 120 ตารางหน่วย
 - 3) 150 ตารางหน่วย
 - 4) 160 ตารางหน่วย
22. รูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีด้านยาวด้านละ 6 เซนติเมตร รูปสามเหลี่ยมด้านเท่านี้ จะมีความสูงเท่ากับข้อใด
- 1) $2\sqrt{3}$ เซนติเมตร
 - 2) $3\sqrt{3}$ เซนติเมตร
 - 3) $2\sqrt{5}$ เซนติเมตร
 - 4) $5\sqrt{2}$ เซนติเมตร
23. รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปหนึ่งมีความยาวรอบรูปเท่ากับ 20 เซนติเมตร รูปสี่เหลี่ยมจัตุรัสรูปนี้ มีเส้นทแยงมุมยาวเท่ากับข้อใด
- 1) $2\sqrt{3}$ เซนติเมตร
 - 2) $2\sqrt{5}$ เซนติเมตร
 - 3) $4\sqrt{2}$ เซนติเมตร
 - 4) $5\sqrt{2}$ เซนติเมตร

24. เครื่องบินลำหนึ่ง บินไปทางทิศเหนือ 210 ไมล์ แล้วบินเลี้ยวไปทางทิศตะวันออกอีก 200 ไมล์ เครื่องบินลำนี้อยู่ห่างจากจุดเริ่มต้นกี่ไมล์

- 1) 220 ไมล์
- 2) 240 ไมล์
- 3) 260 ไมล์
- 4) 290 ไมล์

v

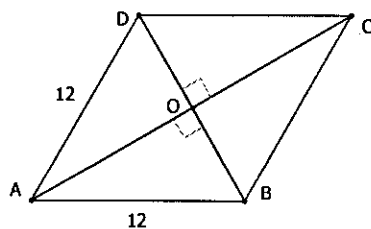
25. สี่เหลี่ยมขนมเปียกปูนมีด้านยาวด้านละ 17 เซนติเมตรมีเส้นทแยงมุมเส้นหนึ่ง 16 เซนติเมตร จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน

- 1) 120 ตารางเซนติเมตร
- 2) 160 ตารางเซนติเมตร
- 3) 240 ตารางเซนติเมตร
- 4) 320 ตารางเซนติเมตร

26. การเดินทางไกลไปตั้งค่ายพักแรมของลูกเสือกองหนึ่งต้องเดินทางออกจากโรงเรียนไปทางทิศตะวันออก 3 กิโลเมตร แล้วเดินต่อไปทางทิศเหนือ 7 กิโลเมตร จากนั้นต้องเดินทางขึ้นไปทางทิศตะวันออกอีก 5 กิโลเมตร ทิศเหนืออีก 8 กิโลเมตรจึงจะถึงที่ตั้งค่ายพักแรม ค่ายพักแรกอยู่ห่างจากโรงเรียนกี่กิโลเมตร

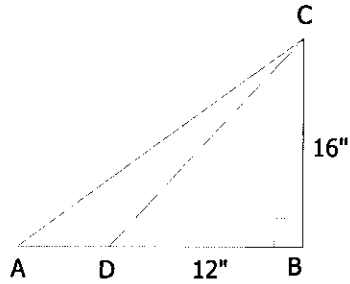
- 1) 16 กิโลเมตร
- 2) 17 กิโลเมตร
- 3) 18 กิโลเมตร
- 4) 19 กิโลเมตร

27. กำหนดให้ ABCD เป็นรูปสี่เหลี่ยมขนมเปียกปูน มีความยาวด้านละ 12 นิ้ว เส้นทแยงมุมเส้นหนึ่งยาว 12 นิ้ว อยากทราบว่าเส้นทแยงมุมเส้นที่เหลือยาวกี่นิ้ว



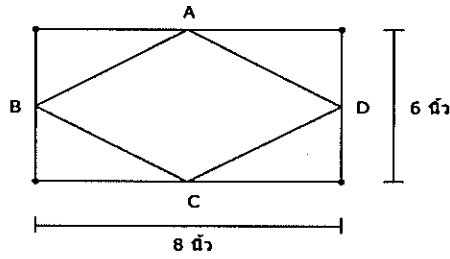
- 1) 2 นิ้ว
- 2) $2\sqrt{3}$ นิ้ว
- 3) 12 นิ้ว
- 4) $12\sqrt{3}$ นิ้ว

28. จากรูปที่กำหนดให้ $AB = CD$, $BD = 12''$, $BC = 16''$ จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยม ADC



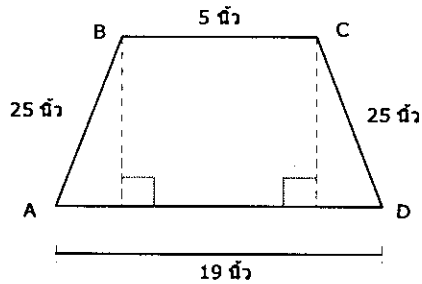
- 1) 52 ตารางนิ้ว
- 2) 64 ตารางนิ้ว
- 3) 72 ตารางนิ้ว
- 4) 84 ตารางนิ้ว

29. จากรูปที่กำหนดให้ จงหาความยาวรอบรูปของสี่เหลี่ยม ABCD



- 1) 10 นิ้ว
- 2) 15 นิ้ว
- 3) 18 นิ้ว
- 4) 20 นิ้ว

30. จากรูปจงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมคางหมู ABCD



- 1) 188 ตารางนิ้ว
- 2) 228 ตารางนิ้ว
- 3) 248 ตารางนิ้ว
- 4) 288 ตารางนิ้ว

เฉลยคำตอบแบบทดสอบหลังเรียน

1. 4)	2. 3)	3. 4)	4. 4)	5. 3)
6. 1)	7. 4)	8. 2)	9. 1)	10. 3)
11. 3)	12. 2)	13. 3)	14. 1)	15. 3)
16. 2)	17. 1)	18. 1)	19. 4)	20. 1)
21. 2)	22. 2)	23. 4)	24. 4)	25. 3)
26. 2)	27. 4)	28. 2)	29. 4)	30. 4)

ประวัติผู้ศึกษา

ชื่อ	นายโอบบุญ บุรพา
วัน เดือน ปี เกิด	19 มกราคม 2516
สถานที่เกิด	อำเภอบางมูลนาก จังหวัดพิจิตร
ประวัติการศึกษา	วท.บ. วิทยาศาสตร์บัณฑิต (อุตสาหกรรมเกษตร) มหาวิทยาลัยรังสิต 2540 ศษ.บ. ศึกษาศาสตรบัณฑิต (มัธยมศึกษา-คณิตศาสตร์) มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมมาธิราช 2543
สถานที่ทำงาน	โรงเรียนวังตะกูราษฎร์อุทิศ อำเภอบางมูลนาก จังหวัดพิจิตร
ตำแหน่ง	ครู