# ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด

นางประไพศรี เหง้าชัยภูมิ

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต
แขนงวิชาหลักสูตรและการสอน สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
พ.ศ. 2552

# The Effects of Mathematics Learning Activities Management Using the Geometer's Sketchpad Program on Learning Achievement in the Topic of Three – Dimensional Vector of Mathayom Suksa V Students at Roi-Et Wittayalai School in Roi-Et Province

**Mrs. Prapaisri Ngaochaiyaphum**

An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for

the Degree of Master of Curriculum and Instruction

School of Educational Studies

Sukhothai Thammathirat Open University

2009

| | |
|---|---|
| **หัวข้อการศึกษาค้นคว้าอิสระ** | ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด |
| **ชื่อและนามสกุล** | นางประไพศรี เหง้าชัยภูมิ |
| **แขนงวิชา** | หลักสูตรและการสอน |
| **สาขาวิชา** | ศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช |
| **อาจารย์ที่ปรึกษา** | รองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล |

คณะกรรมการสอบการศึกษาค้นคว้าอิสระได้ให้ความเห็นชอบการศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้แล้ว

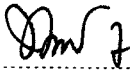
..... ประธานกรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล)

..... กรรมการ

(รองศาสตราจารย์ ดร. กัญจนา ลินทรัตนศิริกุล)

คณะกรรมการบัณฑิตศึกษา ประจำสาขาวิชาศึกษาศาสตร์ อนุมัติให้รับการศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต แขนงวิชาหลักสูตรและการสอน สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช



.....

(รองศาสตราจารย์ ดร. ทวีศักดิ์ จินดานุรักษ์])

ประธานกรรมการประจำสาขาวิชาศึกษาศาสตร์

วันที่ 23 เดือน กรกฎาคม พ.ศ. 2553

**ชื่อการศึกษาค้นคว้าอิสระ** ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด

**ผู้ศึกษา** นางประไพศรี เหง้าชัยภูมิ **ปริญญา** ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (หลักสูตรและการสอน)
**อาจารย์ที่ปรึกษา** รองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล **ปีการศึกษา** 2552

## บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติระหว่างก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด จำนวน 1 ห้องเรียน มีจำนวนนักเรียน 50 คน ได้มาโดยการสุ่มแบบกลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยคือ แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล ได้แก่ ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบค่าที

ผลการวิจัยพบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

**คำสำคัญ** โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เวกเตอร์ในสามมิติ มัธยมศึกษา

# กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้ สำเร็จลงได้ด้วยดีเพราะผู้ศึกษาได้รับความเมตตากรุณาอย่างดียิ่งจาก รองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล อาจารย์ที่ปรึกษาการศึกษาค้นคว้าอิสระ ที่ได้กรุณาให้ความช่วยเหลือแนะนำ ตรวจแก้ไขข้อบกพร่องในการจัดทำการศึกษาค้นคว้าอิสระด้วยความเอาใจใส่เป็นอย่างดียิ่ง ผู้ศึกษาขอขอบพระคุณเป็นอย่างสูง ที่ได้ให้ความช่วยเหลือด้วยดีตลอดมา

ขอขอบคุณคณาจารย์ในแขนงวิชาหลักสูตรและการสอนทุกท่านที่ได้กรุณาให้ความรู้และให้คำแนะนำในการศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้

ขอขอบคุณอาจารย์วนิดา ปาณีนิจ อาจารย์ชนิดา พลแสน และอาจารย์สิริลักษณ์ กลางสุข ที่กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจแก้ไขเครื่องมือในการศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้

ขอขอบคุณ ผู้บริหารโรงเรียน คณะครู และขอขอบใจนักเรียนโรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด ที่ได้ให้ความอนุเคราะห์ในการเก็บรวบรวมข้อมูล

ขอกราบขอบพระคุณ คุณพ่อประวัติ จตุเทน คุณแม่สงวน จตุเทน และขอขอบคุณ คุณประกอบ เหง้าชัยภูมิ ตลอดจนญาติพี่น้องทุกคน ที่ให้การสนับสนุนและคอยเป็นกำลังใจให้ด้วยดีตลอดมา

คุณค่าและประโยชน์ ของการศึกษาค้นคว้าอิสระครั้งนี้ ผู้ศึกษาขอมอบเป็นเครื่องแสดงความกตัญญูกตเวทิตา แด่บิดา มารดา ผู้ให้ชีวิต ให้การศึกษา ตลอดจนบูรพาจารย์ และผู้มีพระคุณทุกท่านที่ได้ให้ความรู้และอบรมสั่งสอนผู้ศึกษาเสมอมา

ประไพศรี เหง้าชัยภูมิ

กรกฎาคม 2553

# สารบัญ


หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย ..... ง

กิตติกรรมประกาศ ..... จ

สารบัญตาราง ..... ซ

บทที่ 1 บทนำ ..... 1

ความเป็นมาและความสำคัญ ..... 1

วัตถุประสงค์ของการวิจัย ..... 3

สมมติฐานของการวิจัย ..... 3

ขอบเขตของการวิจัย ..... 3

นิยามศัพท์เฉพาะ ..... 4

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ ..... 4

บทที่ 2 วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง ..... 5

โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต (The Geometer's Sketchpad : GSP) ..... 5

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ..... 8

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ..... 10

บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย ..... 15

ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง ..... 15

การเก็บรวบรวมข้อมูล ..... 19

การวิเคราะห์ข้อมูล ..... 19

บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล ..... 20

บทที่ 5 สรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ ..... 22

สรุปการวิจัย ..... 22

อภิปรายผล ..... 23

ข้อเสนอแนะ ..... 25

# สารบัญ (ต่อ)

หน้า

บรรณานุกรม ..... 26

ภาคผนวก ..... 30

ก คำแนะนำการใช้แผนการจัดการเรียนรู้/ แผนการจัดการเรียนรู้ ..... 31

ข แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค40204) ..... 97

ประวัติผู้ศึกษา ..... 103

# สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 3.1 แสดงการวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ และเวลาที่ใช้สอน เพื่อใช้สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ ..... 16

ตารางที่ 3.2 แสดงการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้ และจำนวนข้อสอบเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ..... 18

ตารางที่ 4.1 ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย ค่าร้อยละ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนสอบก่อนเรียนและหลังเรียน ..... 20

ตารางที่ 4.2 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียน ..... 21

# บทที่ 1
# บทนำ

## 1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย เป็นโรงเรียนที่มีการจัดการเรียนการสอนเทียบเคียงมาตรฐานสากล มีการบริหารจัดการด้วยระบบคุณภาพ โดยผู้เรียนมีศักยภาพเป็นพลโลกที่มีคุณธรรม มีความรับผิดชอบต่อสังคม มีความคิดสร้างสรรค์ สื่อสารได้สองภาษา และเป็นเลิศทางวิชาการ มีการจัดระดับการศึกษาเป็น 2 ระดับคือระดับมัธยมศึกษาตอนต้น (ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1-3) เป็นช่วงสุดท้ายของการศึกษาภาคบังคับ มุ่งเน้นให้ผู้เรียนได้สำรวจความถนัดและความสนใจของตัวเอง ส่งเสริมการพัฒนาบุคลิกภาพส่วนตน มีทักษะในการคิดวิจารณญาณ คิดสร้างสรรค์ และคิดแก้ปัญหา มีทักษะในการดำเนินชีวิต มีทักษะการใช้เทคโนโลยีเพื่อเป็นเครื่องมือในการเรียนรู้ มีความรับผิดชอบต่อสังคม มีความสมดุลทั้งด้านความรู้ ความคิด ความดีงาม และมีความภูมิใจในความเป็นคนไทย ตลอดจนใช้เป็นพื้นฐานในการประกอบอาชีพหรือการศึกษาต่อ ระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย (ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4-6) เน้นการเพิ่มพูนความรู้และทักษะเฉพาะด้านสนองตอบความสามารถ ความถนัด และความสนใจของผู้เรียนแต่ละคนทั้งด้านวิชาการและวิชาชีพ มุ่งพัฒนาตนและประเทศตามบทบาทของตน สามารถเป็นผู้นำ และผู้ให้บริการชุมชนในด้านต่าง ๆ (หลักสูตรโรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย, 2552) มีการจัดกระบวนการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นสำคัญตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่มุ่งพัฒนาผู้เรียนทุกคน ซึ่งเป็นกำลังของชาติให้เป็นมนุษย์ที่มีความสมดุลทั้งด้านร่างกาย ความรู้ คุณธรรม มีจิตสำนึกในความเป็นพลเมืองไทย และเป็นพลโลก ยึดมั่นในการปกครองตามระบอบประชาธิปไตยอันมีพระมหากษัตริย์ทรงเป็นประมุข มีความรู้และทักษะพื้นฐาน รวมทั้ง เจตคติ ที่จำเป็นต่อการศึกษาต่อ การประกอบอาชีพและการศึกษาตลอดชีวิต โดยมุ่งเน้นผู้เรียนเป็นสำคัญบนพื้นฐานความเชื่อว่า ทุกคนสามารถเรียนรู้และพัฒนาตนเองได้เต็มตามศักยภาพ (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551)

การจัดกระบวนการเรียนการสอนสำหรับวิชาคณิตศาสตร์ให้สอดคล้องตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ที่กล่าวว่าคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญยิ่งต่อการพัฒนาความคิดของมนุษย์ ทำให้มนุษย์มีความคิดสร้างสรรค์ คิดอย่างมีเหตุผล เป็นระบบ ระเบียบ

มีแบบแผน สามารถวิเคราะห์ปัญหาหรือสถานการณ์ได้อย่างถี่ถ้วนรอบคอบ ช่วยคาดการณ์ วางแผน ตัดสินใจ แก้ปัญหา และนำไปใช้ในชีวิตประจำวันได้อย่างถูกต้องเหมาะสม นอกจากนี้คณิตศาสตร์ยังเป็นเครื่องมือในการศึกษาทางด้านวิทยาศาสตร์เทคโนโลยีและศาสตร์อื่น ๆ คณิตศาสตร์จึงมีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิตช่วยพัฒนาคุณภาพชีวิตให้ดีขึ้น และอยู่ร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข (กระทรวงศึกษาธิการ, 2551) จึงเป็นหน้าที่ความรับผิดชอบของสถานศึกษาและครูผู้สอนที่จะจัดกระบวนการเรียนรู้ให้เหมาะสมและสอดคล้องกับความแตกต่างระหว่างบุคล ที่มุ่งเน้นการฝึกทักษะกระบวนการคิด การจัดการ การเผชิญสถานการณ์ และการประยุกต์ความรู้มาใช้ป้องกันและแก้ไขปัญหา จัดกิจกรรมให้ผู้เรียนได้เรียนรู้จากประสบการณ์จริง ฝึกการปฏิบัติให้ทำได้ คิดเป็น ทำเป็น แก้ปัญหาเป็น ส่งผลให้ผู้เรียนได้พัฒนาความสามารถได้เต็มตามศักยภาพ

จากการที่ผู้วิจัยได้ปฏิบัติการสอนรายวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค40204 เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ปรากฏว่าปัญหาที่เป็นอุปสรรค์ในการจัดกระบวนการเรียนการสอนคือจำนวนนักเรียนในแต่ละห้องมีจำนวนมาก และคละความสามารถครูดูแลได้ไม่ทั่วถึง ประกอบกับธรรมชาติของวิชาคณิตศาสตร์ที่มีเนื้อหาส่วนใหญ่เป็นนามธรรม จึงยากต่อการทำความเข้าใจและการเรียนรู้ของนักเรียน ในเรื่องเวกเตอร์สามมิติ เป็นเรื่องที่เกี่ยวข้องกับเรขาคณิต การจัดการเรียนการสอนในห้องเรียนที่ครูใช้กระดานเป็นสื่อประกอบการสอน ต้องเสียเวลาในการวาดภาพและสร้างรูปในการทบทวนความรู้ และการสอนความรู้ใหม่ นักเรียนบางส่วนขาดความสนใจในการเรียน ครูต้องเสียเวลาในการสอนซ้ำเนื้อหาเดิมหลายครั้ง เพื่อให้นักเรียนเข้าใจในบทเรียนมากขึ้น ประกอบกับนักเรียนบางคนมีพื้นฐานทางการเรียนคณิตศาสตร์ไม่ดี ทำให้เบื่อ และมีเจตคติที่ไม่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์ ส่งผลให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนต่ำ

จากปัญหาดังกล่าวครูจึงควรจัดสภาพแวดล้อมในห้องเรียนที่เอื้อต่อการเรียนรู้ ปรับเปลี่ยนรูปแบบการสอน วิธีการสอน เทคนิคการสอน และใช้เทคโนโลยีประกอบการจัดการเรียนการสอนของครู ให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุด โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) เป็นซอฟต์แวร์ที่เป็นพลวัตร ที่ช่วยทำให้ผู้เรียนมีโอกาส สำรวจและค้นพบแนวคิดต่างๆในวิชาเรขาคณิต พีชคณิต แคลคูลัส ตลอดจนถึงการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน และการหาปริพันธ์ การใช้ GSP ทำให้การสอนคณิตศาสตร์เช่น การแปลง การเลื่อนขนาน การหมุนและการสะท้อน ภาคตัดกรวย เวคเตอร์ แคลคูลัส และฟังก์ชันตรีโกณมิติ เป็นไปอย่างถูกต้อง ชัดเจนและง่ายต่อการทำความเข้าใจ ทำให้ผู้เรียนเกิดทักษะในการนึกภาพในสมอง (visualize skills) ของตนเอง เกิดทักษะการสร้างตัวแบบเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical modeling) ทำให้มีทักษะการคาดเดา (conjectures) ที่สามารถนำไปสู่การพิสูจน์

ผลจากงานวิจัยทั้งในประเทศไทยและต่างประเทศ พบว่า GSP เป็นสื่อที่สำคัญในการพัฒนาทักษะที่เป็นองค์ประกอบทั้งหมดของการคิดเชิงคณิตศาสตร์ GSP ทำให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตัวเอง เกิดทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ ทำให้มีความรู้ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง ผู้เรียนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์โดยใช้ GSP จะมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ และ ตระหนักถึงคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง

จากประโยชน์และเหตุผลดังกล่าว ทำให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด

## 2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติระหว่างก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

## 3. สมมติฐานของการวิจัย

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ หลังเรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตสูงกว่าก่อนเรียน

## 4. ขอบเขตของการวิจัย

**4.1 ประชากร** เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด จำนวน 18 ห้อง มีจำนวนนักเรียน 857 คน โดยจัดนักเรียนแบบคละความสามารถ

**4.2 ระยะเวลาในการวิจัย ระยะเวลาในการวิจัยครั้งนี้คือ** ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 10 ชั่วโมง

**4.3 ตัวแปรที่ใช้ในการวิจัย**

***4.3.1 ตัวแปรต้น*** คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

***4.3.2 ตัวแปรตาม*** คือ ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

## 5. นิยามศัพท์เฉพาะ

**5.1 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต** หมายถึง การจัดการเรียนการสอนเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad : GSP เป็นสื่อประกอบในการอธิบายเนื้อหาสาระของครู

**5.2 ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์** หมายถึง ความสามารถของนักเรียนจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ซึ่งวัดผลคะแนนที่ได้จากการทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

**5.3 โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต** หมายถึง โปรแกรมคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต รูปกราฟต่างๆ และสามารถเลื่อน หมุน ยืด หดได้ วัดระยะ วัดขนาดของมุม คิดคำนวณ ทำให้นักเรียนสามารถสืบเสาะ ค้นหา คาดเดา และสรุปหาเหตุผลด้วยตนเอง

## 6. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

6.1 ครูได้พัฒนารูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และได้สื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

6.2 ครูได้พัฒนารูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตประกอบการเรียนการสอนในเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่นๆ

# บทที่ 2
# วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่องผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด ครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาวรรณกรรมที่เกี่ยวข้องดังนี้

1. โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต
2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต
   3.1 งานวิจัยในประเทศ
   3.2 งานวิจัยต่างประเทศ

## 1. โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต (The Geometer's Sketchpad : GSP)

The Geometer's Sketchpad (GSP) (ไพจิตร สะดวกการ และคณะ. 2549) เป็นซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตเชิงพลวัต (Dynamic Geometry) ที่ใช้สร้างรูปเรขาคณิตที่เคลื่อนไหวได้ ซึ่งนำไปสู่การค้นหาสมบัติต่างๆ ทางเรขาคณิต โดยผู้ใช้ซอฟต์แวร์นี้สร้างรูปแล้วสามารถสำรวจ ตั้งข้อคาดเดา และสืบเสาะตรวจค้นเพื่อยืนยันเหตุผลของตนเอง ทำให้เกิดจินตนาการในการค้นคว้าหาเหตุผล เพื่อเพิ่มพูนความรู้ ตลอดจนทำให้เกิดความคงทนทางการเรียนรู้ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี : เว็บไซต์)

GSP สามารถนำไปใช้ประกอบการเรียนการสอนได้หลากหลายเนื้อหาทางเรขาคณิต เช่นเส้นตรงและมุม การสร้าง ความเท่ากันทุกประการ ทฤษฎีบทปีทาโกรัส เส้นขนาน ความคล้าย วงกลม นอกจากนี้ยังสามารถนำไปใช้ในเรื่องของตรีโกณมิติ เวกเตอร์ เรขาคณิตวิเคราะห์ ฟิสิกส์ การเขียนแบบ ฯลฯ

โปรแกรมจีเอสพีหรือ The Geometer's Sketchpad โดยทั่วไปนิยมเรียกกันว่า Sketchpad หรือ GSP ในปัจจุบันประเทศต่างๆ ได้นำไปใช้ในการจัดการเรียนการสอนมากกว่า 60 ประเทศทั่วโลก ทั้งยังได้บรรจุในหลักสูตรคณิตศาสตร์ระดับต่างๆ กว่า 10 ประเทศ เช่น สิงคโปร์ มาเลเซีย ญี่ปุ่น จีน อังกฤษ อเมริกา แคนนาดา ออสเตรเลีย เป็นต้น และได้มีการแปลโปรแกรมเป็น

ภาษาต่างๆ 15 ภาษา ได้แก่ ฝรั่งเศส สเปน เดนมาร์ก เกาหลี ญี่ปุ่น รัสเซีย นอรเวย์ ฟินแลนด์ อาหรับ เชคโก เปรู เยอรมัน จีน อังกฤษ และไทย (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. 2548 : 4)

โปรแกรมจีเอสพี (The Geometer's Sketchpad ;GSP) พัฒนาขึ้นเป็นครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ.1991 โดยแจคคิว (Jachiew) ในโครงการพัฒนาเรขาคณิตที่มองเห็นได้ (Visual Geometry Project) ของมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Science Foundation : NSF) ภายใต้การนำของคลอทซ์ (Klotz) แห่งวิทยาลัยสวาทมอร์ (Swartmore College) และชาทชไนเดอร์ Schatschneider) แห่งมหาวิทยาลัยมอราเวียน (Moravian College) ในรัฐแพนซิลวาเนีย ประเทศสหรัฐอเมริกา ในระยะแรกซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ถูกพัฒนาขึ้นเป็นรุ่นเบต้า (Beta Version) เพื่อใช้กับเครื่องแมคอินทอช (Macintosh) ต่อมาในปี ค.ศ.1993 ได้พัฒนาขึ้นสำหรับใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ระบบปฏิบัติการแบบวินโดวส์ (Window) ปี ค.ศ.1995 พัฒนาขึ้นเป็นซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์รุ่น 3 โดยมีสำนักพิมพ์ คีย์ เคอร์ริคิวลัม (Key Curriculum Press) เป็นผู้สนับสนุนในการจัดทำวีดิทัศน์ หนังสือเรียน และสื่อสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ จึงทำให้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์แพร่หลายในโรงเรียนของประเทศสหรัฐอเมริกา สำหรับการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอนเรขาคณิตนั้น ในระยะแรกกำหนดให้ใช้ในโรงเรียนมัธยมศึกษาที่มีการเรียนการสอนวิชาเรขาคณิต ผลของการใช้เบื้องต้นสามารถดึงดูดความสนใจของผู้เรียนทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนเรขาคณิตและเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ

**การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์**

การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาจนถึงระดับมหาวิทยาลัยนั้น สำนักพิมพ์ คีย์ เคอร์ริคิวลัม (Key Curriculum Press) ได้กล่าวไว้สรุปได้ว่า โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือที่นักเรียนสามารถใช้กับเนื้อหาเรขาคณิตแบบ Euclidean หรือ Non- Euclidean พีชคณิต แคลคูลัส และตรีโกณมิติ ในการเรียนรู้มโนทัศน์ทางเรขาคณิตนั้นโปรแกรม The Geometer's Sketchpad สามารถช่วยในการสร้างรูปเรขาคณิตในมิติต่างๆ ทำให้นักเรียนได้เกิดการสำรวจ และทำความเข้าใจ ในเนื้อหาเรขาคณิตได้ง่ายขึ้นกว่าการสอนแบบเดิม โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือที่ช่วยกระตุ้นให้เกิดกระบวนการค้นพบ โดยนักเรียนจะเห็นภาพในตอนแรกแล้วทำการวิเคราะห์ปัญหา หลังจากนั้นนักเรียนจะตั้งข้อคาดเดาก่อนที่จะทำการพิสูจน์ในเรื่องนั้น ๆ กระบวนการเรียนรู้จากโปรแกรม Geometer's Sketchpad จะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาพื้นฐานของตนเองในเชิงรูปธรรมก่อนแล้วค่อยๆ พัฒนาการเรียนรู้ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น ผู้ใช้จะสามารถสร้างรูปเรขาคณิต วัดขนาด สัดส่วนของเส้นตรง ส่วนโค้ง มุม และพื้นที่ได้รวดเร็วและถูกต้อง ทั้งยัง

ช่วยให้ผู้เรียนสร้างรูปสองมิติและสามมิติบนหน้าจอแล้วทำกิจกรรมสำรวจการยืด หด เลื่อน รูปในมุมมองต่าง ๆ เพื่อเรียนรู้มโนทัศน์ทางเรขาคณิตได้รวดเร็ว นำไปสู่การค้นหาสมบัติต่าง ๆ ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้น ดึงดูดความสนใจ เกิดจินตนาการในการค้นคว้าหาเหตุผลและเพิ่มพูนความรู้ ซึ่งการเรียนรู้เรขาคณิตในลักษณะดังกล่าวจะทำให้ผู้เรียนมองสิ่งต่าง ๆ รอบตัวได้อย่างมีความหมายมากขึ้น การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad จะช่วยให้การสร้างรูปได้รวดเร็วทำให้การแก้ปัญหาในเรื่องที่ยากและซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพและประหยัดเวลาในการเรียนรู้ นอกจากนี้ยังใช้งานง่าย ใช้เวลาน้อยในการศึกษาวิธีการใช้งาน ผู้สอนสามารถทำเป็นสคริปต์ใช้ในการสาธิตหรือสรุปให้ผู้เรียนศึกษาตามเพื่อการทบทวนเนื้อหาได้

**ลักษณะสำคัญของโปรแกรม The Geometer's Sketchpad** มีดังนี้

1. ความสามารถในการใช้คำจำกัดความในเรื่องกราฟ และความแตกต่างของเครื่องมือที่สมบูรณ์แบบซึ่งพัฒนาให้ใช้ได้กับวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรขาคณิต ตรีโกณมิติ พีชคณิตและแคลคูลัส อีกทั้งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในวิชาวิทยาศาสตร์ เกี่ยวกับกลศาสตร์และวิชาศิลปะ

2. รูปแบบการเคลื่อนที่ (Animation) ทำให้มีความยืดหยุ่นและง่ายต่อการใช้

3. สามารถใช้งานได้หลากหลายด้วยลักษณะพิเศษเฉพาะ และสร้างแฟ้มเอกสารทางอิเล็กทรอนิกส์ การนำเสนอ และการออกแบบกิจกรรม การแบ่ง/ผสาน และการแก้ไขในการคำนวณ สามารถดัดแปลงให้ใช้งานได้ง่าย เป็นต้น

4. ใช้ในการคำนวณและฟังก์ชันต่างๆ ง่ายต่อการดัดแปลงรูป (Split/Merge)

5. ผู้ใช้สามารถบูรณาการไปสู่กิจกรรมทางเรขาคณิตบนเว็บ (Web-base) ได้

6. สามารถใช้ได้ทั้งระบบปฏิบัติการวินโดว์ (Window) และแมคอินทอช (Macintosh)

7. สามารถสร้างรูปที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้ง่ายขึ้น

8. เพิ่มกราฟิกให้มีสีสันของวัตถุ ตัวอักษร และพื้นหลังที่น่าประทับใจ

9. ใช้เพิ่มสีในมิติพิเศษ (Parametric Colour) ในมุมมองที่มากขึ้น ทำให้ง่ายต่อการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนทั้งในระดับเริ่มต้นและระดับสูง

10. สามารถเลือกวัตถุ (Multiple Objects) ได้ง่ายและมากขึ้น

**การใช้งานโปรแกรม The Geometer's Sketchpad** จะใช้ในงานที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

1. สร้างรูปเพื่อศึกษาทฤษฎีของยูคลิดและนอกระบบยูคลิด โดยใช้เมนูคำสั่งเครื่องมือการวาดภาพในกล่องเครื่องมือ และคำสั่งในเมนูการสร้าง

2. ปรับเปลี่ยนรูปโดยใช้คำสั่งใน Transformation Menu ในการเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน การย่อขยาย และทำซ้ำ เพื่อกำหนด คำนวณ และบอกปริมาณต่างๆ

3. ป้อนข้อมูลผลการวิเคราะห์ทางเรขาคณิต เพื่อให้แสดงในรูปการสร้างกราฟในระบบแกนมุมฉากหรือระบบโพลาร์

4. คำนวณและแสดงอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆ ทั้งในรูปของกราฟและสัญลักษณ์

5. สร้างภาพเคลื่อนไหวเพื่อแสดงกราฟของฟังก์ชันไซน์และสำรวจเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

จากที่กล่าวข้างต้น ผู้วิจัยมีความเห็นว่าโปรแกรม **The Geometer's Sketchpad** เป็นสื่อที่สำคัญในการพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ ทำให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง ทำให้มีความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง นอกจากนี้ยังทำให้ผู้เรียนมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตระหนักถึงคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง สามารถพัฒนาศักยภาพของผู้เรียนได้ถึงขั้นสูงสุด

## 2. ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

### 2.1 ความหมาย

ผลสัมฤทธิ์ ตรงกับคำว่า "Achievement" แปลว่า ได้รับ หรือผลสำเร็จ นักการศึกษาได้ให้ความหมาย คำจำกัดความของคำว่า ผลสัมฤทธิ์ ไว้ดังนี้

กู๊ด (พัชระ งามชัด. 2549 : 14 ; อ้างอิงมาจาก Good. 1973 : 7) ได้ให้ความหมายของผลสัมฤทธิ์ หมายถึง การประสบความสำเร็จ (Accomplish) หรือสมรรถภาพ (Performance) ในการใช้ทักษะหรือใช้ความรู้ ส่วนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง การได้รับความรู้ (Knowledge Attained) การพัฒนาทักษะทางการเรียนในโรงเรียน ซึ่งสามารถสังเกตและวัดได้โดยใช้แบบทดสอบมาตรฐานหรือใช้แบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้น หรืออาจใช้แบบทดสอบทั้งสองชนิด

รีเบอร์ (พัชระ งามชัด. 2549 : 15 ; อ้างอิงมาจาก Reber. 1985 : 5) ได้ให้ความหมาย ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ระดับความสามารถทางวิชาการของบุคคล ซึ่งสามารถวัดได้โดยใช้แบบทดสอบมาตรฐาน

ไพศาล หวังพานิช (2526 : 89) กล่าวว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คุณลักษณะและประสบการณ์เรียนรู้ที่เกิดจากการฝึกอบรมหรือจากการสอน จึงเป็นการตรวจสอบความสามารถหรือความสัมฤทธิ์ของบุคคลว่าเรียนรู้แล้วเท่าไร มีความสามารถชนิดใด

พวงรัตน์ ทวีรัตน์ (2530 : 29) ให้ความหมายผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง คุณลักษณะรวมถึงความรู้ความสามารถของบุคคลอันเป็นผลมาจากการเรียนการสอน หรือ

มวลประสบการณ์ทั้งปวงที่บุคคลได้รับการเรียนการสอน ทำให้บุคคลเกิดการเปลี่ยนแปลงพฤติกรรมในด้านต่าง ๆ ของสมรรถภาพสมอง

สรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง ความสามารถในการเข้าถึงความรู้ (Knowledge Attained) การพัฒนาทักษะในการเรียนโดยอาศัยความพยายามจำนวนหนึ่ง และแสดงออกในรูปของความสำเร็จ ซึ่งสามารถสังเกตและวัดได้ด้วยเครื่องมือทางจิตวิทยาหรือแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั่วไป

**2.2 การวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน**

ในการวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน จำเป็นต้องอาศัยเครื่องมือในการที่จะวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน นั่นคือ แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ซึ่งได้มีผู้ให้ความหมายไว้ดังนี้

เยาวดี วิบูลย์ศรี (2540 : 16) ให้นิยามว่า แบบสอบผลสัมฤทธิ์ คือ แบบสอบที่สร้างขึ้นเพื่อใช้ในการวัดผลของการเรียนหรือการสอน

ล้วน สายยศ และอังคณา สายยศ (2538 : 171-172) ได้ให้ความหมายของแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไว้ว่า เป็นแบบทดสอบที่วัดความรู้ของนักเรียนที่ได้เรียนไปแล้วซึ่งมักจะเป็นข้อคำถามให้นักเรียนตอบด้วยกระดาษและดินสอกับให้นักเรียนปฏิบัติจริง ซึ่งแบ่งแบบทดสอบประเภทนี้ได้เป็น 2 พวก คือ

1. แบบทดสอบของครู หมายถึง ชุดของข้อคำถามที่ครูเป็นผู้สร้างขึ้น ซึ่งเป็นข้อคำถามที่ถามเกี่ยวกับความรู้ที่นักเรียนได้เรียนในห้องเรียน ว่านักเรียนมีความรู้มากแค่ไหนบกพร่องส่วนใดจะได้สอนซ่อมเสริม หรือเป็นการวัดดูความพร้อมที่จะเรียนบทเรียนใหม่ ซึ่งขึ้นอยู่กับความต้องการของครู

2. แบบทดสอบมาตรฐาน หมายถึง แบบทดสอบที่สร้างขึ้นจากผู้เชี่ยวชาญในแต่ละสาขาวิชาหรือจากครูที่สอนวิชานั้น แต่ผ่านการทดลองหาคุณภาพหลายครั้งจนกระทั่งมีคุณภาพดีพอ จึงสร้างเกณฑ์ปกติของแบบทดสอบนั้น สามารถใช้เป็นหลักเปรียบเทียบผลเพื่อประเมินค่าของการเรียนการสอนในเรื่องใดๆ ก็ได้ แบบทดสอบมาตรฐานจะมีคู่มือดำเนินการสอบบอกถึงวิธีการสอบ และยังมีมาตรฐานในด้านการแปลผลคะแนนด้วยทั้งแบบทดสอบที่ครูสร้างขึ้นและแบบทดสอบมาตรฐาน มีวิธีการในการสร้างข้อคำถามเหมือนกัน เป็นคำถามที่วัดเนื้อหาและพฤติกรรมที่ได้สอนไปแล้ว จะเป็นพฤติกรรมที่สามารถตั้งคำถามวัดได้ ซึ่งควรวัดให้ครอบคลุมพฤติกรรมด้านต่างๆ ดังนี้

1. วัดด้านความรู้ความจำ
2. วัดด้านความเข้าใจ

3. วัดด้านการนำไปใช้

4. วัดด้านการวิเคราะห์

5. วัดด้านการสังเคราะห์

6. วัดด้านการประเมินค่า

สมนึก ภัททิยธนี (2544 : 73) แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หมายถึง แบบทดสอบที่วัดสมรรถภาพสมองด้านต่าง ๆ ที่นักเรียนได้รับการเรียนรู้ผ่านมาแล้ว อาจแบ่งได้เป็น 2 ประเภท คือ แบบทดสอบที่ครูสร้าง กับแบบทดสอบมาตรฐาน

จากที่กล่าวมาสามารถสรุปได้ว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ หมายถึง ความรู้ ความสามารถ และการพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ของบุคคลอันเป็นผลที่เกิดจากการเรียนการสอน การฝึกฝนหรือประสบการณ์ต่างๆ ทั้งในและนอกโรงเรียน

## 3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

### 3.1 งานวิจัยในประเทศ

สุจิรา มุสิกเจริญ (2542 : 50) ได้ศึกษาเปรียบเทียบความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเส้นขนานและความคล้ายของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้ และไม่ใช้โปรแกรมจีเอสพี ตัวอย่างประชากรนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โรงเรียนสาธิตมหาลัยศิลปากร จังหวัดนครปฐม จำนวน 2 ห้องเรียน โดยกลุ่มทดลองเรียนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพี ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนโดยไม่ใช้โปรแกรมจีเอสพี ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพีมีความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเส้นขนาน และความคล้าย ไม่แตกต่างจากนักเรียนที่เรียนโดยไม่ใช้โปรแกรมจีเอสพีอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

อรรถศาสตร์ นิมิตพันธ์ (2542 : 61-62) ได้ศึกษาผลของการใช้โปรแกรมจีเอสพีประกอบกิจกรรมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4 ขั้น ที่มีต่อความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องความเท่ากันทุกประการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย นนทบุรี จำนวน 44 คน ที่มีระดับผลการเรียนทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ดำเนินการสอนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพีประกอบกิจกรรมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4 ขั้น ซึ่งประกอบด้วย สำรวจ ตั้งข้อความคาดการณ์ สืบเสาะหาเหตุผล และสรุปผล ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพีประกอบกิจกรรมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4 ขั้น มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการผ่าน

เกณฑ์ร้อยละ 60 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพีประกอบกิจกรรมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4 ขั้น มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความเท่ากันทุกประการ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

วัชรสันต์ อินธิสาร (2547 : 95-96) ได้ศึกษาผลของการพัฒนามโนทัศน์ทางเรขาคณิตและเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ มีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนโดยใช้โปรแกรมThe Geometer's Sketchpad แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงมีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตสูงกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางและต่ำ และนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางมีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตสูงกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ นักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ มีเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad แตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์สูงมีเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางและต่ำและนักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ปานกลางมีเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ต่ำ

สุสนา ทิพย์หมัด (2548 : 30-31) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์และเจตคติทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างการสอนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพีในเครื่องคิดเลขเชิงกราฟกับการสอนปกติ พบว่า นักเรียนที่ได้รับการสอนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพีในเครื่องคิดเลขเชิงกราฟมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องการแปลงทางเรขาคณิตไม่แตกต่างกับนักเรียนที่ได้รับการสอนแบบปกติ และมีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการแปลงทางเรขาคณิตแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

เรณุวัฒน์ พงษ์อุทธา (2550 : 92) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง พาราโบลา เจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดวิเคราะห์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ระหว่างการจัดกิจกรรมโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นสื่อกับการสอนตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นสื่อมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องพาราโบลา เจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการวิเคราะห์ สูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

วิมล อยู่พิพัฒน์ (2551 : 71-72) ได้ศึกษาบทเรียนปฏิบัติการโดยใช้โปรแกรม GSP (GEOMETER'S SKETCHPAD) ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง การวัด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การวัดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภายหลังได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนปฏิบัติการโดยใช้โปรแกรม GSP ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง การวัด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

วรวรรณ กฤตยากรนุพงศ์ (2551 : 54) ได้ศึกษาการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและซอฟต์แวร์เรขาคณิตแบบพลวัตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนกลุ่มตัวอย่างได้คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 60 ขึ้นไป คิดเป็นร้อยละ 80.65 ของจำนวนนักเรียนที่เป็นกลุ่มตัวอย่างทั้งหมด และนักเรียนกลุ่มตัวอย่างมีความพึงพอใจหลังจากเรียนเรื่องความเท่ากันทุกประการ โดยใช้การแปลงทางเรขคณิตและซอฟต์แวร์แบบพลวัตอยู่ในระดับมาก

กรรณิกา ผาสุข (2549 : 116-117) ได้เปรียบเทียบผลการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างการเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับการเรียนประกอบโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP) ผลการวิจัยพบว่า บทเรียนคอมพิวเตอร์มีประสิทธิภาพ เท่ากับ 78.09/76.63 แผนการจัดการเรียนรู้ประกอบโปรแกรม GSP มีประสิทธิภาพ เท่ากับ 79.13/76.41 ซึ่งเป็นไปตามเกณฑ์ที่คาดหวังไว้คือ 75/75 บทเรียนคอมพิวเตอร์ที่พัฒนาขึ้นมีดัชนีประสิทธิผล เท่ากับ 0.6133 และแผนการจัดการเรียนรู้ประกอบโปรแกรม GSP มีดัชนีประสิทธิผล เท่ากับ 0.6401 นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับนักเรียนที่เรียนด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนไม่แตกต่างกัน นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับนักเรียนที่เรียนด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP มีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.1 และมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์หลังเรียนไม่แตกต่างกัน นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับนักเรียนที่เรียนด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP มีเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.1 นักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับนักเรียนที่เรียนด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP มีความพึงพอใจต่อการเรียนโดยรวมอยู่ในระดับมาก และนักเรียนที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับนักเรียนที่เรียน

ด้วยการเรียนประกอบโปรแกรม GSP มีความคงทนในการเรียนรู้หลังเรียนไปแล้วได้ร้อยละ 99.15 และ 98.98 ของคะแนนทดสอบหลังเรียน

ชนิศวรา ฉัตรแก้ว (2549 : 92-94) ได้ศึกษาการพัฒนาหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตและลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตรูปแบบแวนฮีลีโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตแบบพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตที่สร้างขึ้นมีลำดับขั้นความคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลีเพิ่มขึ้นมากที่สุดในขั้น 2 ซึ่งเป็นการพิสูจน์แบบนิรนัยอย่างไม่เป็นแบบแผน นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่เรียนด้วยหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตที่สร้างขึ้นมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนเรขาคณิตโดยคะแนนเฉลี่ยหลังจากเรียนและก่อนการเรียนแตกต่างกันอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ส่วนใหญ่มีความคิดที่ดีต่อการจัดหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตโดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตแบบพลวัตและการใช้โปรแกรม GSP มีความเหมาะสมในการเรียนหน่วยการเรียนรูปเรขาคณิต

**3.2 งานวิจัยต่างประเทศ**

โกรแมน (Groman,1996 : website) ได้ศึกษาการใช้โปรแกรม GSP ในการสอนนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาของเมืองออสวีโก โดยโปรแกรม GSP เป็นโปรแกรมที่ใช้เป็นเครื่องมือในการสร้างรูปเรขาคณิตสองมิติและรูปเรขาคณิตสามมิติได้อย่างรวดเร็ว ซึ่งนักเรียนส่วนใหญ่ที่ได้เรียนเรขาคณิตโดยผ่านโปรแกรม GSP ทำให้นักเรียนมีเจตคติที่ดี นักเรียนเรียนรู้และสร้างความเข้าใจทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง ครูลดบทบาทในการเป็นผู้บอกความรู้ มาใช้โปรแกรม GSP ในการผสมผสานความรู้ของรูปทรงเรขาคณิต สิ่งเหล่านี้ตรงกับความต้องการของนักเรียนทำให้เรียนรู้อย่างมีความสุข

อัลเมกดาดี้ (Almeqdadi, 2000 : website) ได้ศึกษาผลของการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ที่มีต่อความเข้าใจมโนทัศน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนในประเทศจอร์แดน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนโรงเรียนสาธิต มหาวิทยาลัยยาร์มอก แบ่งเป็นกลุ่มทดลองซึ่งสอนโดยใช้โปรแกรมThe Geometer's Sketchpad และกลุ่มควบคุมสอนแบบปกติ กลุ่มละ1 ห้อง พบว่า ความเข้าใจในมโนทัศน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่าก่อนเรียน และสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

แม็คคลินต๊อค (McClintock, 2002 : website) ได้ศึกษาเกี่ยวกับการเรียนแบบคลินิกและการเรียนเชิงคุณภาพ โดยตรวจสอบการพัฒนาความคิดทางเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้นและนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย โดยเฉพาะในส่วนที่เกี่ยวกับรูปทรง

สามมิติ เครื่องมือที่ใช้ในการศึกษาครั้งนี้ได้แก่ โปรแกรม GSP ผลการศึกษาพบว่า โปรแกรม GSP มีผลในทางบวกเกี่ยวกับการเรียนรู้ของนักเรียนเรื่องรูปทรงสามมิติ

แม็คเกรกอร์ และโทมัส (MacGregor and Thomas, 2002 : website) ได้ศึกษาผลกระทบของการสอนนักเรียนโดยใช้โปรแกรม GSP และซอฟต์แวร์อื่นๆ ซึ่งเป็นเครื่องมือทางเทคโนโลยี ที่นำมาใช้สอนเรื่องรูปทรงเรขาคณิต การเรียนการสอนที่ยึดผู้เรียนเป็นศูนย์กลางโดยใช้โปรแกรม GSP ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยใช้โปรแกรม GSP มีความรู้ความเข้าใจมีความคิดรวบยอดมากขึ้น

จากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวข้องทั้งในประเทศและต่างประเทศ สามารถสรุปได้ว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ทำให้นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน ส่งเสริมให้นักเรียนได้สร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง มีความสามารถในการคิดวิเคราะห์ และมีเจตคติที่ดีต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ดังนั้นผู้วิจัยจึงสนใจที่จะนำโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต มาเป็นสื่อในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เพื่อเป็นแนวทางในการพัฒนาการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ต่อไป

# บทที่ 3
# วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่องผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด มีวิธีดำเนินการ ดังนี้

1. ประชากร และกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การวิเคราะห์ข้อมูล

## 1. ประชากร และกลุ่มตัวอย่าง

**1.1 ประชากร** เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด จำนวน 18 ห้อง มีจำนวนนักเรียน 857 คน โดยจัดชั้นเรียนแบบคละความสามารถ

**1.2 กลุ่มตัวอย่าง** เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด จำนวน 1 ห้องเรียน มีจำนวนนักเรียน 50 คน ได้มาโดยการสุ่มแบบกลุ่ม

## 2. เครื่องมือการวิจัย

เครื่องมือการวิจัย ประกอบด้วย แผนการจัดการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 1 ฉบับ เป็นข้อสอบแบบปรนัย ชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ

**2.1 แผนการจัดการเรียนรู้**

แผนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ดำเนินการดังนี้

2.1.1 ศึกษาเอกสารหลักสูตร คู่มือ แบบเรียน และเอกสารที่เกี่ยวข้องกับการสอน เพื่อศึกษาความเหมาะสมและความสอดคล้องของเนื้อหากับหลักสูตร จากนั้นวิเคราะห์ผลการเรียนรู้ที่คาดหวังตามหลักสูตร แล้วกำหนดสาระการเรียนรู้ และจุดประสงค์การเรียนรู้ รวมทั้งเวลาที่ใช้สอนที่เหมาะสมในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

2.1.2 ศึกษารายละเอียดเนื้อหาที่จะนำมาสร้างแผนการจัดการเรียนรู้จากแบบเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

1) กำหนดจุดประสงค์เชิงพฤติกรรมของแต่ละเนื้อหา

2) ศึกษาขอบข่าย และวิธีการผลิตสื่อคอมพิวเตอร์ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

3) สร้างแผนการจัดการเรียนรู้ ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 10 ชั่วโมง ซึ่งประกอบด้วยรายละเอียดดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 แสดงการวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ และเวลาที่ใช้สอน เพื่อใช้สร้างแผนการจัดการเรียนรู้

| แผนการจัดการเรียนรู้ที่/สาระการเรียนรู้ | จุดประสงค์การเรียนรู้ | เวลาที่ใช้สอน (ชั่วโมง) |
|---|---|---|
| 1. เรื่อง ระบบพิกัดฉากสามมิติ | 1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติ | 2 |
| 2. เรื่อง เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ | 1. หาผลบวก ผลต่างของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้<br>2. หาผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้<br>3. หาขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้<br>4. หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติได้<br>5. หาโคไซน์แสดงทิศทางได้ | 4 |
| 3. เรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์ | 1. หาผลคูณเชิงสเกลาร์ได้<br>2. นำความรู้เรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้ | 2 |
| 4. เรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์ | 1. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้<br>2. นำความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้ | 2 |

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ ใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตมาประกอบการสอนของครู ประกอบด้วยขั้นนำ ขั้นสอน ขั้นสรุป สื่อการเรียนการสอน และการวัดผล ประเมินผล

2.1.3 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นไปให้ผู้ทรงคุณวุฒิพิจารณาความถูกต้องของเนื้อหา ภาษาที่ใช้ ตลอดจนข้อบกพร่องอื่นๆ เพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไข

2.1.4 นำแผนการจัดการเรียนรู้ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้ว ไปทดลองสอนกับนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง โดยดำเนินการ ดังนี้

1) ทดลองสอนกับนักเรียนเป็นรายบุคคล เพื่อพิจารณาความเหมาะสมระยะเวลาที่ใช้ การสื่อความหมาย กิจกรรม แล้วปรับปรุงแก้ไขข้อบกพร่องเหล่านั้น

2) ทดลองสอนภาคสนามกับนักเรียนจำนวน 90 คนเพื่อตรวจสอบความเป็นไปได้ ความถูกต้อง ความเหมาะสม พร้อมนำข้อบกพร่องต่างๆ มาปรับปรุงแก้ไข เพื่อให้เป็นแผนการจัดการเรียนรู้ที่สมบูรณ์ สำหรับใช้จริงต่อไป

**2.2 แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน**

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ เป็นแบบทดสอบปรนัยชนิดเลือกตอบ 4 ตัวเลือก ผู้วิจัยดำเนินการสร้างและตรวจสอบคุณภาพ ดังนี้

2.2.1 ศึกษาหลักการวัดและประเมินผลการเรียนการสอน รูปแบบของแบบทดสอบจากเอกสาร ตำราต่าง ๆ

2.2.2 วิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้ และสาระการเรียนรู้ เพื่อสร้างแบบทดสอบที่สามารถวัดได้ตรงตามจุดประสงค์

2.2.3 สร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียนและหลังเรียน เป็นแบบทดสอบเลือกตอบ (Multiple Choice) ชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 40 ข้อ ให้ครอบคลุมจุดประสงค์การเรียนรู้ทุกข้อ ดังตารางที่ 3.2

ตารางที่ 3.2 แสดงการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างเนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้ และจำนวนข้อสอบเรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

| เนื้อหา | จุดประสงค์การเรียนรู้ | จำนวนข้อสอบ ทั้งหมด | จำนวนข้อสอบ ใช้จริง |
|---|---|---|---|
| ระบบพิกัดฉากสามมิติ | 1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติ | 4 | 2 |
| เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ | 2. หาผลบวก ผลต่าง ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้ | 5 | 3 |
| | 3. หาผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้ | 4 | 2 |
| | 4. หาขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้ | 4 | 2 |
| | 5. หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติได้ | 4 | 2 |
| | 6. หาโคไซน์แสดงทิศทางได้ | 3 | 1 |
| ผลคูณเชิงสเกลาร์ | 7. หาผลคูณเชิงสเกลาร์ได้ | 4 | 2 |
| | 8. นำความรู้เรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้ | 4 | 2 |
| ผลคูณเชิงเวกเตอร์ | 9. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้ | 4 | 2 |
| | 10. นำความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้ | 4 | 2 |
| | รวม | 40 | 20 |

2.2.4 ตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหา โดยผู้เชี่ยวชาญ เพื่อพิจารณาความสอดคล้องระหว่างข้อสอบกับจุดประสงค์การเรียนรู้ (Index of Item Objective Congruence: IOC) ซึ่งวิธีการนี้ผู้เชี่ยวชาญจะพิจารณาให้คะแนน โดยกำหนดเกณฑ์ ดังนี้

ให้คะแนนเท่ากับ + 1 เมื่อแน่ใจว่าข้อสอบวัดได้ตรงตามจุดประสงค์

ให้คะแนนเท่ากับ – 1 เมื่อแน่ใจว่าข้อสอบวัดไม่ตรงตามจุดประสงค์

ให้คะแนนเท่ากับ 0 เมื่อไม่แน่ใจว่าข้อสอบวัดได้ตรงตามจุดประสงค์หรือไม่

ใช้เกณฑ์พิจารณาค่า IOC ตั้งแต่ 0.5 ขึ้นไป ถือว่าเป็นข้อสอบที่มีความตรงเชิงเนื้อหา สามารถนำไปใช้ได้ ปรากฏว่าข้อสอบผ่านเกณฑ์ที่กำหนดทุกข้อโดยมีค่า IOC เท่ากับ 1

2.2.5 นำแบบทดสอบไปทดลองสอบ (Try Out) กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด จำนวน 90 คน ที่ผ่านการเรียนเนื้อหาตามปกติในชั้นเรียนไปแล้ว นำผลการทดลองสอบมาวิเคราะห์หาค่าระดับความยาก และค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบเป็นรายข้อ พิจารณาเลือกข้อสอบที่มีความเหมาะสมมีความยากตั้งแต่ 0.35 – 0.72 และค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.54 ขึ้นไป มาจำนวน 20 ข้อ

2.2.6 หาค่าความเที่ยงของแบบทดสอบทั้งฉบับ โดยวิธีของคูเดอร์ ริชาร์ดสัน (KR-20) พบว่า แบบทดสอบมีค่าความเที่ยงของแบบทดสอบทั้งฉบับ เท่ากับ 0.95

## 3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

3.1 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียน เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5

3.2 ดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 10 ชั่วโมง เวลา 2 สัปดาห์

3.3 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ โดยใช้แบบทดสอบฉบับเดียวกันกับแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียน

3.4 ตรวจนับคะแนนผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แล้วนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ด้วยวิธีทางสถิติ

## 4. การวิเคราะห์ข้อมูล

เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ โดยใช้การทดสอบค่าที (t-test )

# บทที่ 4
# ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ระหว่างก่อนและหลังเรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ปรากฏผลดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ผลการเปรียบเทียบค่าเฉลี่ย ค่าร้อยละ และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบก่อนเรียนและหลังเรียน

| การทดสอบ | คะแนนเต็ม | n | $\overline{X}$ | ร้อยละ | S |
|---|---|---|---|---|---|
| ก่อนเรียน | 20 | 50 | 7.92 | 39.60 | 2.23 |
| หลังเรียน | 20 | 50 | 16.70 | 83.50 | 1.74 |

จากตารางที่ 4.1 แสดงให้เห็นว่าหลังจากเรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ แล้วนักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น คือ $\overline{X}$ = 16.70 ค่าร้อยละ 83.50 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานต่ำกว่าก่อนเรียน คือ S = 1.74

การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนระหว่างก่อนเรียน และหลังเรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

ผู้วิจัยวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของนักเรียนโดยการเปรียบเทียบคะแนนการทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ และการทดสอบค่าที ( t-test) ปรากฏผลดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 ผลการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ของนักเรียน

| การทดสอบ | n | $\bar{X}$ | S | $\sum D$ | $\sum D^2$ | t |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ก่อนเรียน | 50 | 7.92 | 2.23 | 439 | 4161 | 24.82** |
| หลังเรียน | 50 | 16.70 | 1.74 | | | |

**p < .01

จากตารางที่ 4.2 พบว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ สูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

# บทที่ 5
# สรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติระหว่างก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด ซึ่งจะกล่าวถึง สรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะดังนี้

## 1. สรุปการวิจัย

**1.1 วัตถุประสงค์ของการวิจัย**

เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ระหว่างก่อนและหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

**1.2 สมมติฐานของการวิจัย**

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติหลังเรียน ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต สูงกว่าก่อนเรียน

**1.3 กลุ่มตัวอย่าง** เป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด จำนวน 1 ห้องเรียน มีจำนวนนักเรียน 50 คน ได้มาโดยการสุ่มแบบกลุ่ม

**1.4 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย**

แผนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

**1.5 การเก็บรวบรวมข้อมูล**

1.5.1 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนก่อนเรียน เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

1.5.2 ดำเนินการสอนตามแผนการจัดการเรียนรู้ ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 10 ชั่วโมง เวลา 2 สัปดาห์

1.5.3 ให้นักเรียนทำแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังเรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ

**1.6 การวิเคราะห์ข้อมูล**

ใช้ค่าร้อยละ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และการทดสอบค่าที

**1.7 ผลการวิจัย** พบว่า

ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

## 2. อภิปรายผล

จากผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย จังหวัดร้อยเอ็ด ปรากฏว่าผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนที่ได้รับการสอนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 เป็นไปตามสมมุติฐานที่ตั้งไว้ ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของหลาย ๆ ท่านเช่น อรรถศาสตร์ นิมิตพันธ์ (2542 : 61-62) ได้ศึกษาผลของการใช้โปรแกรมจีเอสพีประกอบกิจกรรมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4 ขั้น ที่มีต่อความสามารถในการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องความเท่ากันทุกประการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 โรงเรียนสวนกุหลาบวิทยาลัย นนทบุรี จำนวน 44 คน ที่มีระดับผลการเรียนทางคณิตศาสตร์สูง ปานกลาง และต่ำ ดำเนินการสอนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพี ประกอบกิจกรรมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4 ขั้น ซึ่งประกอบด้วย สำรวจตั้งข้อความคาดการณ์ สืบเสาะหาเหตุผลและสรุปผล ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพีประกอบกิจกรรมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4 ขั้น มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการผ่านเกณฑ์ร้อยละ 60 และนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1 ที่เรียนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพี ประกอบกิจกรรมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4 ขั้น มีความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ ความเท่ากันทุกประการ หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 เรณุวัฒน์ พงษ์อุทธา (2550 : 92) ได้ศึกษาเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง พาราโบลา เจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดวิเคราะห์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ระหว่างการจัดกิจกรรมโดยใช้โปรแกรม

The Geometer's Sketchpad เป็นสื่อกับการสอนตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นสื่อมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องพาราโบลา เจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการวิเคราะห์ สูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมตามปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และวิมล อยู่พิพัฒน์ (2551 : 71-72) ได้ศึกษาบทเรียนปฏิบัติการโดยใช้โปรแกรม GSP (GEOMETER'S SKETCHPAD) ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง การวัด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง การวัดของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ภายหลังได้รับการสอนโดยใช้บทเรียนปฏิบัติการโดยใช้โปรแกรม GSP ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง การวัด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 สูงกว่าก่อนได้รับการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

การที่นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการเรียน เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ อาจเนื่องมาจากโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือที่นักเรียนสามารถใช้กับเนื้อหาเรขาคณิตแบบ Euclidean หรือ Non- Euclidean พีชคณิต แคลคูลัส และตรีโกณมิติ ในการเรียนรู้มโนทัศน์ทางเรขาคณิตนั้นโปรแกรม The Geometer's Sketchpad สามารถช่วยในการสร้างรูปเรขาคณิตในมิติต่างๆ ทำให้นักเรียนได้เกิดการสำรวจ และทำความเข้าใจ ในเนื้อหาเรขาคณิตได้ง่ายขึ้นกว่าการสอนแบบเดิม โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือที่ช่วยกระตุ้นให้เกิดกระบวนการค้นพบ โดยนักเรียนจะเห็นภาพในตอนแรกแล้วทำการวิเคราะห์ปัญหา หลังจากนั้นนักเรียนจะตั้งข้อคาดเดาก่อนที่จะทำการพิสูจน์ในเรื่องนั้น ๆ กระบวนการเรียนรู้จากโปรแกรม Geometer's Sketchpad จะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาพื้นฐานของตนเองในเชิงรูปธรรมก่อนแล้วค่อยๆ พัฒนาการเรียนรู้ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น ผู้ใช้จะสามารถสร้างรูปเรขาคณิต วัดขนาด สัดส่วนของเส้นตรง ส่วนโค้ง มุม และพื้นที่ได้รวดเร็วและถูกต้อง ทั้งยังช่วยให้ผู้เรียนสร้างรูปสองมิติและสามมิติบนหน้าจอแล้วทำกิจกรรมสำรวจการยืด หด เลื่อน รูปในมุมมองต่าง ๆ เพื่อเรียนรู้มโนทัศน์ทางเรขาคณิตได้รวดเร็ว นำไปสู่การค้นหาสมบัติต่าง ๆ ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้น ดึงดูดความสนใจ เกิดจินตนาการในการค้นคว้าหาเหตุผลและเพิ่มพูนความรู้ ซึ่งการเรียนรู้เรขาคณิตในลักษณะดังกล่าวจะทำให้ผู้เรียนมองสิ่งต่าง ๆ รอบตัวได้อย่างมีความหมายมากขึ้น การใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad จะช่วยให้การสร้างรูปได้รวดเร็วทำให้การแก้ปัญหาในเรื่องที่ยากและซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพและประหยัดเวลาในการเรียนรู้ นอกจากนี้ยังใช้งานง่าย ใช้เวลาน้อยในการศึกษาวิธีการใช้งาน ผู้สอนสามารถทำเป็นสคริปต์ใช้ในการสาธิตหรือสรุปให้ผู้เรียนศึกษาตามเพื่อการทบทวนเนื้อหาได้

## 3. ข้อเสนอแนะ

### 3.1 ข้อเสนอแนะในการนำผลวิจัยไปใช้

ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเครื่องมือประกอบการสอน ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังนี้

3.1.1 ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ครูผู้สอนควรมีความรู้ ความเข้าใจ เกี่ยวกับโปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นอย่างดี เพื่อให้การดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นไปอย่างมีประสิทธิภาพ

3.1.2 ควรนำโปรแกรม The Geometer's Sketchpad ไปใช้ประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในเรื่องอื่นๆ เช่น ฟังก์ชันตรีโกณมิติ การแปลงทางเรขาคณิต ความเท่ากันทุกประการ เส้นขนาน เป็นต้น เพื่อศึกษาการพัฒนาที่ต่อเนื่องของผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ด้วยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นสื่อผ่านคอมพิวเตอร์ ประกอบการสอนของครู

3.1.3 ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad ครูผู้สอนต้องคำนึงว่า โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นเพียงเทคโนโลยีที่เป็นส่วนหนึ่งในการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน ไม่สามารถที่จะแทนครูได้ ดังนั้นครูผู้สอนยังคงมีบทบาทเป็นผู้แนะนำ ช่วยเหลือ และแก้ปัญหาให้กับนักเรียน

### 3.2 ข้อเสนอแนะในการวิจัยครั้งต่อไป

3.2.1 ควรมีการวิจัยเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad กับการสอนโดยวิธีอื่น

3.2.1 ควรมีการวิจัยเพื่อหาประสิทธิภาพ และความพึงพอใจของนักเรียนต่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ประกอบการสอนของครู

# บรรณานุกรม

# บรรณานุกรม


กรรณิกา ผาสุก (2549) "การเปรียบเทียบผลการเรียนรู้กลุ่มสาระคณิตศาสตร์ เรื่องการแปลงทางเรขาคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างการเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับการเรียนประกอบโปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP)" วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต มหาสาคาม มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

กระทรวงศึกษาธิการ (2547) *หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติม คณิตศาสตร์ เล่ม 1 ตามหลักสูตรการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2544* กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์คุรุสภาลาดพร้าว

_____. (2551) *หลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551* กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย

ชนิศวรา ฉัตรแก้ว (2549) "การพัฒนาหน่วยการเรียนรู้เรขาคณิตและลำดับขั้นการคิดทางเรขาคณิตตามรูปแบบแวนฮีลีโดยใช้โปรกรมสำเร็จรูปเรขาคณิตพลวัตสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2" วิทยานิพนธ์ปริญญาศิลปศาสตรมหาบัณฑิต กรุงเทพมหานคร มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

พวงรัตน์ ทวีรัตน์ (2530) *การสร้างและพัฒนาแบบทดสอบผลสัมฤทธิ์* กรุงเทพมหานคร สำนักทดสอบทางการศึกษาและจิตวิทยา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

พัชระ งามชัด (2549) "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องบทประยุกต์ ความพึงพอใจต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และความสามารถในการคิดวิเคราะห์ของนักเรียน ชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ระหว่างการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้เทคนิค STAD กับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามคู่มือครู" วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต มหาสารคาม มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

ไพจิตร สะดวกการ และคณะ(2549) *เอกสารการอบรมเชิงปฏิบัติการการใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad (GSP). ม.ป.ท.* โครงการหนึ่งอำเภอหนึ่งโรงเรียนในฝัน

ไพศาล หวังพานิช (2526) *การวัดผลการศึกษา* กรุงเทพมหานคร สำนักทดสอบทางการศึกษาและจิตวิทยา มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เยาวดี วิบูลย์ศรี (2540) *การวัดผลและการสร้างแบบทดสอบสัมฤทธิ์* พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

เรณุวัฒน์ พงษ์อุทธา (2550) "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง พาราโบลา เจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดวิเคราะห์ของนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ระหว่างการจัดกิจกรรมโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นสื่อกับการจัดกิจกรรมตามปกติ" วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต มหาสารคาม มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

ล้วน สายยศ และ อังคณา สายยศ (2538) *เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา* พิมพ์ครั้งที่ 5 กรุงเทพมหานคร สุวีริยาสาส์น

วรวรรณ กฤตยากรนุพงศ์ (2551) "กิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องความเท่ากันทุกประการโดยใช้การแปลงทางเรขาคณิตและซอฟต์แวร์เรขาคณิตพลวัต สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2" ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต กรุงเทพมหานคร มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

วัชรสันต์ อินธิสาร (2547) "ผลของการพัฒนามโนทัศน์ทางเรขาคณิตและเจตคติต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad" วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต กรุงเทพมหานคร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

วิมล อยู่พิพัฒน์ (2551) "บทเรียนปฏิบัติการโดยใช้โปรแกรม GSP (GEOMETER'S SKETCHPAD) ที่เน้นทักษะการเชื่อมโยง เรื่อง การวัด สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2" สารนิพนธ์การศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต กรุงเทพมหานคร มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี(2550) *โปรแกรม GSP* <http://thaigsp.ipst.ac.th> 8 กันยายน 2550

_____. (2548) *คู่มืออ้างอิง The Geometer's Sketchpad ซอฟต์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์เรขาคณิตพลวัต* กรุงเทพมหานคร สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สมนึก ภัททิยธนี (2544) *การวัดผลการศึกษา* พิมพ์ครั้งที่ 3 กาฬสินธุ์ ประสานการพิมพ์

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ (2552) *หลักสูตรโรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย พุทธศักราช 2552* ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551

สุจิรา มุสิกเจริญ (2542) "การเปรียบเทียบความสามารถด้านมิติสัมพันธ์และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องเส้นขนานและความคล้ายของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างกลุ่มที่เรียนโดยใช้และไม่ใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ทางเรขาคณิต" วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต กรุงเทพมหานคร จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

อรรถศาสน์ นิมิตพันธ์ (2542) "ผลของการใช้ซอฟแวร์คอมพิวเตอร์ประกอบกิจกรรมการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 4 ขั้นที่มีต่อความสามารถในการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องความเท่ากันทุกประการของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1" วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต กรุงเทพมหานคร จุฬาลงกรณ์ มหาวิทยาลัย

ฮุสนา ทิพย์หมัด. (2548) "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนและเจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องการแปลงทางเรขาคณิตของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างการสอนโดยใช้โปรแกรมจีเอสพีในเครื่องคิดเลขเชิงกราฟกับการสอนแบบปกติ" วิทยานิพนธ์ปริญญาการศึกษามหาบัณฑิต สงขลา มหาวิทยาลัยทักษิณ

Almeqdadi, Farouq. (2000). "The Effect of Using the Geometer's Sketchpad (GSP) on Jordanian Students'Understanding of Geometrical Concepts," Education Resources Information Center.<http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/Home.portal?_nfpb =true&_pageLabel= advanced>.

Groman, Margaret W. (1996). "Integrating "Geometer's Sketchpad" into a Geometry Course for Secondary Education Mathematics Majors," Education Resources Information Center http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/Home.portal? _nfpb=true& _pageLabel=advanced.

MacGregor, S. Kim and W. Randall Thomas (2002) "Learning Geometry Dynamically : Teacher Structure or Facilitation?," Education Resources Information Center. <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/Home.portal? nfpb=true& pageLabel=advanced>2008.

McClintock. Edwin, Jiang Zhonghong and July Raquel. (2002). "Students' Developing of Three-Dimensional Visualization in the Geometer's Sketchpad Environment," Education Resources Information Center. 2002. <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/ Home.portal?nfpb=true&_pageLabel=advanced> 2008.

# ภาคผนวก

# ภาคผนวก ก

- คำแนะนำการใช้แผนการจัดการเรียนรู้
- แผนการจัดการเรียนรู้

**คำแนะนำการใช้แผนการจัดการเรียนรู้**

**เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5**

แผนการจัดการเรียนรู้ เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 ประกอบด้วยเนื้อหาเกี่ยวกับเรื่อง ระบบพิกัดฉากสามมิติ เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ ผลคูณเชิงสเกลาร์ และผลคูณเชิงเวกเตอร์ ซึ่งมีวัตถุประสงค์การเรียนรู้ ดังนี้

1. เพื่อพัฒนาความรู้ ความสามารถและทักษะทางคณิตศาสตร์ของผู้เรียน

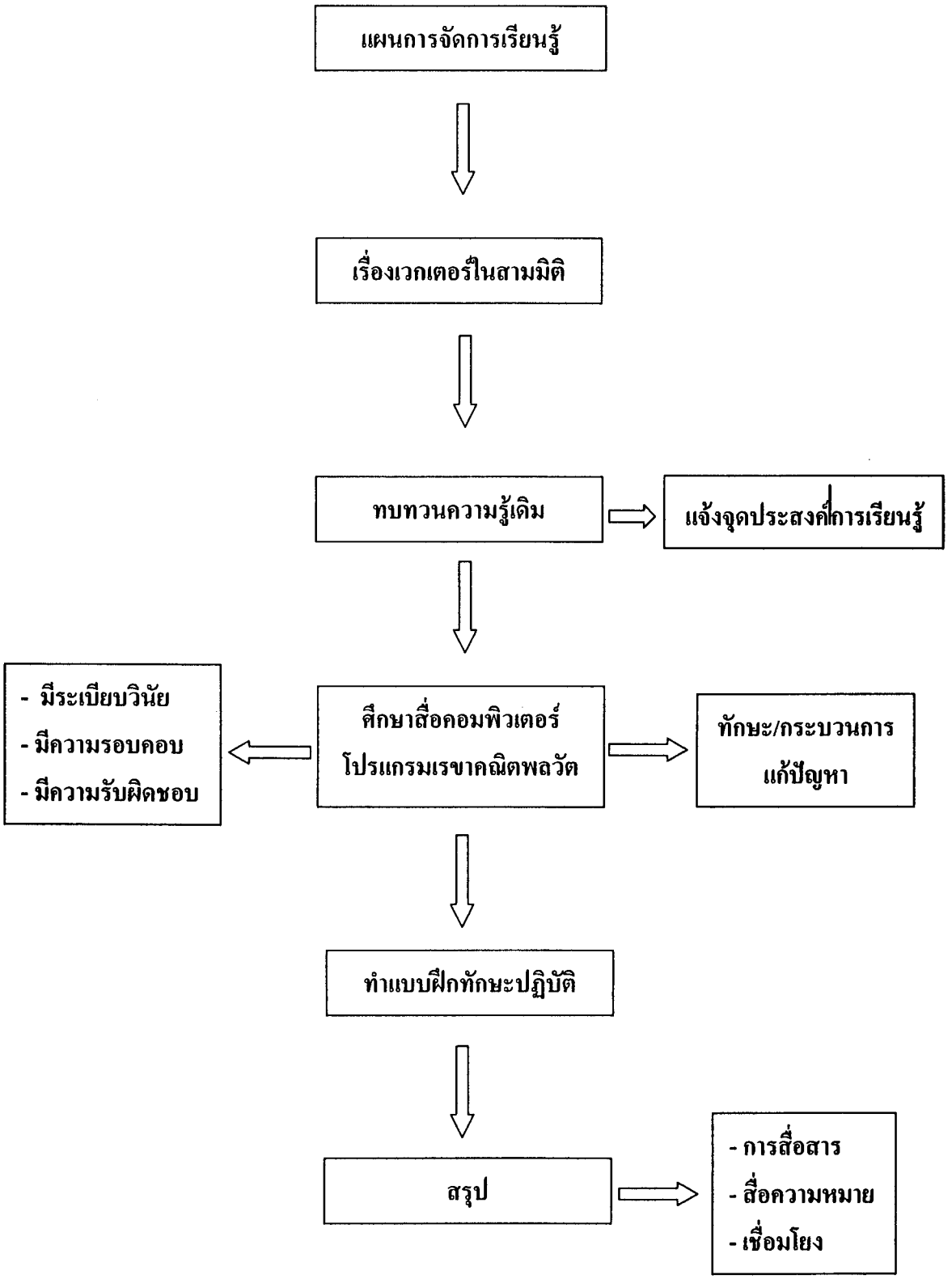
2. เพื่อจัดกิจกรรมให้ผู้เรียน ได้นำความรู้ทางคณิตศาสตร์เรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ ไปประยุกต์ใช้แก้โจทย์ปัญหา

3. เพื่อฝึกทักษะการใช้โปรแกรมคอมพิวเตอร์

การจัดทำแผนกิจกรรมการเรียนรู้ ได้กำหนดแผนการเรียนรู้ทั้งหมด 4 แผนดังนี้

| แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ | เรื่อง | จุดประสงค์การเรียนรู้ | เวลา (ชั่วโมง) |
|---|---|---|---|
| 1 | ระบบพิกัดฉากสามมิติ | 1. มีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติ | 2 |
| 2 | เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ | 1. หาผลบวก ผลต่าง ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้<br>2. หาผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้<br>3. หาขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้<br>4. หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติได้<br>5. หาโคไซน์แสดงทิศทางได้ | 4 |
| 3 | ผลคูณเชิงสเกลาร์ | 1. หาผลคูณเชิงสเกลาร์ได้<br>2. นำความรู้เรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้ | 2 |
| 4 | ผลคูณเชิงเวกเตอร์ | 1. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้<br>2. นำความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้ | 2 |
| **รวม** | | | 10 |

# โครงสร้างการจัดกิจกรรมการเรียนการสอน



**แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1**

**เรื่อง ระบบพิกัดฉากสามมิติ** **รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม** **รหัสวิชา ค 40204**

**กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์** **ช่วงชั้นที่ 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5** **จำนวน 2 ชั่วโมง**

---

**1. สาระสำคัญ**

ระบบพิกัดฉากสามมิติประกอบด้วยแกน 3 แกนคือ แกน X, แกน Y, และแกน Z

ระนาบที่กำหนดโดยแกน X และแกน Y เรียกว่า "ระนาบ XY"

ระนาบที่กำหนดโดยแกน X และแกน Z เรียกว่า "ระนาบ XZ"

ระนาบที่กำหนดโดยแกน Y และแกน Z เรียกว่า "ระนาบ YZ"

ระนาบทั้งสามจะแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 บริเวณคือ เหนือระนาบ XY 4 บริเวณ และใต้ระนาบ XY 4 บริเวณ ในแต่ละบริเวณจะเรียกว่า "อัฐภาค" (octant)

อัฐภาคที่ 1 เริ่มจากบริเวณที่ประกอบด้วยแกนแกน X, แกน Y, และแกน Z ทางบวก บรรจุอยู่แล้วนับทวนเข็มนาฬิกาจะได้อัฐภาคต่อไป อัฐภาคเหนือระนาบ XY จะมี 4 อัฐภาค และอัฐภาคใต้ระนาบ XY จะมี 4 อัฐภาค

อัฐภาคที่ 1 อยู่คู่กับ อัฐภาคที่ 5 (อยู่บนอยู่ล่างตามลำดับ)

อัฐภาคที่ 2 อยู่คู่กับ อัฐภาคที่ 6 (อยู่บนอยู่ล่างตามลำดับ)

อัฐภาคที่ 3 อยู่คู่กับ อัฐภาคที่ 7 (อยู่บนอยู่ล่างตามลำดับ)

อัฐภาคที่ 4 อยู่คู่กับ อัฐภาคที่ 8 (อยู่บนอยู่ล่างตามลำดับ)

จุดในปริภูมิสามมิติจะกำหนดเป็น P(x, y, z) จะเรียก (x, y, z) ว่า สามสิ่งอันดับ (ordered triple)

**2. จุดประสงค์การเรียนรู้**

นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติ ดังนี้

2.1 เขียนภาพจากจุดที่กำหนดให้ลงในระนาบพิกัดฉากสามมิติได้

2.2 หาภาพฉายของจุดบนระนาบพิกัดฉากสามมิติที่กำหนดให้ได้

2.3 หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติที่กำหนดให้ได้

2.4 นำความรู้เรื่องระบบพิกัดฉากสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้

**3. สาระการเรียนรู้**

3.1 ระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.2. ระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติ

**4. กิจกรรมการเรียนรู้**

**<u>ชั่วโมงที่ 1</u>**

1. ทดสอบก่อนเรียนเรื่องเวกเตอร์ในสามมิติ จำนวน 20 ข้อ เป็นแบบทดสอบแบบปรนัย

2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบเรื่อง ระบบพิกัดฉากสามมิติแล้ว นักเรียนมีความสามารถ

2.1 เขียนภาพจากจุดที่กำหนดให้ลงในระนาบพิกัดฉากสามมิติได้

2.2 หาภาพฉายของจุดบนระนาบพิกัดฉากสามมิติที่กำหนดให้ได้

2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์โดยใช้การถาม-ตอบ

3. แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มๆ ละ 5 คน ครูแจกใบความรู้ที่ 1.1 และให้นักเรียนดูตัวอย่างที่ 1, 2 จากโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยให้นักเรียนศึกษาตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

3.1 การเขียนจุดบนแกน X, แกน Y, และแกน Z จากจุดที่กำหนดให้

3.2 การเขียนจุดบนระนาบ XY, ระนาบ XZ และ ระนาบ YZ จากจุดที่กำหนดให้

3.3 วิธีการเขียนภาพลงในระนาบพิกัดฉากสามมิติจากจุดที่กำหนดให้

3.4 การหาภาพฉายของจุดที่กำหนดให้บนระนาบพิกัดฉากสามมิติ

4. นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันสรุปการเขียนภาพลงในระนาบพิกัดฉากสามมิติ จากจุดที่กำหนดให้ในตัวอย่างที่ 1, 2

5. ครูมอบหมายให้นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 1.1 ที่ครูแจกให้ และสรุปวิธีการเขียนภาพลงในระนาบพิกัดฉากสามมิติ จากจุดที่กำหนดให้ ครูช่วยแนะนำเวลาที่นักเรียนมีปัญหา

6. ให้นักเรียนตัวแทนกลุ่มออกนำเสนอข้อสรุปการเขียนภาพลงในระนาบพิกัดฉากสามมิติ จากจุดที่กำหนดให้ หน้าชั้นเรียน

7. ครูสรุปวิธีการเขียนภาพลงในระนาบพิกัดฉากสามมิติ อีกครั้งเพื่อช่วยให้นักเรียนเข้าใจยิ่งขึ้น และมอบหมายให้นักเรียนแต่ละคนกำหนดจุด P (x, y, z) ขึ้นเอง พร้อมทั้งเขียนภาพลงในระนาบพิกัดฉากสามมิติ เป็นผลงานรายบุคคลเป็นการบ้านส่งนอกเวลาเรียน

**<u>ชั่วโมงที่ 2</u>**

1. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุด และวิธีการเขียนภาพลงในระนาบพิกัดฉากสามมิติจากจุดที่กำหนดให้ โดยใช้การถาม-ตอบ

2. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบเรื่อง ระบบพิกัดฉากสามมิติแล้ว นักเรียนมีความสามารถ

2.1 หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติที่กำหนดให้ได้

2.2 นำความรู้เรื่องระบบพิกัดฉากสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้

3. ให้นักเรียนศึกษาจากโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องระบบพิกัดฉากสามมิติ และให้นักเรียนหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติที่กำหนดให้ โดยมีครูเดินดูรอบๆคอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ และตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

4. ครูมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 1.2 ที่ครูแจกให้ จากนั้นครูใช้การถามตอบให้นักเรียนช่วยกันเฉลยคำตอบ

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปขั้นตอนการหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติ

6. นักเรียนแต่ละคนกำหนดจุด P (x, y, z) ขึ้นเอง พร้อมทั้งเขียนภาพลงในระนาบพิกัดฉากสามมิติ และหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติ จากจุดที่นักเรียนกำหนดขึ้นเป็นการบ้านส่งครูนอกเวลาเรียน

**5. สื่อการเรียนรู้**

5.1 แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 1.1 และ 1.2

5.2 โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องระบบพิกัดฉากสามมิติ

5.3 เครื่องคอมพิวเตอร์

**6. แหล่งการเรียนรู้เพิ่มเติม**

6.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

6.2 ห้องสมุดโรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย

6.3 ห้องศูนย์สื่อเทคโนโลยีกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

6.4 ห้องศูนย์วิทยบริการ

**7. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้**

| การวัดผล | การประเมินผล |
|---|---|
| 1. สังเกตจากการตอบคำถาม | 1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง |
| 2. สังเกตจากการเข้าร่วมกิจกรรม | 2. นักเรียนสนใจและร่วมกิจกรรมดี |
| 3. แบบฝึกทักษะปฏิบัติ | 3. นักเรียนทำได้ถูกต้อง |

# สื่อการเรียนรู้ประกอบ
# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1
# เรื่อง
# ระบบพิกัดฉากสามมิติ

## ใบความรู้ที่ 1.1

**ระบบพิกัดฉากสามมิติ**

ระบบพิกัดฉากสามมิติประกอบด้วยแกน 3 แกนคือ แกน X, แกน Y, และแกน Z

ระนาบที่กำหนดโดยแกน X และแกน Y เรียกว่า "ระนาบ XY"

ระนาบที่กำหนดโดยแกน X และแกน Z เรียกว่า "ระนาบ XZ"

ระนาบที่กำหนดโดยแกน Y และแกน Z เรียกว่า "ระนาบ YZ"

ระนาบทั้งสามจะแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 บริเวณคือ เหนือระนาบ XY 4 บริเวณ และใต้ระนาบ XY 4 บริเวณ ในแต่ละบริเวณจะเรียกว่า "อัฐภาค" (octant)

อัฐภาคที่ 1 เริ่มจากบริเวณที่ประกอบด้วยแกนแกน X, แกน Y, และแกน Z ทางบวก บรรจุอยู่แล้วนับทวนเข็มนาฬิกาจะได้อัฐภาคต่อไป อัฐภาคเหนือระนาบ XY จะมี 4 อัฐภาค และอัฐภาคใต้ระนาบ XY จะมี 4 อัฐภาค

อัฐภาคที่ 1 อยู่คู่กับ อัฐภาคที่ 5 (อยู่บนอยู่ล่างตามลำดับ)

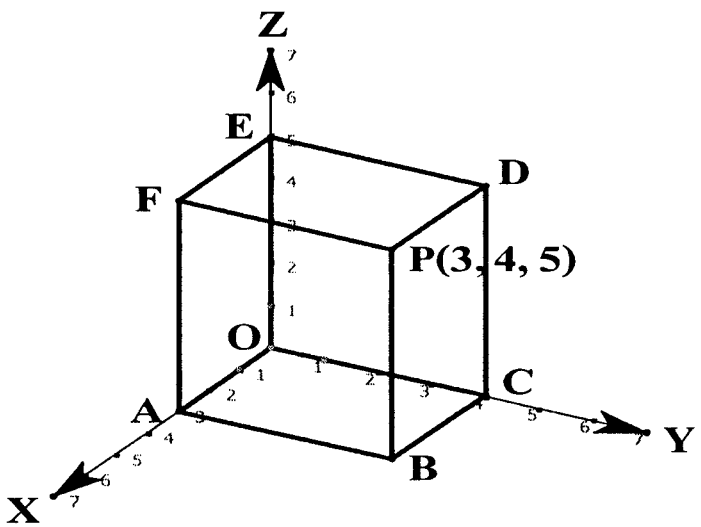
อัฐภาคที่ 2 อยู่คู่กับ อัฐภาคที่ 6 (อยู่บนอยู่ล่างตามลำดับ)

อัฐภาคที่ 3 อยู่คู่กับ อัฐภาคที่ 7 (อยู่บนอยู่ล่างตามลำดับ)

อัฐภาคที่ 4 อยู่คู่กับ อัฐภาคที่ 8 (อยู่บนอยู่ล่างตามลำดับ)

จุดในปริภูมิสามมิติจะกำหนดเป็น P(x, y, z) จะเรียก (x, y, z) ว่า สามสิ่งอันดับ (ordered triple)

**ตัวอย่างที่ 1** การกำหนดจุด P (3, 4, 5) ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ



พิกัดของจุด A คือ ..... พิกัดของจุด B คือ .....

พิกัดของจุด C คือ ..... พิกัดของจุด D คือ .....

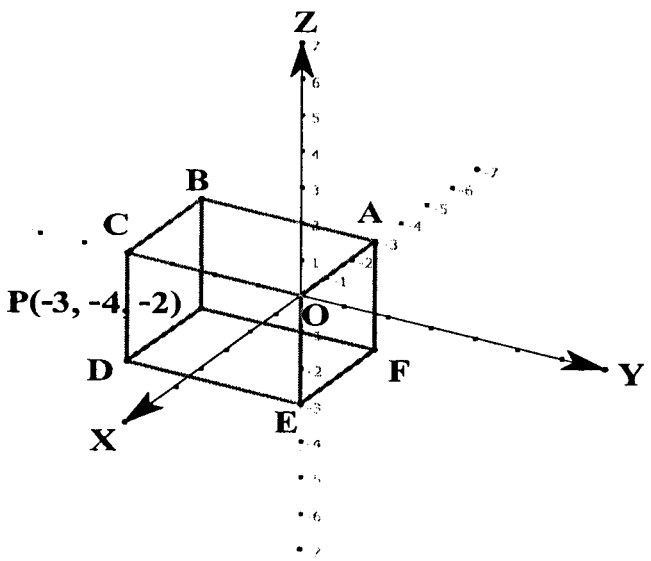
พิกัดของจุด E คือ ..... พิกัดของจุด F คือ .....

ภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY คือ .....

ภาพฉายของจุด P บนระนาบ XZ คือ .....

ภาพฉายของจุด P บนระนาบ YZ คือ .....

**ตัวอย่างที่ 2** การกำหนดจุด P (3, 4, 5) ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ




พิกัดของจุด A คือ ..... พิกัดของจุด B คือ .....

พิกัดของจุด C คือ ..... พิกัดของจุด D คือ .....

พิกัดของจุด E คือ ..... พิกัดของจุด F คือ .....

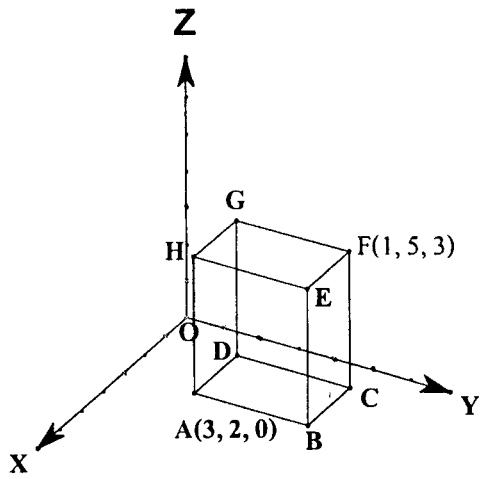
ภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY คือ .....

ภาพฉายของจุด P บนระนาบ XZ คือ .....

ภาพฉายของจุด P บนระนาบ YZ คือ .....

## แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 1.1

1. จากรูป จงหาพิกัดของจุดมุมที่เหลือ ของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก ซึ่งมีหน้าทั้งหก ขนานกับระนาบอ้างอิง

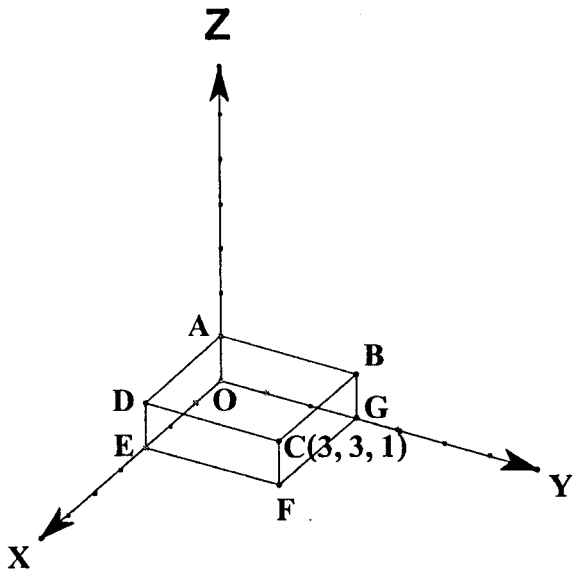



จุด B คือ ..... จุด C คือ .....

จุด D คือ ..... จุด E คือ .....

จุด G คือ ..... จุด H คือ .....

2. จากรูป จงหาพิกัดซึ่งเป็นภาพฉายของจุด C(3, 3, 1) บนแกนและระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้




ภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY คือ .....

ภาพฉายของจุด P บนระนาบ XZ คือ .....

ภาพฉายของจุด P บนระนาบ YZ คือ .....

3. จงกำหนดระบบพิกัดฉากของจุดในปริภูมิสามมิติ โดยใช้ระบบมือขวาและเขียนจุดในปริภูมิสามมิติ ที่มีพิกัดต่อไปนี้ A (1, 1, 1), B (1, -1, 2), C (3, 2, -1) และ D (-1, -1, -2)

## แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 1.2

1. จงหาระยะทางระหว่างจุด P (3, -4, 8) และ Q (7, -2, 8)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2. จงหาระยะทางระหว่างจุด P (1, -2, 7) และ Q (-2, -1, 0)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

3. จงพิจารณาว่า รูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ A (1, 2, 1) ,B (-3, 7, 9) และ C(11, 4, 2) เป็นรูปสามเหลี่ยมชนิดใด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**ตัวอย่างบทเรียนโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้**

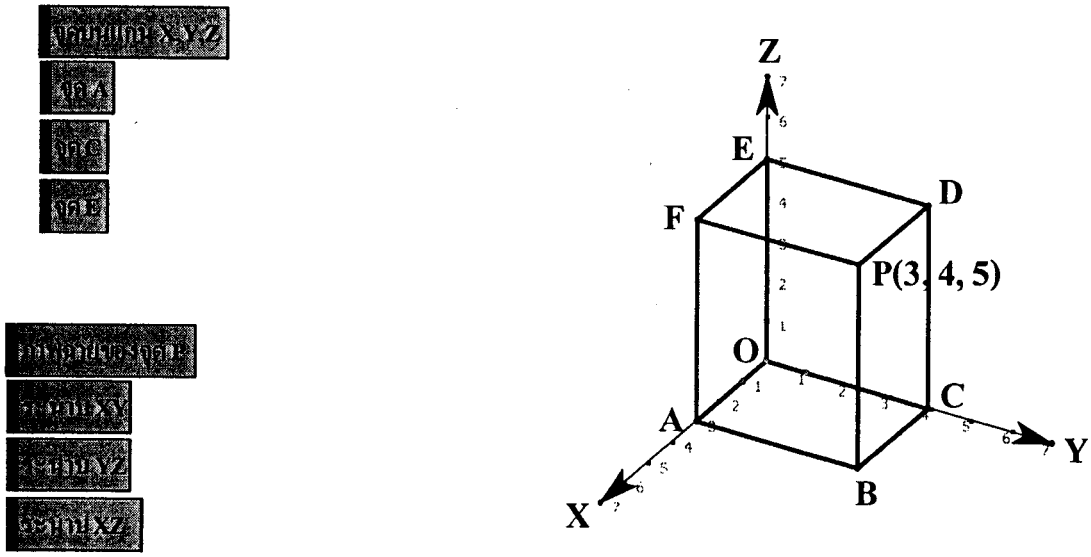
## โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่อง ระบบพิกัดฉากสามมิติ

**จุดประสงค์การเรียนรู้**

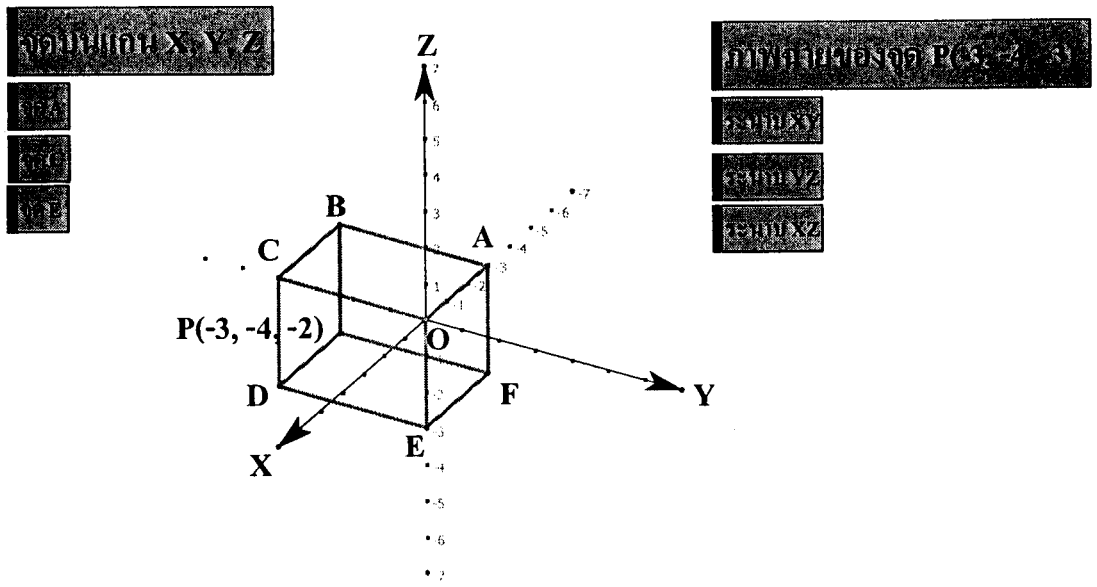
**นักเรียนมีความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเวกเตอร์ในสามมิติ ดังนี้**

1. **เขียนภาพจากจุดที่กำหนดให้ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติได้**
2. **หาภาพฉายของจุดบนระนาบพิกัดฉากสามมิติที่กำหนดให้ได้**
3. **หาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติที่กำหนดให้ได้**
4. **นำความรู้เรื่องระบบพิกัดฉากสามมิติไปใช้ในการแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้**

**ตัวอย่างที่ 1** การกำหนดจุด P(3, 4, 5) ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ

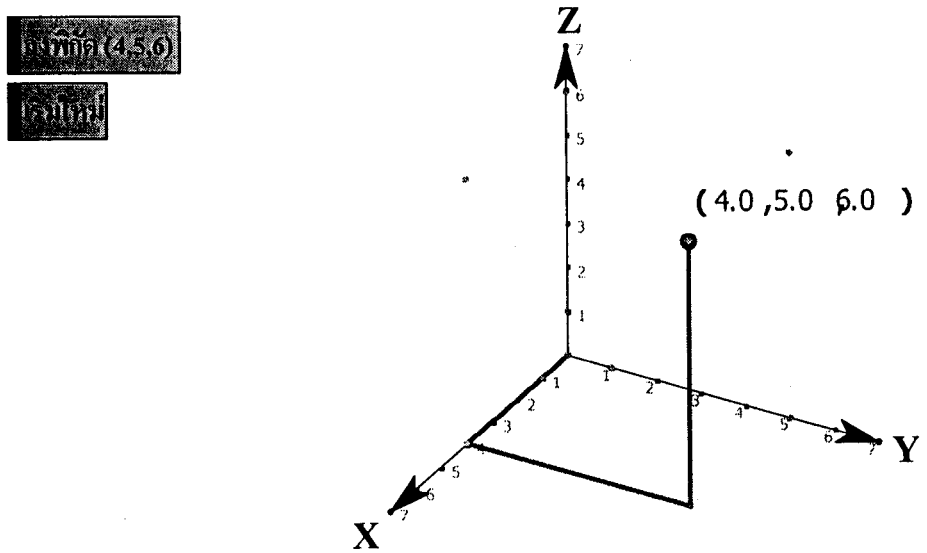


**ตัวอย่างที่ 2** การกำหนดจุด P(-3, -4, -3) ลงในระบบพิกัดฉากสามมิติ



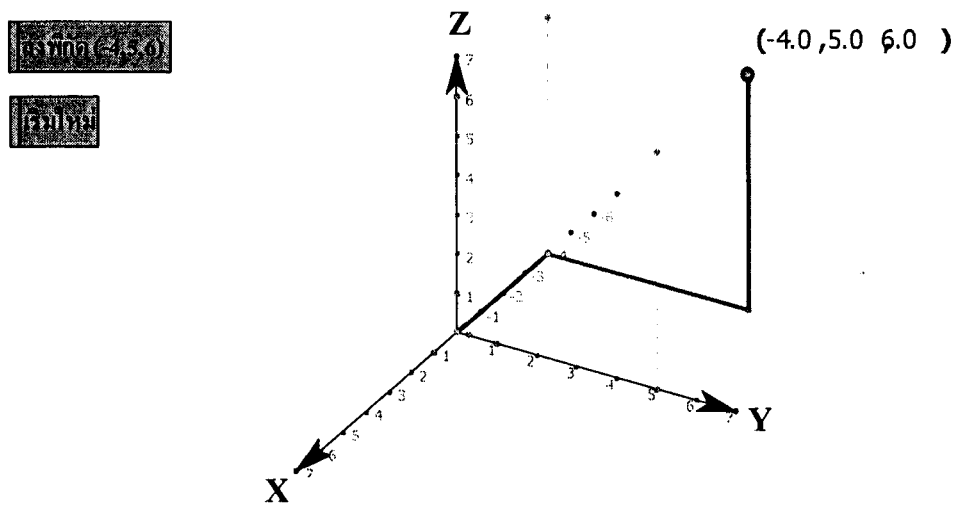

# การลงพิกัดในปริภูมิสามมิติ

**พิกัด P(4,5,6)**



# การลงพิกัดในปริภูมิสามมิติ

**พิกัด P(-4,5,6)**



# การหาระยะทางระหว่างจุดสองจุดในปริภูมิสามมิติ

ทฤษฎีบท ระยะทางระหว่างจุด $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$ หรือ PQ มีค่าเท่ากับ $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

จุด A-O

จุด A

จุด B

จุด C

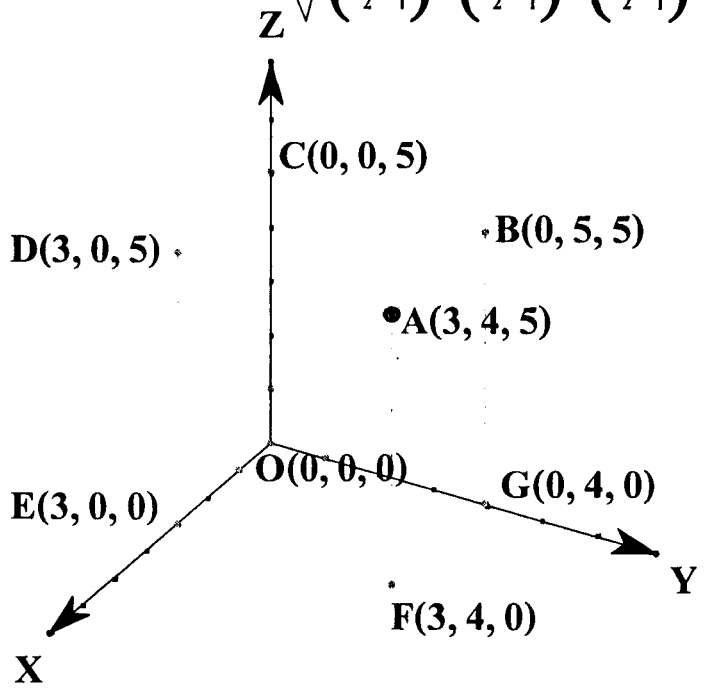
จุด D

จุด E

จุด G

จุด F

จุด O




ตัวอย่าง

**ตัวอย่าง จงหาระยะทางระหว่างจุด D และจุด F**

วิธีทำ

**วิธีทำ พิกัดจุด D (3, 0, 5) และ จุด F(3, 4, 0)**

$$\text{ระยะทางระหว่างจุดD (3, 0, 5) และ จุด F(3, 4, 0)} = \sqrt{(3-3)^2+(4-0)^2+(0-5)^2}$$

$$= \sqrt{0+16+25}$$

$$= \sqrt{41}$$

**แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2**

**เรื่อง เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค 40204**

**กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 4 ชั่วโมง**

---

**1. สาระสำคัญ**

**เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ** เมื่อ $\bar{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ หมายถึง $\bar{u}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด $(0, 0, 0)$ หรือจุด O และมีจุดสิ้นสุดที่จุด $(x, y, z)$

**ขนาดของเวกเตอร์** ถ้า $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ แล้ว $|\bar{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

**เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือ $\frac{1}{u} \cdot \bar{u}$ หรือ

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

**โคไซน์แสดงทิศทาง** โคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$ เมื่อ $\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ซึ่ง $|\bar{a}| \neq 0$ เทียบกับแกน X, Y, Z ตามลำดับ คือจำนวนซึ่งเรียงลำดับ ดังนี้ $\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}$

เวกเตอร์สองเวกเตอร์จะมีทิศทางเดียวกันก็ต่อเมื่อมีโคไซน์แสดงทิศทางชุดเดียวกัน และจะมีทิศทางตรงข้ามกันก็ต่อเมื่อโคไซน์แสดงทิศทางเทียบแต่ละแกนของเวกเตอร์หนึ่งเป็นจำนวนตรงข้ามกับโคไซน์แสดงทิศทางของอีกเวกเตอร์หนึ่ง

**2. <u>จุดประสงค์การเรียนรู้</u>**

นักเรียนมีความสามารถ

2.1 หาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

2.2 หาผลบวก ผลต่าง ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

2.3 หาผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

2.4 หาขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

2.5 หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

2.6 หาโคไซน์แสดงทิศทางได้

**3. สาระการเรียนรู้**

3.1 เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.2 ผลบวก ผลต่าง ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.3 ผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.4 ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.5 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.6 โคไซน์แสดงทิศทาง

**4. กิจกรรมการเรียนรู้**

**<u>ชั่วโมงที่ 1</u>**

1.ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบเรื่อง เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติแล้ว นักเรียนสามารถ

1.1 หาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

1.2 หาผลบวก ผลต่าง ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยใช้การถาม-ตอบ

3. ครูแจกใบความรู้ที่ 2.1 และให้นักเรียนศึกษาโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่อง เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ การหาหาผลบวก ผลต่าง ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยศึกษาตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

3.1 หาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด

3.2 หาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นไม่ได้อยู่ที่จุดกำเนิด

3.3 การเท่ากันของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.4 การบวกเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.5 เวกเตอร์ศูนย์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.6 การลบเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

4. ครูมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 2.1 โดยมีครูเดินดูรอบๆ คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ และตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ การหาผลบวก ผลต่าง ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

6. ครูให้นักเรียนกำหนดจุดพิกัดขึ้นเองแล้วให้นักเรียนแสดงวิธีการหาเวกเตอร์จากจุดที่นักเรียนกำหนดขึ้น และแสดงวิธีการหาผลบวก ผลต่าง ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ เป็นผลงานส่งนอกเวลาเรียน

**ชั่วโมงที่ 2**

1.ทบทวนความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ วิธีการหาผลบวก ผลต่างของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยใช้การถาม-ตอบ

2.ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบเรื่อง ผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ และขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติแล้ว นักเรียนสามารถ

2.1 หาผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

2.2 หาขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

3. ครูแจกใบความรู้ที่ 2.2 และให้นักเรียนศึกษาโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ และขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

4. ครูมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 2.2โดยมีครูเดินดูรอบๆ คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ และตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

5.ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ และขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

6.ครูให้นักเรียนกำหนดเวกเตอร์สองเวกเตอร์ขึ้นเองแล้วให้นักเรียนแสดงวิธีการหาผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์และขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติเป็นผลงานส่งนอกเวลาเรียน

**ชั่วโมงที่ 3**

1.ทบทวนความรู้เกี่ยวกับผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ และขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยใช้การถาม-ตอบ

2.ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบเรื่อง เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติแล้ว นักเรียนสามารถหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติได้

3. ครูแจกใบความรู้ที่ 2.3 และให้นักเรียนศึกษาโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยศึกษาตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

3.1เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

3.2เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางตรงข้ามกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์

3.3 หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยจากจุดที่กำหนดให้ในรูปของ $\bar{i}, \bar{j}$ และ $\bar{k}$

4. ครูมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 2.3โดยมีครูเดินดูรอบๆ

คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ และตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

5.ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติ 6. ครูให้นักเรียนกำหนดเวกเตอร์สองเวกเตอร์ขึ้นเอง แล้วให้นักเรียนแสดงวิธีการหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติ เป็นผลงานส่งนอกเวลาเรียน

**ชั่วโมงที่ 4**

1.ทบทวนความรู้เกี่ยวกับเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติ โดยใช้การถาม-ตอบ

2.ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบเรื่องโคไซน์แสดงทิศทางแล้ว นักเรียนสามารถหาโคไซน์แสดงทิศทางได้

3. ครูแจกใบความรู้ที่ 2.4 และให้นักเรียนศึกษาโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องการหาหาโคไซน์แสดงทิศทางโดยศึกษาตามลำดับขั้นตอนต่อไปนี้

3.1 การเท่ากันของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.2 การบวกเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.3 เวกเตอร์ศูนย์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

3.4 การลบเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

4. ครูมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 2.4 โดยมีครูเดินดูรอบๆ คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ และตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาโคไซน์แสดงทิศทาง

6.ครูให้นักเรียนกำหนดเวกเตอร์สองเวกเตอร์ขึ้นเอง แล้วให้นักเรียนแสดงวิธีการหาโคไซน์แสดงทิศทาง เป็นผลงานส่งนอกเวลาเรียน

**5. สื่อการเรียนรู้**

5.1 ใบความรู้ที่ 2.1 - 2.4

5.2 แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 2.1 - 2.4

5.3 โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

5.4 เครื่องคอมพิวเตอร์

**6. แหล่งการเรียนรู้เพิ่มเติม**

6.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

6.2 ห้องสมุดโรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย

6.3 ห้องศูนย์สื่อเทคโนโลยีกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

6.4 ห้องศูนย์วิทยบริการ

**7. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้**

| การวัดผล | การประเมินผล |
|---|---|
| 1. สังเกตจากการตอบคำถาม | 1.นักเรียนส่วนใหญ่ตอบคำถามได้ถูกต้อง |
| 2. สังเกตจากการเข้าร่วมกิจกรรม | 2.นักเรียนสนใจและร่วมกิจกรรมดี |
| 3. การทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติ | 3.นักเรียนส่วนใหญ่ทำได้ถูกต้อง |
| 5. งานอื่นๆ ที่ได้รับมอบหมาย | 4.นักเรียนมีความรับผิดชอบและส่งงานที่ครูมอบหมายได้ตรงเวลา |

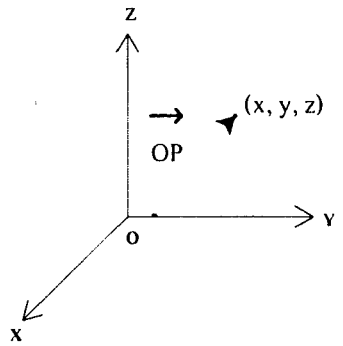
# สื่อการเรียนรู้ประกอบ
# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2
# เรื่อง
# เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

## ใบความรู้ที่ 2.1

## เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

**บทนิยาม** กำหนดให้ $x, y, z$ เป็นจำนวนจริง เรียก $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ว่า **เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ** หรือ **เวกเตอร์ในสามมิติ** หรือเรียกสั้นๆ ว่า **เวกเตอร์**

ในทางเรขาคณิตเราแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ด้วยส่วนของเส้นตรงที่กำหนดทิศทางซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด $(0)$ และมีจุดสิ้นสุดที่ $(x, y, z)$ ดังรูป




**ตัวอย่างที่ 1** จงหาเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด O และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดต่อไปนี้

1. P (3, 1,-2)
2. Q (0, -2, 5)

**วิธีทำ**

.....

.....

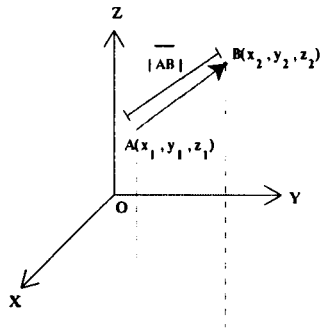
.....

**ตัวอย่างที่ 2** จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้ลงไปในระบบพิกัดฉาก $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\bar{c} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

**วิธีทำ**

**การหาเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติที่มีจุดเริ่มต้นไม่ได้อยู่ที่จุดกำเนิด**

ส่วนของเส้นตรงที่ระบุทิศทาง มีจุดเริ่มต้นที่ $A(x_1, y_1, z_1)$ และจุดสิ้นสุดที่ $B(x_2, y_2, z_2)$ ซึ่งแทนด้วย $\overrightarrow{AB}$ หมายถึง เวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$ ดังรูป




**ตัวอย่างที่ 3** กำหนดให้ P มีพิกัดเป็น (3, 4, -4) และ Q มีพิกัดเป็น (5, 0, 7) จงหา $\overrightarrow{PQ}$

**วิธีทำ**

.....

.....

.....

**บทนิยาม**

**การเท่ากันของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ**

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ a=d, b=e และ c=f

**การบวกเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ**

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$$

**เวกเตอร์ศูนย์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ**

เวกเตอร์ศูนย์คือ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

**การลบเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ**

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$$

## ใบความรู้ที่ 2.2

### การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

$$\alpha\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$$ เมื่อ $\alpha$ เป็นจำนวนจริงใดๆ

**ตัวอย่างที่ 4** กำหนดให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\bar{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ และ $\alpha = -\frac{1}{2}$

จงหา $\bar{a}+2\bar{b}$, $3\bar{b}-\bar{b}$, $-\bar{a}$, $\alpha\bar{a}$

**วิธีทำ**

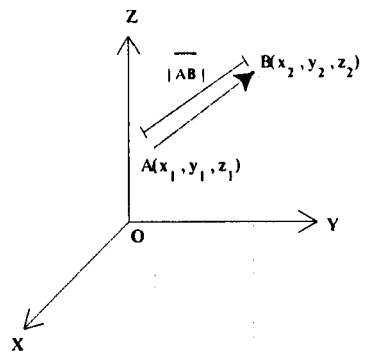
.....

.....

.....

### ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

ถ้า $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ A มีพิกัดเป็น $(x_1, y_1, z_1)$ และ B มีพิกัดเป็น $(x_2, y_2, z_2)$ ดังรูป




$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$$ และ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$

ถ้าให้ $x_2 - x_1 = a, y_2 - y_1 = b, z_2 - z_1 = c$ แล้ว จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ และ

ขนาดของ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

**ตัวอย่างที่ 5** จงหาขนาดของเวกเตอร์ $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่ P มีพิกัดเป็น (2, 1, 0) และ Q มีพิกัดเป็น (-1, 1, 0)

**วิธีทำ**

.....

.....

.....

## ใบความรู้ที่ 2.3
## เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติ

**บทนิยาม**

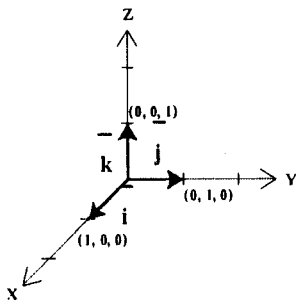
เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยเรียกว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)

ในสามมิติเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ใดๆ

ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์คือ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติที่สำคัญคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

โดยแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{i}$ แทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{j}$ และแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{k}$ ดังรูป




และในทำนองเดียวกันให้ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ เป็นเวกเตอร์ในสามมิติ

เราสามารถเขียน $\bar{u}$ ให้อยู่ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$ ดังนี้

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

$$= a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$$

**หมายเหตุ** เราทราบว่า $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}$ และเนื่องจาก $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

ดังนั้น $\left|a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

**ตัวอย่างที่ 6** $\overrightarrow{P_1P_2}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $P_1(1, 2, 0)$ และจุดปลายที่ $P_2(-2, 3, 1)$ จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{P_1P_2}$ ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$

**วิธีทำ**

.....

.....

.....

## ใบความรู้ที่ 2.4

## โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines)

การกำหนดทิศทางของเวกเตอร์นั้น นอกจากกำหนดด้วยพิกัดของเวกเตอร์แล้วยังสามารถกำหนดด้วยมุมที่เวกเตอร์ทำกับพิกัดทั้งสามดังนี้

กำหนดจุด $P(a_1, a_2, a_3)$ จะได้ $\overrightarrow{op} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ กำหนด $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เป็นมุมที่วัดจากแกนพิกัดด้านบวกทั้งสามตามลำดับไปยัง $\overrightarrow{op}$ จะได้

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a_1}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$\cos\beta = \frac{OR}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a_2}{|\overrightarrow{OP}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{OS}{|\overrightarrow{OP}|} = \frac{a_3}{|\overrightarrow{OP}|}$$

**หมายเหตุ** ในที่นี้ OQ, OR, OS หมายถึง ระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน X, Y, Z ตามลำดับ มุม $\alpha, \beta, \gamma$ คือมุมที่ $\overrightarrow{op}$ ทำกับแกน X, Y, Z ทางด้านบวก ตามลำดับ เรียกมุมดังกล่าวว่า **มุมกำหนดทิศทาง** (direction angle) ของ $\overrightarrow{op}$ และเรียก $\cos\alpha$, $\cos\beta$ และ $\cos\gamma$ ว่า **โคไซน์แสดงทิศทาง** (direction cosines) ของ $\overrightarrow{op}$ เราสามารถนิยามโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ใดๆ ได้ดังนี้

**นิยาม** โคไซน์แสดงทิศทาง (direction cosines) ของ $\bar{a}$ เมื่อ

$\bar{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ ซึ่ง $|\bar{a}| \neq 0$ เทียบกับแกน X, Y, Z ตามลำดับ คือ จำนวนสามจำนวนซึ่งเรียงตามลำดับดังนี้ $\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}$

**ตัวอย่างที่ 7** ให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของ $\bar{a}$

**วิธีทำ**

.....

.....

.....

**ตัวอย่างที่ 8** จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P(0, 3, 5)และจุดสิ้นสุดที่ **Q (1, 5, 2)**

**วิธีทำ**

.....

.....

.....

## แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 2.1

1. จงหา $\overrightarrow{AB}$ และ $\overrightarrow{BA}$ เมื่อกำหนด $A$ และ $B$ ดังต่อไปนี้

1) $A(1,-1,2)$, $B(2,-1,0)$

.....

.....

.....

2) $A(7, 3, 1)$, $B(-1,8,3)$

.....

.....

.....

3) $A(1, 1, -1)$, $B(0,0,0)$

.....

.....

.....

2. กำหนด $\bar{U} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$ จงหา นิเสธของ $2\bar{U} - \bar{v}$

.....

.....

.....

3. เวกเตอร์ต่อไปนี้เวกเตอร์คู่ใดบ้างที่ขนานกัน $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 2.2

1. จงหาขนาดของเวกเตอร์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-4\\0\\-1\end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

2. จงแก้สมการต่อไปนี้

$$x\begin{bmatrix}1\\1\\3\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\7\\-1\end{bmatrix}$$

.....

.....

.....

## แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 2.3

1. จงเขียนเวกเตอร์ต่อไปนี้รูปของ $\bar{i}, \bar{j}$ และ $\bar{k}$ ในระนาบพิกัดฉากสามมิติ

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}1\\3\\-4\end{bmatrix}$ เมื่อ $A$ เป็นจุดกำเนิดในระนาบพิกัดฉากสามมิติ

.....

.....

2. $\overrightarrow{RS}$ โดยที่ R(1,–1,2) และ S(3,2,6)

.....

.....

.....

3. $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่ P(0,1,1) และ Q(–1,–1,2)

.....

.....

.....

2. จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้โดยเขียนในรูปของ $\bar{i}, \bar{j}$ และ $\bar{k}$ ในระนาบพิกัดฉากสามมิติ

1. $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$

.....

.....

.....

2. $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่ $P(1,5,8)$ และ $Q(0,-3,1)$

.....

.....

.....

3. จงหาเวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วย และขนานกับเวกเตอร์ที่กำหนดให้ในข้อ 2

.....

.....

.....

## แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 2.4

1. จงหาเวกเตอร์พร้อมทั้งบอกขนาด และโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ซึ่งมีจุดเริ่มต้นและจุดสิ้นสุดดังต่อไปนี้

1. จุดเริ่มต้น $A(2,5,3)$ จุดสิ้นสุด $B(3,5,-1)$

.....

.....

2. จุดเริ่มต้น $P(-1,4,-2)$ จุดสิ้นสุด $Q(2,-4,7)$

.....

.....

.....

3. จุดเริ่มต้น $R(-3,1,0)$ จุดสิ้นสุด $S(4,2,8)$

.....

.....

.....

2. จงตรวจสอบว่า เวกเตอร์ที่กำหนดให้ต่อไปนี้เวกเตอร์ใดบ้างที่ขนานกัน

1. เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ $A(1,4,3)$และจุดสิ้นสุด $B(-2,0,1)$

2. $\bar{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

3. เวกเตอร์ $\overrightarrow{AB}$ ซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด และจุดสิ้นสุดที่ $B(5,0,2)$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ตัวอย่างบทเรียนโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

# โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาผลบวก ผลต่าง ของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้
2. หาผลคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้
3. หาขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติได้
4. หาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติได้
5. หาโคไซน์แสดงทิศทางได้

## เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

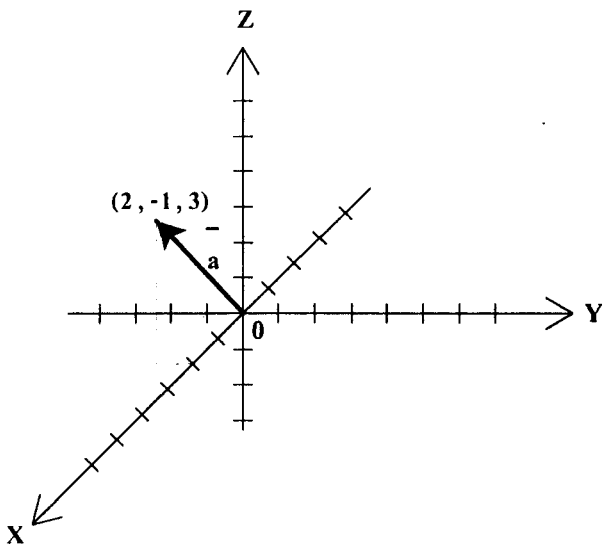
เนื้อหา

**บทนิยาม** กำหนดให้ $x, y, z$ เป็นจำนวนจริง เรียก $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ว่า เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ หรือ เวกเตอร์ในสามมิติ หรือ เรียกสั้น ๆ ว่า เวกเตอร์

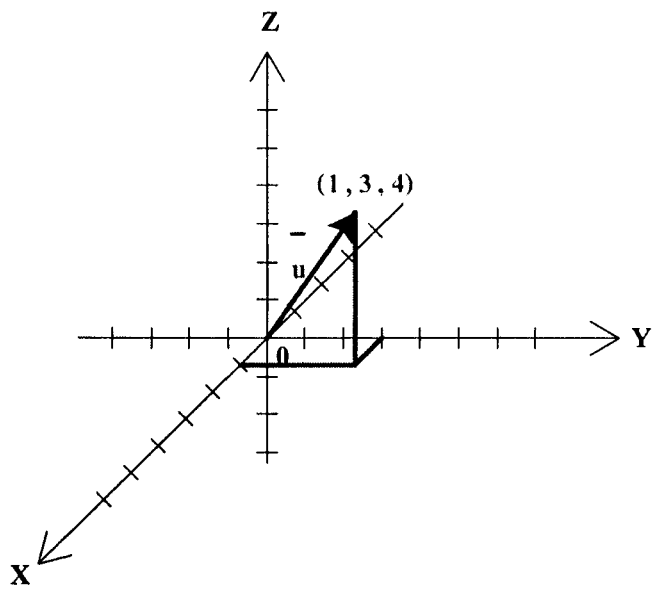
ในทางเรขาคณิตแทนเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ด้วยส่วนของเส้นตรงที่กำหนดทิศทางซึ่งมีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด (O) และมีจุดสิ้นสุดที่ $(x, y, z)$

จงเขียนเวกเตอร์ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ ลงในระบบพิกัดฉาก

วิธีเขียน
พิกัด x
กึ่งพิกัด x
พิกัด y
กึ่งพิกัด y
พิกัด z
กึ่งพิกัด z
เวกเตอร์ a
กึ่งเวกเตอร์ a



# จงเขียนเวกเตอร์ $\bar{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ ลงในระบบพิกัดฉาก




พิกัด x

ค่าสัมบูรณ์ของพิกัด x

พิกัด x, y

ค่าสัมบูรณ์ของพิกัด x,y

พิกัด z

ค่าสัมบูรณ์ของพิกัด z

เวกเตอร์ u

ค่าสัมบูรณ์ของเวกเตอร์ u

**ตัวอย่าง** จงหาเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุดกำเนิด $O(0, 0, 0)$ และจุดสิ้นสุดอยู่ที่จุดต่อไปนี้

1) P (3, 4, 2)  2) Q (-1, 0, -7)

วิธีทำ

1) $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-0 \\ 4-0 \\ 2-0 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$

2) $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1-0 \\ 0-0 \\ -7-0 \end{bmatrix}$

นั่นคือ $\overrightarrow{OQ} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -7 \end{bmatrix}$

**ตัวอย่าง** กำหนดให้ P มีพิกัดเป็น (3, 4, -4) และ Q มีพิกัดเป็น (5, 0, 7) จงหา $\overrightarrow{PQ}$ และ $\overrightarrow{QP}$

**วิธีทำ**

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5-3 \\ 0-4 \\ 7-(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{QP} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-5 \\ 4-0 \\ (-4)-7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ -11 \end{bmatrix}$$

**เรื่องเวกเตอร์** เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ การเท่ากันของเวกเตอร์ การบวกเวกเตอร์ เวกเตอร์ศูนย์ นิเสธของเวกเตอร์ การลบเวกเตอร์ และการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ จะเป็นตามบทนิยามต่อไปนี้

**บทนิยาม**

บทนิยาม เวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ

**การเท่ากันของเวกเตอร์**

การเท่ากัน $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix}$ ก็ต่อเมื่อ $a = d$, $b = e$ และ $c = f$

**การบวกเวกเตอร์**

การบวกเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+d \\ b+e \\ c+f \end{bmatrix}$

**เวกเตอร์ศูนย์**

เวกเตอร์ศูนย์ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

นิเสธของเวกเตอร์

นิเสธของเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a \\ -b \\ -c \end{bmatrix}$

บทนิยาม 1 2

การลบเวกเตอร์

การลบเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} d \\ e \\ f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a-d \\ b-e \\ c-f \end{bmatrix}$

บทนิยาม 1 2 3 4

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์

การคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์ $\alpha \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha b \\ \alpha c \end{bmatrix}$

บทนิยาม 1 2 3

เมื่อ $\alpha$ เป็นจำนวนจริงใด ๆ

ตัวอย่าง

กำหนดให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix}$ , $\bar{b} = \begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix}$ และ $\alpha = -\frac{1}{2}$ จงหา

ข้อ 1 $1.\ \bar{a} + 2\bar{b}$

วิธีทำ วิธีทำ $\bar{a} + 2\bar{b} = \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}3\\4\\2\end{bmatrix}$

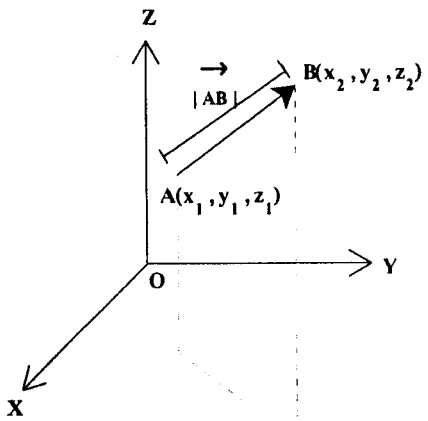
1

2 $= \begin{bmatrix}1\\2\\4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}6\\8\\4\end{bmatrix}$

3 $= \begin{bmatrix}1+6\\2+8\\4+4\end{bmatrix}$

4 $= \begin{bmatrix}7\\10\\8\end{bmatrix}$

## ขนาดของเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ




ถ้า $\overrightarrow{AB}$ เป็นเวกเตอร์ในระบบพิกัดฉากสามมิติ A มีพิกัดเป็น $(x_1, y_1, z_1)$ และ B มีพิกัดเป็น $(x_2, y_2, z_2)$ ดังรูป

จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}x_2 - x_1\\y_2 - y_1\\z_2 - z_1\end{bmatrix}$

และ $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

ถ้าให้ $x_2 - x_1 = a$, $y_2 - y_1 = b$, $z_2 - z_1 = c$ แล้ว

จะได้ $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ และขนาดของ $\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$ เท่ากับ $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

**ตัวอย่าง** จงหาขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ โดยที่ P มีพิกัดเป็น (2, 1, 0) และQ มีพิกัดเป็น (-1, 1, 0)

**วิธีทำ**

**วิธีทำ** วิธีทำ $PQ = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

1

2 $= \begin{bmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 0-0 \end{bmatrix}$

3 $= \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

4 ดังนั้น $|PQ| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 0^2}$

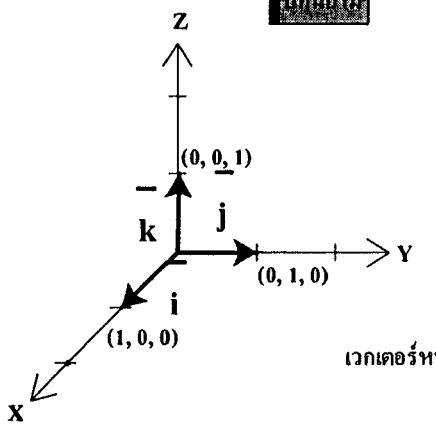
5 $= \sqrt{9}$

**ตอบ** $= 3$

## เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในระบบพิกัดฉากสามมิติ

**บทนิยาม** บทนิยาม

เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยเรียกว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector)




เวกเตอร์หนึ่งหน่วยและมีทิศทางเดียวกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

ใดๆ ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยในสามมิติที่สำคัญคือ $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ โดยแทน $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

ด้วย $\bar{i}$ แทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{j}$ และแทน $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ด้วย $\bar{k}$ ดังรูป

**ตัวอย่าง** $\overrightarrow{AB}$ มีจุดเริ่มต้นที่ A(1, 2, 0) และจุดปลายที่ B(-2, 3, 1) จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ ในรูปของ $\bar{i}$, $\bar{j}$ และ $\bar{k}$

**วิธีทำ** เนื่องจากเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

1. $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{bmatrix}$

2. $= \begin{bmatrix} -2 - 1 \\ 3 - 2 \\ 1 - 0 \end{bmatrix}$

3. $= \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. และ $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$

5. $= \sqrt{(-3)^2+1^2+1^2}$

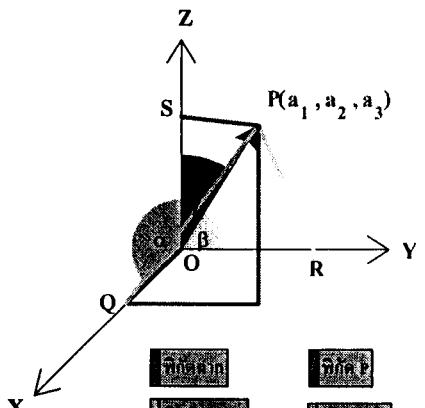
จะได้เวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\overrightarrow{AB}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}-3\\1\\1\end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix}\frac{-3}{\sqrt{11}}\\ \frac{1}{\sqrt{11}}\\ \frac{1}{\sqrt{11}}\end{bmatrix}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{11}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{11}}\bar{k}$$

## โคไซน์แสดงทิศทาง (direction consines)




จาก P กำหนดจุด $P(a_1, a_2, a_3)$ จะได้ $\overrightarrow{OP} = \begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$

กำหนดมุม กำหนด $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เป็นมุมที่วัดจากแกนพิกัดด้านบวกทั้งสามตามลำดับ $\overrightarrow{OP}$ ไปยัง $\overrightarrow{OP}$ จะได้

$$\cos\alpha = \frac{OQ}{|\dot{OP}|} = \frac{a_1}{|\dot{OP}|}$$

$$\cos\beta = \frac{OR}{|\dot{OP}|} = \frac{a_2}{|\dot{OP}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{OS}{|\dot{OP}|} = \frac{a_3}{|\dot{OP}|}$$

**หมายเหตุ**

หมายเหตุ

OQ , OR , OS หมายถึง ระยะที่มีทิศทางตามแนวแกน X , Y , Z ตามลำดับ

มุม $\alpha, \beta, \gamma$ คือมุมที่ $\overrightarrow{OP}$ ทำกับแกน X , Y , Z ทางด้านบวก ตามลำดับ เรียกมุมดังกล่าวว่า มุมกำหนดทิศทาง ของ $\overrightarrow{OP}$

เรียก $\cos\alpha$ , $\cos\beta$ , $\cos\gamma$ ว่า โคไซน์แสดงทิศทาง ของ $\overrightarrow{OP}$

**ตัวอย่าง** จงหาโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่ P (0 , 3 , 5) และจุดสิ้นสุดที่ Q (1 , 5 , 2)

**วิธีทำ** วิธีทำ $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 1-0 \\ 5-3 \\ 2-5 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

และ $|\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}$

$$= \sqrt{1+4+9}$$

$$= \sqrt{14}$$

ดังนั้น โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ $\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{-3}{\sqrt{14}}$

**แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3**

**เรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์** **รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม** **รหัสวิชา ค 40204**

**กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์** **ช่วงชั้นที่ 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5** **จำนวน 2 ชั่วโมง**

---

**1. สาระสำคัญ**

ผลคูณเชิงสเกลาร์ หมายถึง ผลคูณของเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์ ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ เขียนแทนด้วย $\bar{u}\cdot\bar{v}$

**2. จุดประสงค์การเรียนรู้**

นักเรียนมีความสามารถ

2.1 หาผลคูณเชิงสเกลาร์ได้

2.2 นำความรู้เรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้

**3. สาระการเรียนรู้**

3.1 ผลคูณเชิงสเกลาร์

3.2 การนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

**4. กิจกรรมการเรียนรู้**

**<u>ชั่วโมงที่ 1</u>**

1.ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบเรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์แล้ว นักเรียนสามารถหาผลคูณเชิงสเกลาร์ในรูป $\bar{u}\cdot\bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ ได้

2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการคูณเวกเตอร์ด้วยสเกลาร์โดยใช้การถาม-ตอบ

3. ครูให้นักเรียนศึกษาโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์ โดยครูอธิบายและกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมหาคำตอบจากตัวอย่างที่ครูเสนอ

4. ครูมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 3.1 โดยมีครูเดินดูรอบๆ คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ และตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาผลคูณเชิงสเกลาร์

6. ครูให้นักเรียนกำหนดเวกเตอร์ขึ้นเองแล้วให้นักเรียนแสดงวิธีการหาผลคูณเชิงสเกลาร์จากเวกเตอร์ที่นักเรียนกำหนดขึ้น และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียนเป็นการบ้านส่งนอกเวลาเรียน

**<u>ชั่วโมงที่ 2</u>**

1 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาผลคูณเชิงสเกลาร์ในรูป $\bar{u}\cdot\bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

โดยใช้การถาม-ตอบ

2.ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบเรื่อง ผลคูณเชิงสเกลาร์แล้ว นักเรียนสามารถหาผลคูณเชิงสเกลาร์ในรูป $\bar{u}\cdot\bar{v}=|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$ ได้

3. ครูให้นักเรียนศึกษาโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์ และการนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

4. ครูมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 3.2 โดยมีครูเดินดูรอบๆ คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ และตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

5. ครูให้นักเรียนแสดงวิธีหาคำตอบแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 3.2 บนกระดานเพื่อตรวจสอบความถูกต้องและความเข้าใจของนักเรียนอีกครั้งหนึ่ง

6. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาผลคูณเชิงสเกลาร์ และการนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

7. ครูให้นักเรียนกำหนดเวกเตอร์สองเวกเตอร์ขึ้นเอง แล้วให้นักเรียนแสดงวิธีการหาผลคูณเชิงสเกลาร์ และการนำไปใช้ในการแก้ปัญหา เป็นการบ้านส่งนอกเวลาเรียน

**5. สื่อการเรียนรู้**

5.1 แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 3.1 และ 3.2

5.2โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์

5.3 เครื่องคอมพิวเตอร์

**6. แหล่งการเรียนรู้เพิ่มเติม**

6.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

6.2 ห้องสมุดโรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย

6.3 ห้องศูนย์สื่อเทคโนโลยีกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

6.4 ห้องศูนย์วิทยบริการ

**7. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้**

| การวัดผล | การประเมินผล |
|---|---|
| 1. สังเกตจากการตอบคำถาม<br>2. สังเกตจากการเข้าร่วมกิจกรรม<br>3. แบบฝึกทักษะปฏิบัติ | 1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง<br>2. นักเรียนสนใจและร่วมกิจกรรมดี<br>3.นักเรียนทำได้ถูกต้องและส่งงานได้ตรงตามเวลาที่กำหนด |

# สื่อการเรียนรู้ประกอบ
# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3
# เรื่อง
# ผลคูณเชิงสเกลาร์

## แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 3.1

1. จงหาค่าของ $\bar{u}\cdot\bar{v}$ เมื่อกำหนด $\bar{u}=-\bar{i}+3\bar{j}+\bar{k}$ และ $\bar{v}=3\bar{i}+4\bar{k}$

.....

.....

.....

2. กำหนดให้ $\bar{a}=\begin{bmatrix}-4\\2\\4\end{bmatrix}$, $\bar{b}=\begin{bmatrix}2\\7\\-7\end{bmatrix}$, $\bar{c}=\begin{bmatrix}6\\-3\\6\end{bmatrix}$ จงหา $(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b})$

.....

.....

.....

3. เวกเตอร์ในข้อใดเป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกันและกัน

3.1 $\begin{bmatrix}2\\-2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$

.....

.....

.....

3.2 $\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\-2\\1\end{bmatrix}$

.....

.....

.....

4. กำหนดให้ $\bar{u}=3\bar{i}-2\bar{j}+5\bar{k}$ และ $\bar{v}=\bar{i}+2\bar{j}-\bar{k}$ จงหา $\bar{u}\cdot\bar{v}$

.....

.....

.....

## แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 3.2

1. ถ้า $|\bar{u}|=5,|\bar{v}|=3$ และ $|\bar{u}+\bar{v}|=4$ แล้ว $|\bar{u}-\bar{v}|$ มีค่าเท่าใด

.....

.....

.....

2. กำหนดให้ $|\bar{u}|=2,|\bar{v}|=5$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$ เท่ากับ $60^\circ$ จงหา $\bar{u}\cdot\bar{v}$

.....

.....

.....

3. ถ้า $|\bar{u}|=4,|\bar{v}|=3$ และ $|\bar{u}+\bar{v}|=6$ แล้ว จงหา $|\bar{u}-\bar{v}|$ มีค่าเท่าใด

.....

.....

.....

4. ให้ $\bar{u}\cdot\bar{v}=5,|\bar{u}|=2$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เท่ากับ $60^\circ$ จงหา $|\bar{u}+\bar{v}|$

.....

.....

.....

5. กำหนดให้ $\overrightarrow{OA}=\bar{i}+3\bar{j},\ \overrightarrow{OB}=4\bar{i}+\bar{j}$ ถ้าลากเส้นตรงจากจุด $A$ ไปตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด P แล้วพื้นที่ของรูป $\Delta OAD$ มีค่าเท่าใด

.....

.....

.....

ตัวอย่างบทเรียนโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

# ผลคูณเชิงเกลาร์

## จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาผลคูณเชิงสเกลาร์ได้
2. นำความรู้เรื่องผลคูณเชิงสเกลาร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้

## ผลคูณเชิงสเกลาร์

**นิยาม** ความหมาย

ผลคูณของเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นสเกลาร์

**บทนิยาม** บทนิยาม

ถ้า $\bar{u} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ และ $\bar{v} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ และ

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ คือ $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

เขียนแทนด้วย $\bar{u} \cdot \bar{v}$

**ตัวอย่าง** ให้ $\bar{a} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ และ $\bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ จงหา $\bar{a} \cdot \bar{b}$

**วิธีทำ** วิธีทำ $\bar{a} \cdot \bar{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$

$= (4)(1) + (1)(-2) + (-2)(-3)$

$= 4 - 2 + 6$

$= 8$

**ตัวอย่าง** จงแสดงว่ารูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดที่ $A(4, 9, 1)$, $B(-2, 6, 3)$ และ $C(6, 3, -2)$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

**วิธีทำ** วิธีทำ

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -2-4 \\ 6-9 \\ 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 6-4 \\ 3-9 \\ -2-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$= (-6)(2) + (-3)(-6) + (2)(-3)$$

$$= -12 + 18 - 6$$

$$= 0$$

ดังนั้น ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก มี $\overrightarrow{AB}$ ตั้งฉากกับ $\overrightarrow{AC}$

**ทฤษฎีบท** ถ้า $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็นเวกเตอร์ใดๆ ในสามมิติจะได้ว่า

1. $|\bar{u}+\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v}$
2. $|\bar{u}-\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v}$

**โจทย์** ถ้า $|\bar{u}|=4$ , $|\bar{v}|=3$ และ $|\bar{u}+\bar{v}|=6$ แล้ว $|\bar{u}-\bar{v}|$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

**จากสูตร** วิธีทำ จากสูตร

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 + 2\bar{u}\cdot\bar{v} \quad \text{----------(1)}$$

$$|\bar{u}-\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2 + |\bar{v}|^2 - 2\bar{u}\cdot\bar{v} \quad \text{----------(2)}$$

(1)+(2); $|\bar{u}+\bar{v}|^2 + |\bar{u}-\bar{v}|^2 = 2|\bar{u}|^2 + 2|\bar{v}|^2$ ----------(3)

**คำตอบ** จากโจทย์ $|\bar{u}|=4$ , $|\bar{v}|=3$ และ $|\bar{u}+\bar{v}|=6$

แทนค่าใน (3) จะได้ $6^2 + |\bar{u}-\bar{v}|^2 = 2(4)^2 + 2(3)^2$

$$36 + |\bar{u}-\bar{v}|^2 = 32+18$$

$$|\bar{u}-\bar{v}|^2 = 50-36$$

$$= 14$$

$$\therefore |\bar{u}-\bar{v}| = \sqrt{14}$$

**โจทย์** ให้ $\bar{u}\cdot\bar{v}=5$ , $|\bar{u}|=2$ และมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$ เป็น 60 องศา จงหา $|\bar{u}+\bar{v}|$

**วิธีทำ**

**วิธีทำ**

จากสูตร $\bar{u}\cdot\bar{v}=|\bar{u}||\bar{v}|\cos\theta$

$$5 = 2|\bar{v}|\cos 60^\circ$$

$$5 = 2|\bar{v}|\frac{1}{2}$$

$$|\bar{v}| = 5$$

$$|\bar{u}+\bar{v}|^2 = |\bar{u}|^2+|\bar{v}|^2+2\bar{u}\cdot\bar{v}$$

$$= 4+25+10$$

$$= 39$$

$$|\bar{u}+\bar{v}| = \sqrt{39}$$

**แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4**

**เรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์ รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัสวิชา ค 40204**

**กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ช่วงชั้นที่ 4 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 จำนวน 2 ชั่วโมง**

---

**1. สาระสำคัญ**

ผลคูณของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ที่ได้ผลลัพธ์เป็นเวกเตอร์เรียกว่าผลคูณเชิงเวกเตอร์

คือ ถ้า $\bar{u}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{bmatrix}$ และ $\bar{v}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$ แล้วผลคูณเชิงเวกเตอร์คือเวกเตอร์ $\begin{bmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{bmatrix}$

หรือ $=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\b_2 & b_3\end{vmatrix}\bar{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\b_1 & b_3\end{vmatrix}\bar{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{vmatrix}\bar{k}$

เขียนแทนด้วย $\bar{u}\times\bar{v}$ อ่านว่า เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี

**2. จุดประสงค์การเรียนรู้**

นักเรียนมีความสามารถ

1. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้
2. นำความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้

**3. สาระการเรียนรู้**

3.1 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

3.2 การนำความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้

**4. กิจกรรมการเรียนรู้**

**<u>ชั่วโมงที่ 1</u>**

1.ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบเรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์แล้ว นักเรียนสามารถหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้

2. ทบทวนความรู้เกี่ยวกับผลคูณเชิงสเกลาร์โดยใช้การถาม-ตอบ

3. ครูให้นักเรียนศึกษาโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์โดยครูอธิบายและกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมหาคำตอบจากตัวอย่างที่ครูเสนอ

4. ครูมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 4.1 โดยมีครูเดินดูรอบๆ คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ และตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์

6. ครูให้นักเรียนกำหนดเวกเตอร์ขึ้นเองแล้วให้นักเรียนแสดงวิธีการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์จากเวกเตอร์ที่นักเรียนกำหนดขึ้น และให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียน เป็นการบ้านส่งนอกเวลาเรียน

**ชั่วโมงที่ 2**

1 ทบทวนความรู้เกี่ยวกับการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ โดยใช้การถาม-ตอบ

2.ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบว่า เมื่อเรียนจบเรื่อง ผลคูณเชิงเวกเตอร์แล้ว นักเรียนสามารถนำความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้

3. ครูให้นักเรียนศึกษาโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเรื่องการนำความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้

4. ครูมอบหมายให้นักเรียนทำแบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 4.2โดยมีครูเดินดูรอบๆ คอยให้คำแนะนำช่วยเหลือ และตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง

5. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปการหาผลคูณเชิงเวกเตอร์ และการนำไปใช้ในการแก้ปัญหา

6. ครูให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดในหนังสือเรียนเป็นการบ้านส่งนอกเวลาเรียน

7. ครูให้นักเรียนทำแบบทดสอบหลังเรียน

**5. สื่อการเรียนรู้**

5.1 แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 4.1 และ 4.2

5.2 โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์

5.3 เครื่องคอมพิวเตอร์

**6. แหล่งการเรียนรู้เพิ่มเติม**

6.1 ห้องสมุดกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

6.2 ห้องสมุดโรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย

6.3 ห้องศูนย์สื่อเทคโนโลยีกลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

6.4 ห้องศูนย์วิทยบริการ

**7. การวัดผลและประเมินผลการเรียนรู้**

| การวัดผล | การประเมินผล |
|---|---|
| 1. สังเกตจากการตอบคำถาม | 1. นักเรียนตอบคำถามได้ถูกต้อง |
| 2. สังเกตจากการเข้าร่วมกิจกรรม | 2. นักเรียนสนใจและร่วมกิจกรรมดี |
| 3. แบบฝึกทักษะปฏิบัติ | 3. นักเรียนทำได้ถูกต้อง |

# สื่อการเรียนรู้ประกอบ
# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4
# เรื่อง
# ผลคูณเชิงเวกเตอร์

## แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 4.1

1. กำหนดให้ $\bar{u} = 2\bar{i} - 3\bar{k}$ และ $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ จงหา $\bar{u} \times \bar{v}$ และ $\bar{v} \times \bar{u}$

.....

.....

.....

2. ให้ $\bar{u} = 5\bar{i} - 3\bar{j} + 4\bar{k}$ , $\bar{v} = \bar{j} - \bar{k}$ จงหา

1. $\bar{u} \times \bar{v}$

.....

.....

.....

2. $|\bar{u} \times \bar{v}|$

.....

.....

.....

3. ค่า $\sin e$ ของมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

.....

.....

.....

3. ให้ $\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ และ $\bar{v} = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ จงหาเวกเตอร์สองเวกเตอร์ ที่มีขนาดเท่ากับ $|\bar{u} \cdot \bar{v}|$ และมีทิศทางตั้งฉากกับระนาบที่ประกอบด้วยเวกเตอร์ $\bar{u}$ และ $\bar{v}$

.....

.....

.....

## แบบฝึกทักษะปฏิบัติที่ 4.2

1. จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน PQRS เมื่อ $\overrightarrow{PQ} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$, $\overrightarrow{PS} = 3\bar{j} + 4\bar{k}$

.....

.....

.....

2. จงหาพื้นที่ของรูปสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น A(0,2,2), B(8,8,–2) และ C(9,12,6)

.....

.....

.....

3. จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{r}$ ดังนี้

3.1) $\bar{u} = \bar{i} + \bar{k}$ , $\bar{v} = \bar{i} + \bar{j}$ , $\bar{r} = \bar{j} + \bar{k}$

.....

.....

.....

3.2) $\bar{u} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 4\bar{k}$ , $\bar{v} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$ , $\bar{r} = \bar{i} + \bar{j} + 2\bar{k}$

.....

.....

.....

ตัวอย่างบทเรียนโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตประกอบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

# ผลคูณเชิงเวกเตอร์

## จุดประสงค์การเรียนรู้

1. หาผลคูณเชิงเวกเตอร์ได้
2. นำความรู้เรื่องผลคูณเชิงเวกเตอร์ไปแก้ปัญหาที่กำหนดให้ได้

# บทนิยาม

ผลคูณเชิงเวกเตอร์ของเวกกเตอร์ $\bar{u} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ และ $\bar{v} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

**บทนิยาม**

คือเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix}$

หรือ $\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b1 & b_3 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \bar{j}$

เขียนแทนด้วย $\bar{u} \times \bar{v}$ อ่านว่า เวกเตอร์ยู ครอส เวกเตอร์วี

**ตัวอย่าง** ให้ $\bar{u}=\begin{bmatrix}-1\\0\\3\end{bmatrix}, \bar{v}=\begin{bmatrix}1\\3\\4\end{bmatrix}$ จงหา $\bar{u} \times \bar{v}$

**วิธีทำ**

วิธีทำ $\bar{u}\times\bar{v} = \begin{bmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -1 & 0 & 3\\ 1 & 3 & 4\end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix}0 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 3\end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= [(0)(4)-(3)(3)]\bar{i} - [(-1)(4)-(1)(3)]\bar{j} + [(-1)(3)-(1)(0)]\bar{k}$$

$$= (0-9)\bar{i} - (-4-3)\bar{j} + (-3-0)\bar{k}$$

$$= -9\bar{i} + 7\bar{j} - 3\bar{k}$$

**ตัวอย่าง** กำหนดให้ $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{j}$ , $\bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ จงหาค่าของ sine ของมุมระหว่าง $\bar{a}$ และ $\bar{b}$

**วิธีทำ** วิธีทำ $\bar{a}\times\bar{b} = \begin{bmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix}2 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= [(-1)(1)-(1)(0)]\bar{i} - [(2)(1)-(2)(0)]\bar{j} + [(2)(1)-(2)(-1)]\bar{k}$$

$$= (-1-0)\bar{i} - (2-0)\bar{j} + (2-0)\bar{k}$$

$$= -\bar{i} - 2\bar{j} + 4\bar{k}$$

**ตัวอย่าง** $|\bar{a}\times\bar{b}| = \sqrt{(-1)^2+(-2)^2+(4)^2}$

$= \sqrt{1+4+16}$

$= \sqrt{21}$

$|\bar{a}| = \sqrt{(2)^2+(-1)^2+(0)^2}$

$= \sqrt{4+1+0}$

$= \sqrt{5}$

$|\bar{b}| = \sqrt{(2)^2+(1)^2+(1)^2}$

$= \sqrt{4+1+1}$

$= \sqrt{6}$

จาก $|\bar{a}\times\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin\theta$

จะได้ $\sin\theta = \dfrac{|\bar{a}\times\bar{b}|}{|\bar{a}||\bar{b}|}$

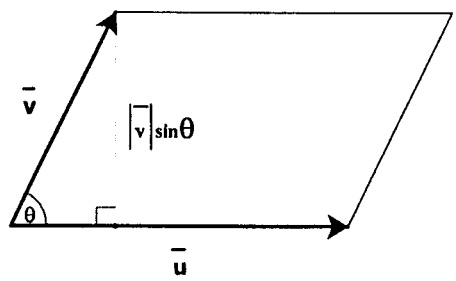
$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{21}}{\sqrt{5}\sqrt{6}}$

$= \sqrt{\dfrac{21}{30}}$

$= \sqrt{0.7}$

$\approx 0.84$

# การใช้เวกเตอร์ในการหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน




จากรูป $\theta$ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ กับ $\bar{v}$

$|\bar{v}|\sin\theta$ คือ ส่วนสูงของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน

ดังนั้น $|\bar{u}\times\bar{v}| = |\bar{u}||\bar{v}|\sin\theta$ เป็นพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านไม่ขนานกันยาว $|\bar{u}|$ และ $|\bar{v}|$ หน่วย

**โจทย์** จงหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เมื่อ $\overrightarrow{AB} = \bar{i} + 3\bar{j} + 4\bar{k}$ และ $\overrightarrow{AD} = 3\bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$

**วิธีทำ** วิธีทำ พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD $= \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right|$

**ผลคูณเชิงเวกเตอร์** $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}\bar{i} - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}\bar{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}\bar{k}$$

$$= [(3)(1)-(-2)(4)]\bar{i} - [(1)(1)-(3)(4)]\bar{j} + [(1)(-2)-(3)(3)]\bar{k}$$

$$= (3+8)\bar{i} - (1-12)\bar{j} + (-2-9)\bar{k}$$

$$= 11\bar{i} + 11\bar{j} - 11\bar{k}$$

**ดังนี้** $\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(11)^2+(11)^2+(-11)^2}$

$$= \sqrt{121+121+121}$$

$$= \sqrt{363}$$

$$= 11\sqrt{3}$$

ดังนั้น พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน ABCD เท่ากับ $11\sqrt{3}$ ตารางหน่วย

# การใช้เวกเตอร์ในการหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

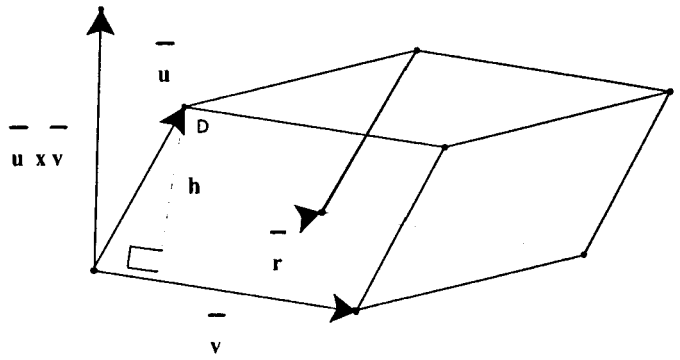
กำหนดทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งมี $\bar{u}, \bar{v}$ และ $\bar{r}$ เป็นด้าน

h เป็นความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุดสิ้นสุดของ $\bar{u}$

$\theta$ เป็นมุมระหว่าง $\bar{u}$ และ $\bar{v} \times \bar{r}$

เส้นตรง h ขนานกับ $\bar{v} \times \bar{r}$

$\therefore$ มุมแย้งย่อมเท่ากัน




เนื่องจาก $\cos\theta = \frac{\text{ชิด}}{\text{ฉาก}}$

$$\cos\theta = \frac{h}{|\bar{u}|}$$

$$\therefore \quad h = |\bar{u}||\cos\theta|$$

$|\bar{v} \times \bar{r}|$ คือ พื้นที่ฐาน

## และ ปริมาตรของสี่เหลี่ยมด้านขนานทรงตัน

$$= \text{พื้นที่ฐาน} \times \text{สูง}$$

$$= |\bar{v} \times \bar{r}||\bar{u}||\cos\theta|$$

$$= |\bar{u}||\bar{v} \times \bar{r}||\cos\theta|$$

$$= |\bar{u} \cdot (\bar{v} \times \bar{r})|$$

**ตัวอย่าง** จงหาปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี $\bar{u} = \bar{i} + \bar{j}$ , $\bar{v} = \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{r} = \bar{i} + \bar{k}$ เป็นด้าน

**วิธีทำ** วิธีทำ ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน $= \left|\bar{u} \cdot \left(\bar{v} \times \bar{r}\right)\right|$

$$\bar{v} \times \bar{r} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \bar{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \bar{k}$$

$$= [(1)(1) - (0)(1)]\bar{i} - [(0)(1) - (1)(1)]\bar{j} + [(0)(0) - (1)(1)]\bar{k}$$

$$= (1 - 0)\bar{i} - (0 - 1)\bar{j} + (0 - 1)\bar{k}$$

$$= \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$$

**ทำต่อ**

$$\left|\bar{u} \cdot \left(\bar{v} \times \bar{r}\right)\right| = \left|\left(\bar{i} + \bar{j}\right) \cdot \left(\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}\right)\right|$$

$$= |(1)(1) + (1)(1) + (0)(-1)|$$

$$= |1 + 1 + 0|$$

$$= |2|$$

$$= 2$$

**ดังนั้น ปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน เท่ากับ 2 ลูกบาศก์หน่วย**

# ภาคผนวก ข

แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค40204)

**แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน**

เรื่อง เวกเตอร์ในสามมิติ วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม (ค40204)

ภาคเรียนที่ 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 เวลา 30 นาที

\==========

**<u>คำชี้แจง</u>** 1. ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุด กาเครื่องหมายกากบาท (X) ลงในกระดาษคำตอบ

2. ข้อสอบเป็นแบบปรนัย จำนวน 20 ข้อ 20 คะแนน

---

1. ภาพฉายของจุด $P(2,-1,3)$ บนระนาบ XZ คือข้อใด

ก. $(2,-1,3)$ ข. $(2,0,0)$

ค. $(0,0,3)$ ง. $(2,0,3)$

2. ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. ระยะทางระหว่างจุด $A(1,-2,7)$และ $B(-2,-1,0)$ เท่ากับ 59 หน่วย

ข. ระนาบ XY, XZ, YZ แบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 6 บริเวณ เรียกว่า อัฐภาค

ค. จุด $P(2,-1,3)$ อยู่ในอัฐภาคที่ 4

ง. จุด $(0,y,0)$ เมื่อ y เป็นจำนวนจริงใดๆ อยู่บนแกน Z

3. ถ้า $P(4,1,2)$ และ Q $P(6,2,4)$ แล้ว $|\overrightarrow{PQ}|$ คือข้อใด

ก. 3 ข. 4

ค. 5 ง. 6

4. กำหนด $\overrightarrow{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ , $\overrightarrow{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}$

แล้ว $\overline{v}-2\overline{u}+3\overline{w}$ คือข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ -7 \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix}1\\11\\5\end{bmatrix}$ ง. $\begin{bmatrix}-5\\7\\4\end{bmatrix}$

5. ถ้า $\bar{a}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$, $\bar{b}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-7\end{bmatrix}$ แล้ว $2\bar{a}-\bar{b}$ คือข้อใด

ก. $\begin{bmatrix}3\\4\\13\end{bmatrix}$ ข. $\begin{bmatrix}-3\\-4\\-13\end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix}1\\4\\13\end{bmatrix}$ ง. $\begin{bmatrix}1\\4\\-1\end{bmatrix}$

6. กำหนด x,y เป็นจำนวนจริงใดๆ ถ้า $x\begin{bmatrix}3\\0\\2\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8\\4\\4\end{bmatrix}$ แล้วข้อใดถูกต้อง

ก. $x+y=5$ ข. $2x-y=3$

ค. $x-2y=-2$ ง. $x^2+y=9$

7. ถ้า $\vec{u}=\begin{bmatrix}3\\5\\-4\end{bmatrix}$, $\vec{v}=\begin{bmatrix}3\\0\\-4\end{bmatrix}$ แล้ว $|2\bar{u}-3\bar{v}|$ คือข้อใด

ก. $\sqrt{5}$ ข. $3\sqrt{5}$

ค. $4\sqrt{5}$ ง. $5\sqrt{5}$

8. ถ้าแล้ว $\overrightarrow{PQ}=\begin{bmatrix}-4\\3\\2\end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{QR}=\begin{bmatrix}1\\4\\-5\end{bmatrix}$ จงพิจารณา

1. ขนาดของ $\overrightarrow{PQ}$ มีค่ามากกว่าขนาดของ $\overrightarrow{QR}$

2. ถ้า P มีพิกัด $(1,3,1)$ แล้ว R มีพิกัด $(-2,10,-2)$

ก. ข้อ 1 ถูก และข้อ 2 ถูก ข. ข้อ 1 ถูก และข้อ 2 ผิด

ค. ข้อ 1 ผิด และข้อ 2 ถูก ง. ข้อ 1 ผิด และข้อ 2 ผิด

9. ถ้า $\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}$ แล้วเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มีทิศทางเดียวกับ $\bar{u}$ คือข้อใด

ก. $-\frac{2}{3}\bar{i} + \frac{1}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}$

ข. $\frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$

ค. $\frac{2}{3}\bar{i} + \frac{1}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$

ง. $-\frac{2}{3}\bar{i} - \frac{1}{3}\bar{j} - \frac{2}{3}\bar{k}$

10. กำหนดจุด $A(1,5,8)$ และจุด $B(0,-3,1)$ เวกเตอร์ที่มีขนาด 4 หน่วยมีทิศทางตรงข้ามกับ $\overrightarrow{AB}$ คือข้อใด

ก. $\begin{bmatrix} \frac{-4\sqrt{114}}{114} \\ \frac{-32\sqrt{114}}{114} \\ \frac{-28\sqrt{114}}{114} \end{bmatrix}$

ข. $\begin{bmatrix} \frac{-4\sqrt{114}}{114} \\ \frac{32\sqrt{114}}{114} \\ \frac{-28\sqrt{114}}{114} \end{bmatrix}$

ค. $\begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{114}}{114} \\ \frac{-32\sqrt{114}}{114} \\ \frac{28\sqrt{114}}{114} \end{bmatrix}$

ง. $\begin{bmatrix} \frac{4\sqrt{114}}{114} \\ \frac{32\sqrt{114}}{114} \\ \frac{28\sqrt{114}}{114} \end{bmatrix}$

11. กำหนดจุด $A(1,4,3)$ และจุด $B(-2,0,1)$ แล้วโคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{AB}$ คือข้อใด

ก. $\frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}$

ข. $\frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}}$

ค. $\frac{3}{\sqrt{154}}, \frac{-8}{\sqrt{154}}, \frac{9}{\sqrt{154}}$

ง. $\frac{-3}{\sqrt{154}}, \frac{8}{\sqrt{154}}, \frac{-9}{\sqrt{154}}$

12. ถ้า $P(-1,4,-2)$ และจุดสิ้นสุด $Q(2,-4,7)$ โคไซน์แสดงทิศทางของ $\overrightarrow{PQ}$ คือข้อใด

ก. $\frac{3}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{29}}, \frac{2}{\sqrt{29}}$

ข. $\frac{-3}{\sqrt{29}}, \frac{-4}{\sqrt{29}}, \frac{-2}{\sqrt{29}}$

ค. $\frac{3}{\sqrt{154}}, \frac{-8}{\sqrt{154}}, \frac{9}{\sqrt{154}}$

ง. $\frac{-3}{\sqrt{154}}, \frac{8}{\sqrt{154}}, \frac{-9}{\sqrt{154}}$

13. ถ้า $\bar{u} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$ และ $\bar{v} = \bar{i} + 2\bar{j} + 4\bar{k}$ แล้ว Q เท่ากับเท่าใด

ก. $35^\circ$

ข. $45^\circ$

ค. $10^\circ$

ง. $90^\circ$

14. ถ้า $\vec{u} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}$ และ $\vec{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$ แล้ว $\bar{u} \cdot \bar{v} + \bar{u} \cdot \bar{w}$ คือข้อใด

ก. 52 ข. -52

ค. 94 ง. -94

15. ข้อใดต่อไปนี้เป็นเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกัน

ก. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ข. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

ค. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ ง. $\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

16. ถ้า $\overrightarrow{PQ} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ และ $\overrightarrow{BC} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ แล้ว $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{AC}$ คือข้อใด

ก. 4 ข. $-2$

ค. $-10$ ง. $-16$

17. ถ้า $\bar{u} = 2\bar{i} - \bar{j} - 6\bar{k}$ , $\bar{v} = \bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ แล้ว $\bar{u} \times \bar{v}$ คือข้อใด

ก. $19\bar{i} + 4\bar{j} + 7\bar{k}$ ข. $19\bar{i} - 4\bar{j} + 7\bar{k}$

ค. $19\bar{i} + 4\bar{j} - 7\bar{k}$ ง. $-19\bar{i} - 4\bar{j} - 7\bar{k}$

18. ถ้า $\bar{u} = 3\bar{i} - \bar{j} + a\bar{k}$ , $\bar{v} = 4\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$ แล้วค่า a ที่ทำให้ $\bar{u}$ ตั้งฉากกับ $\bar{v}$ คือข้อใด

ก. 1 ข. 3

ค. 5 ง. 7

19. พื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มีด้านคือ $\bar{u} = 4\bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$ และ $\bar{v} = -2\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ คือข้อใด

ก. 2 ตารางหน่วย ข. 4 ตารางหน่วย

ค. 5 ตารางหน่วย ง. 3 ตารางหน่วย

20. ปริมาตรของกล่องทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานที่มี AB, AC และ AD เป็นด้านของที่มีพิกัด $A(1,-1.1), B(3,-1,-2), C(2,-2,2)$ และ $D(4,-2,1)$ คือข้อใด

ก. 9 ลูกบาศก์หน่วย
ข. 6 ลูกบาศก์หน่วย
ค. 4 ลูกบาศก์หน่วย
ง. 2 ลูกบาศก์หน่วย

# ประวัติผู้ศึกษา

| | |
|---|---|
| **ชื่อ** | นางประไพศรี เหง้าชัยภูมิ |
| **วัน เดือน ปี** | 31 พฤษภาคม 2510 |
| **สถานที่เกิด** | อำเภอเมือง จังหวัดร้อยเอ็ด |
| **ประวัติการศึกษา** | มัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนสตรีศึกษา อำเภอเมือง จังหวัดร้อยเอ็ด ปีการศึกษา 2525<br>มัธยมศึกษาตอนปลาย โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย อำเภอเมือง จังหวัดร้อยเอ็ด ปีการศึกษา 2528<br>ปริญญาตรี วิทยาศาสตรบัณฑิต (วท.บ.) วิชาเอกสถิติประยุกต์ 15 มีนาคม 2533<br>ประกาศนียบัตรวิชาชีพครู มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช 30 เมษายน 2544 |
| **สถานที่ทำงาน** | โรงเรียนร้อยเอ็ดวิทยาลัย อำเภอเมือง จังหวัดร้อยเอ็ด 45000 |
| **ตำแหน่ง** | ครู วิทยฐานะ ชำนาญการพิเศษ |