การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ของนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร

เรืออากาศเอกหญิง พัชรภรณ์ ภูวรกิจ

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต
แขนงวิชาหลักสูตรและการสอน สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
พ.ศ. 2552

A Study of Mathematics Concept on the Topic of Limit and Continuity Using the Geometer's Sketchpad Program Learning Activities for the Third Year Students of Armed Forces Academies Preparatory School

Flt.Lt. Patcharaporn Poowarakit

An Independent Study Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for
the Degree of Master of Education in Curriculum and Instruction
School of Educational Studies
Sukhothai Thammathirat Open University
2009

หัวข้อการศึกษาค้นคว้าอิสระ	การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ของนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร
ชื่อและนามสกุล	เรืออากาศเอกหญิง พัชรภรณ์ ภูวรกิจ
แขนงวิชา	หลักสูตรและการสอน
สาขาวิชา	ศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
อาจารย์ที่ปรึกษา	รองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล

คณะกรรมการสอบการศึกษาค้นคว้าอิสระได้ให้ความเห็นชอบการศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้แล้ว

.... ประธานกรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล)

.... กรรมการ
(รองศาสตราจารย์ ดร. สาคร บุญดาว)

คณะกรรมการบัณฑิตศึกษา ประจำสาขาวิชาศึกษาศาสตร์ อนุมัติให้รับการศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้ เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต แขนงวิชาหลักสูตรและการสอน สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

....
(รองศาสตราจารย์ ดร. ทวีศักดิ์ จินดานุรักษ์)
ประธานกรรมการประจำสาขาวิชาศึกษาศาสตร์
วันที่ 23 เดือน มิถุนายน พ.ศ. 2553

ชื่อการศึกษาค้นคว้าอิสระ การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ของนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร

ผู้ศึกษา เรืออากาศเอกหญิง พัชรภรณ์ ภูวรกิจ **ปริญญา** ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (หลักสูตรและการสอน)

อาจารย์ที่ปรึกษา รองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล **ปีการศึกษา** 2552

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันก่อนและหลังการจัดเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ของนักเรียนเตรียมทหารชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร

กลุ่มตัวอย่าง เป็นนักเรียนเตรียมทหารชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552 จำนวน 1 ตอนเรียน มีนักเรียนจำนวน 30 คน ได้มาโดยการสุ่มแบบกลุ่ม เครื่องมือในการวิจัย คือ แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต และแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล คือ การทดสอบค่าที

ผลการวิจัยพบว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันของนักเรียนหลังเรียนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

คำสำคัญ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน นักเรียนเตรียมทหาร

กิตติกรรมประกาศ

การศึกษาค้นคว้าอิสระนี้ผู้วิจัยได้รับความอนุเคราะห์อย่างดียิ่งจากรองศาสตราจารย์ ดร. ปรีชา เนาว์เย็นผล ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำและติดตามการทำการค้นคว้าอิสระ อย่างใกล้ชิดเสมอมา นับตั้งแต่เริ่มต้นจนสำเร็จเรียบร้อยอย่างสมบูรณ์ ผู้วิจัยรู้สึกอบอุ่มและซาบซึ้งในความกรุณาของท่านเป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. กัญจนา ลินทรัตนศิริกุล รองศาสตราจารย์อุษาวดี จันทรสนธิ ที่ได้กรุณาให้คำแนะนำ ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ และความถูกต้องของเนื้อหาเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ให้มีความสมบูรณ์และถูกต้อง และขอขอบพระคุณรองศาสตราจารย์ ดร. สาคร บุญดาว กรรมการสอบการศึกษาค้นคว้าอิสระที่กรุณาให้ข้อเสนอแนะซึ่งทำให้การศึกษาค้นคว้าอิสระมีความสมบูรณ์ยิ่งขึ้น

ขอขอบพระคุณ พ.อ. สุจริต ทวีศักดิ์ น.ต.ทินรัตน์ กาญจนกุญชร และครูอุทัย ธวัชสินที่ได้กรุณาเป็นผู้ตรวจสอบเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้

นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้รับการสนับสนุนกำลังใจจาก บิดา มารดา นายวิทยา นางหย่ง ภูวรกิจ นายวชิระ ภูวรกิจ นายวัชรา ภูวรกิจ เป็นอย่างดี ซึ่งผู้วิจัยถือว่ามีค่าเป็นอย่างยิ่ง และนางสุพิชฌาย์ วัฒนดนุสรณ์ ที่ได้มีส่วนช่วยเหลือให้การศึกษาค้นคว้าอิสระฉบับนี้สำเร็จด้วยดี

คุณค่าและประโยชน์ที่จะได้รับจากการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยของมอบบูชาพระคุณ บิดามารดา ครู-อาจารย์ ตลอดจนสถาบันการศึกษาต่าง ๆ ที่ผู้วิจัยเคยเรียนรู้มา และผู้สนใจการศึกษาทั้งมวล

พัชรภรณ์ ภูวรกิจ

ตุลาคม 2552

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ง
กิตติกรรมประกาศ	จ
สารบัญตาราง	ซ
บทที่ 1 บทนำ	1
ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
วัตถุประสงค์ของการวิจัย.	3
สมมติฐานการวิจัย	4
ขอบเขตของการวิจัย	4
นิยามศัพท์เฉพาะ	4
ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	5
บทที่ 2 วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง	6
โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต	6
มโนทัศน์	10
งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	18
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย	22
การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	22
การออกแบบการวิจัย	23
การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง	23
การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	24
การเก็บรวบรวมข้อมูล	32
การวิเคราะห์ข้อมูล	32
บทที่ 4 การวิเคราะห์ข้อมูล	34
บทที่ 5 สรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ	37
สรุปการวิจัย	38
อภิปรายผล	38
ข้อเสนอแนะ	40
บรรณานุกรม	41

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

ภาคผนวก 45
ก รายชื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือ 46
ข แผนการจัดการเรียนรู้ 48
ค แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน – หลังเรียน 144
ประวัติผู้ศึกษา 167

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 3.1 เนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน และจุดประสงค์การเรียนรู้ในแผนการจัดการเรียนรู้ 25
ตารางที่ 3.2 การวิเคราะห์หลักสูตร ส่วนอัตนัย 29
ตารางที่ 3.3 การวิเคราะห์หลักสูตร ส่วนปรนัย 30
ตารางที่ 4.1 สถิติพื้นฐานจากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตส่วนของอัตนัย 34
ตารางที่ 4.2 สถิติพื้นฐานจากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตส่วนของปรนัย 35
ตารางที่ 4.3 เปรียบเทียบค่ามัชฌิมเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันก่อนและหลังการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต 36

บทที่ 1
บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

คณิตศาสตร์เป็นวิชาหนึ่งที่มีความสำคัญในการพัฒนาประเทศ เนื่องจากเป็นวิชาที่ส่งเสริมความสามารถในการคิดอย่างมีเหตุผล มีประโยชน์ต่อการนำไปใช้ในชีวิตประจำวัน เป็นเครื่องมือในการแสวงหาความรู้ต่างๆ และยังเป็นพื้นฐานที่สำคัญยิ่งในการศึกษาวิทยาการของศาสตร์แขนงอื่น ความก้าวหน้าทางด้านเทคโนโลยีวิทยาศาสตร์ วิศวกรรมศาสตร์ ฯลฯ ล้วนแต่อาศัยคณิตศาสตร์ทั้งสิ้น ดังที่ ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี (2542: 1) กล่าวไว้สรุปได้ว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่มีความสำคัญและมีประโยชน์อย่างยิ่งในการพัฒนาวิทยาการด้านต่างๆ ให้ก้าวหน้ายิ่งขึ้น เป็นวิชาที่ช่วยพัฒนากระบวนคิดของคนให้คิดเป็น คิดอย่างมีเหตุผล มีระบบขั้นตอนในการคิดและยังช่วยสร้างเสริมคุณลักษณะที่สำคัญ มีความจำเป็นในการดำรงชีวิต เช่น ความเป็นผู้มีเหตุผล มีลักษณะนิสัยละเอียด สุขุม รอบคอบ ช่างสังเกต มีไหวพริบปฏิภาณที่ดี อีกทั้งยังเป็นพื้นฐานที่สำคัญยิ่งในการศึกษาวิทยาการสาขาอื่นๆ ต่อไป จะเห็นว่าคณิตศาสตร์เป็นศาสตร์ที่จำเป็นอย่างยิ่งทั้งในแง่ของการดำรงชีวิตและเป็นพื้นฐานของความเจริญก้าวหน้าทางวิทยาการในสาขาต่าง ๆ

หลักสูตรโรงเรียนเตรียมทหารมีการจัดการเรียนรู้ในสายวิทยาศาสตร์-คณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมทหารผลิตนักเรียนเตรียมทหารให้มีความรู้ในทักษะด้านต่างๆ นักเรียนควรมีความกระตือรือร้นต่อการเรียน สนใจ ใส่ใจต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งเป็นวิชาที่ฝึกให้ผู้เรียนมีหลักการคิดอย่างมีเหตุผล นักเรียนสามารถนำทักษะเหล่านี้ไปประยุกต์ใช้กับการปฏิบัติงาน ย่อมส่งผลดีต่อการทำงานยิ่งขึ้น มีความสามารถและทัศนคติพื้นฐานเหมาะสมที่จะเข้าศึกษาต่อในโรงเรียนนายร้อยจุลจอมเกล้า โรงเรียนนายเรือ โรงเรียนนายเรืออากาศ และโรงเรียนนายร้อยตำรวจ ตามที่ตนเองสังกัดต่อไป ทั้งนี้วิชาคณิตศาสตร์ยังเป็นวิชาที่มีความสำคัญ เป็นพื้นฐานที่สำคัญยิ่งในการศึกษาวิทยาการในระดับการศึกษาขั้นสูงต่อไป

ในฐานะที่ผู้วิจัยเป็นครูสอนวิชาคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียนเตรียมทหาร โรงเรียนเตรียมทหารเป็นโรงเรียนในสังกัดสถาบันป้องกันประเทศ กองบัญชาการกองทัพไทย กระทรวงกลาโหม ภารกิจหลักของโรงเรียนเตรียมทหารคือการปกครองบังคับบัญชาและให้การศึกษา อบรม ในด้านพุทธิศึกษา จริยศึกษา พลศึกษา กับวิชาทหาร-ตำรวจ แก่นักเรียนเตรียมทหารเพื่อให้นักเรียนเตรียม

ทหารมีความรู้ ความสามารถและทัศนคติพื้นฐาน เหมาะสมที่จะเข้าศึกษาต่อในโรงเรียนนายร้อยจุลจอมเกล้า โรงเรียนนายเรือ โรงเรียนนายเรืออากาศ และโรงเรียนนายร้อยตำรวจ

ซึ่งนับตั้งแต่ก่อตั้งโรงเรียนเตรียมทหารจนถึงปัจจุบัน โรงเรียนเตรียมทหารได้ผลิตนักเรียนเตรียมทหารสู่โรงเรียนเหล่าทัพและโรงเรียนนายร้อยตำรวจไปแล้ว 51 รุ่น ผู้วิจัยได้ตระหนักถึงความสำคัญนี้ ได้มีการพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอน การปรับปรุงสื่อการสอนอยู่ตลอดเวลา เพื่อให้สอดคล้องกับนโยบายของผู้บัญชาการ ปรัชญาของโรงเรียนที่ว่าด้วย สามัคคี มีความรู้ คู่คุณธรรม

จากประสบการณ์สอนของผู้วิจัยพบว่า การเรียนรู้ของนักเรียนเตรียมทหารเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันจะเป็นพื้นฐานที่สำคัญต่อการเรียนแคลคูลัสอย่างมาก นักเรียนจะต้องเกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หรือความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ในเรื่องนี้อย่างแท้จริง ซึ่งเป็นการเรียนรู้ในเรื่องนามธรรม แต่การจัดเรียนการสอนด้วยการบรรยายบทนิยามและทฤษฎีบทของลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน พร้อมยกตัวอย่างประกอบการอธิบายนั้น ทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจเนื้อหาได้เพียงระดับหนึ่ง ยังไม่เกิดความเข้าใจที่ลึกซึ้งหรือนักเรียนไม่สามารถสร้างเป็นองค์ความรู้ที่ยั่งยืนได้ ดังนั้นการจัดการเรียนการสอนแบบเน้นมโนทัศน์ ที่เป็นการเรียนรู้ความคิดเชิงนามธรรม ซึ่งจะให้ผู้เรียนสามารถถ่ายโอนการเรียนรู้ได้มากและยั่งยืน และการเข้าใจในมโนทัศน์คณิตศาสตร์ที่มีลักษณะเป็นนามธรรม ดังที่ เฮอร์เบร์ท และ ริชาร์ด (1971: 391 อ้างอิงจาก ชัยพร ขุนรามวงษ์, 2534: 19) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์หรือความคิดรวบยอดไว้ว่า การเรียนจากความคิดรวบยอด เป็นจุดประสงค์อันสำคัญยิ่งของการศึกษาในโรงเรียนทุกระดับ การส่งเสริมให้เด็กเกิดความคิดรวบยอดด้วยเครื่องมือ และวิธีการที่ถูกต้องเป็นสิ่งกระทำมากกว่าการสอนให้เด็กท่องจำ เพราะการเรียนรู้มโนทัศน์หรือความคิดรวบยอด จะทำให้มีการจัดระบบระเบียบของข้อมูลในสมองไว้อย่างเรียบร้อย เมื่อปะทะกับสิ่งเร้าใหม่ก็สามารถจำแนก แยกแยะ จัดหมวดหมู่และเชื่อมโยงกับความคิดรวบยอดเดิมที่มีอยู่ได้ง่าย นอกจากนี้ สิริพร ทิพย์คง (2544: 1,24) กล่าวถึงวิชาคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่เป็นนามธรรม ประกอบด้วยสัญลักษณ์ต่าง ๆ อาศัยการคิดที่เป็นแบบแผนมีขั้นตอนและมีเหตุผล เป็นวิชาที่นักเรียนต้องใช้วิจารณญาณอย่างมากในการทำความเข้าใจ จึงทำให้นักเรียนส่วนมากไม่ประสบความสำเร็จในการเรียน เรียนแล้วไม่เข้าใจ ไม่เกิดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เกิดความรู้สึกเบื่อหน่าย ไม่ชอบ ไม่อยากเรียนคณิตศาสตร์ ซึ่งสอดคล้องกับ สุวัฒนา อุทัยรัตน์ (2545: 32) กล่าวถึงลักษณะของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ สรุปได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เป็นนามธรรม จึงทำให้เกิดความเข้าใจผิดได้ง่าย หรือเกิดความเข้าใจไม่ตรงกันเมื่อผู้เรียนเกิดการเรียนรู้ระดับความจำบนพื้นฐานของการเรียนรู้ ความคิดรวบยอด

ก็พัฒนาถึงระดับความเข้าใจ การนำไปใช้ การวิเคราะห์ สังเคราะห์ และการประเมินค่าได้อย่างรวดเร็ว (ฐาปนี ตนัยอัชฌาวุฒ, 2547: 2 ; อ้างอิงจาก นวลจิตต์ เชาวกีรติพงศ์, 2537: 58)

ดังนั้นจากลักษณะที่เป็นนามธรรมของวิชาคณิตศาสตร์ จึงจำเป็นอย่างยิ่งที่ต้องมีการพัฒนาการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เพื่อให้นักเรียนเกิดความเข้าใจมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง ครูควรมีการพัฒนาการเรียนการสอนให้มีประสิทธิภาพมากขึ้นด้วยการใช้เทคโนโลยีทางการศึกษา รู้จักเปลี่ยนวิธีสอน รู้จักใช้เทคนิคและวิธีการสอนหลาย ๆ วิธี โดยการนำสื่อเทคโนโลยีที่เหมาะสมมาเป็นสื่อการเรียนการสอน จึงจะทำให้นักเรียนเข้าใจบทเรียนและเนื้อหาได้ง่ายขึ้น เกิดความสนุกเพลิดเพลินในการเรียน และทำการสอนบรรลุตามเป้าหมายที่วางไว้ (นงนารถ สถาวโรดม, 2530: 1) หากมีจัดการเรียนการสอนโดยการนำรูปธรรมมาถ่ายทอดความเป็นนามธรรม จะทำให้เกิดความเข้าใจถึงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ง่ายยิ่งขึ้น การใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต (The geometer's sketchpad) หรือ โปรแกรม GSP นั้นจะทำให้ผู้สอนและผู้เรียนได้เรียนรู้กระบวนการในการสร้างความรู้ความเข้าใจที่ลึกซึ้ง เข้าใจความคิดรวบยอดที่สำคัญอย่างชัดแจ้งและเป็นรูปธรรม ในเรื่องต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์ไม่ว่าเรื่องจำนวนและการดำเนินการ การคิดทางพีชคณิต และเรขาคณิต ทั้งการวัดในระดับชั้นประถมศึกษา มัธยมศึกษาตอนต้น – ตอนปลาย ไปจนถึงเรื่องพีชคณิต เรขาคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัสเบื้องต้น แคลคูลัสในระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย และในระดับอุดมศึกษา มโนทัศน์หรือความคิดรวบยอดที่นักเรียนมักเข้าใจได้ยากจะกลายเป็นเรื่องง่ายเมื่อนักเรียนได้เห็น และมีปฏิสัมพันธ์กับการแสดงการดำเนินการอย่างเป็นรูปธรรมจากโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ทั้งผู้เรียนจะเกิดการเรียนรู้แบบองค์รวมและมองเห็นความสัมพันธ์ของข้อมูล ความรู้ต่าง ๆ แทนที่จะเรียนเพียงข้อเท็จจริงเท่านั้น (ทิศนา แขมมณี, 2551: 225) นอกจากนี้การนำโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตใช้เป็นสื่อการสอนที่สร้างสรรค์ ดึงดูดใจในการอธิบายมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์มากกว่าการอธิบายหรือบรรยายหน้าห้องเรียนเพียงอย่างเดียว ซึ่งย่อมส่งผลถึงความสนใจ ความตั้งใจต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์อีกด้วย

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

เปรียบเทียบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันก่อนและหลังการจัดเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ของนักเรียนเตรียมทหารชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร

3. สมมติฐานการวิจัย

มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ของนักเรียนเตรียมทหารชั้นปีที่ 3 หลังการจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต สูงกว่าก่อนการจัดการเรียนการสอน

4. ขอบเขตของการวิจัย

การวิจัยนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง กำหนดรายละเอียดดังนี้

4.1 ประชากร คือ นักเรียนเตรียมทหารชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร สังกัดสถาบันป้องกันประเทศ กองบัญชาการกองทัพไทย กระทรวงกลาโหม จำนวน 18 ตอนเรียน และมีนักเรียน 542 คน

4.2 เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการทดลอง เป็นเนื้อหาเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ตามหลักสูตรโรงเรียนเตรียมทหาร พุทธศักราช 2546 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2550)

4.3 ตัวแปร

4.3.1 ตัวแปรต้น คือ การจัดการเรียนการสอนเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

4.3.2 ตัวแปรตาม คือ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

5. นิยามศัพท์เฉพาะ

5.1 โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต หมายถึง โปรแกรมคอมพิวเตอร์สำเร็จรูปที่พัฒนาขึ้นเพื่อใช้ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่สามารถสร้างรูปเรขาคณิต รูปกราฟต่างๆ และสามารถเลื่อน หมุน ยืด หดได้ การวัดค่าต่าง ๆ ทางเรขาคณิต เช่น การวัดมุม พื้นที่รูปเหลี่ยม ความยาวด้านและการวัดค่าของฟังก์ชัน ทำให้นักเรียนสามารถสืบเสาะ ค้นหา และคาดเดา และสรุปหาเหตุผลด้วยตนเอง

5.2 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต หมายถึง การจัดการเรียนการสอน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นซึ่งมีโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต (The geometer's sketchpad : GSP) เป็นสื่อการสอนประกอบการอธิบายเนื้อหาสาระของครู

5.3 มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถของนักเรียนในการคิดและความเข้าใจเกี่ยวกับความคิดสำคัญหรือความคิดรวบยอดเกี่ยวกับเนื้อหาทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน เป็นความสามารถในการสรุปความหมายของสิ่งที่ได้เรียนมาตามความเข้าใจของตนเอง รู้จักนำข้อเท็จจริงของเนื้อหาต่าง ๆ ที่ได้เรียนรู้มาสัมพันธ์ โดยการนำมาสรุปอีกครั้งหนึ่ง ทำให้สามารถอธิบายลักษณะ บอกความแตกต่าง สรุปลักษณะทั่วไป และนำมโนทัศน์ไปใช้ในการคำนวณหรือหาคำตอบได้ ซึ่งสามารถวัดเป็นคะแนนที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ทางการเรียนคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น

6. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

6.1 ทำให้ได้แนวทางในการการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาแคลคูลัส โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

6.2 ทำให้ได้แนวทางการพัฒนาแผนการจัดการเรียนรู้ โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเป็นเครื่องมือประกอบการเรียนการสอนสำหรับเนื้อหาคณิตศาสตร์อื่น

บทที่ 2
วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ของนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร จังหวัดนครนายก ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง และได้นำเสนอตามหัวข้อต่อไปนี้

1. โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต
2. มโนทัศน์
   - 2.1 ความหมายของมโนทัศน์
   - 2.2 ประเภทของมโนทัศน์
   - 2.3 ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
   - 2.4 ความสำคัญของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์
3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
   - 3.1 งานวิจัยต่างประเทศ
   - 3.2 งานวิจัยในประเทศ

1. โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต (The geometer's sketchpad : GSP)

โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต พัฒนาขึ้นเป็นครั้งแรกเมื่อปี ค.ศ.1991 โดยแจคคิว (Jachiew) ในโครงการพัฒนาเรขาคณิตที่มองเห็นได้ (Visual GeometryProject) ของมูลนิธิวิทยาศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา (National Science Foundation : NSF) ภายใต้การนำของคลอทซ์ (Klotz) แห่งวิทยาลัยสวาทมอร์ (Swartmore College) และชาทชไนเดอร์(Schatschneider) แห่งมหาวิทยาลัยมอราเวียน (Moravian College) ในรัฐแพนซิลวาเนีย ประเทศสหรัฐอเมริกา ในระยะแรกซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ถูกพัฒนาขึ้นเป็นรุ่นเบต้า (Beta Version) เพื่อใช้กับเครื่องแมคอินทอช ต่อมาในปี ค.ศ.1993 ได้พัฒนาขึ้นสำหรับใช้กับเครื่องคอมพิวเตอร์ที่ใช้ระบบปฏิบัติการแบบวินโดวส์ ปี ค.ศ.1995 พัฒนาขึ้นเป็นซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์รุ่น 3 โดยมีสำนักพิมพ์ คีย์ เคอร์ริคิวลัม เป็นผู้สนับสนุนในการจัดทำวีดิทัศน์ หนังสือเรียน และสื่อสิ่งพิมพ์ที่เกี่ยวข้องกับการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์

จึงทำให้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์แพร่หลายในโรงเรียนของประเทศสหรัฐอเมริกา สำหรับการใช้ซอฟต์แวร์คอมพิวเตอร์ในการเรียนการสอนเรขาคณิตนั้น ในระยะแรกกำหนดให้ใช้ในโรงเรียนมัธยมศึกษาที่มีการเรียนการสอนวิชาเรขาคณิต ผลของการใช้เบื้องต้นสามารถดึงดูดความสนใจของผู้เรียนทำให้นักเรียนประสบความสำเร็จในการเรียนเรขาคณิตและเรียนรู้อย่างมีประสิทธิภาพ

การใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ในการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ของหลักสูตรระดับมัธยมศึกษาจนถึงระดับมหาวิทยาลัยนั้น สำนักพิมพ์ คีย์ เคอร์ริคิวลัม ได้กล่าวไว้สรุปได้ว่า โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เป็นเครื่องมือที่นักเรียนสามารถใช้กับเนื้อหาเรขาคณิตแบบ Euclidean หรือ Non- Euclidean พีชคณิต แคลคูลัสและตรีโกณมิติ ในการเรียนรู้มโนทัศน์ทางเรขาคณิตนั้น โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตสามารถช่วยในการสร้างรูปเรขาคณิตในมิติต่างๆ ทำให้นักเรียนได้เกิดการสำรวจ และทำความเข้าใจในเนื้อหาเรขาคณิตได้ง่ายขึ้นกว่าการสอนแบบเดิม โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเป็นเครื่องมือที่ช่วยกระตุ้นให้เกิดกระบวนการค้นพบ โดยนักเรียนจะเห็นภาพในตอนแรกแล้วทำการวิเคราะห์ปัญหา หลังจากนั้นนักเรียนจะตั้งข้อคาดเดาก่อนที่จะทำการพิสูจน์ในเรื่องนั้น ๆ ทั้งยังช่วยให้นักเรียนจินตนาการและศึกษาความสัมพันธ์ นักเรียนจะเพิ่มความเข้าใจในความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ ด้วยการสร้างและศึกษาความคิดรวบยอดด้วยตนเอง (กองวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมทหาร, 2552 : 4) กระบวนการเรียนรู้จากโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตจะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาพื้นฐานของตนเองในเชิงรูปธรรมก่อนแล้วค่อย ๆ พัฒนาการเรียนรู้ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น ผู้ใช้จะสามารถสร้างรูปเรขาคณิต วัดขนาด สัดส่วนของเส้นตรง ส่วนโค้ง มุม และพื้นที่ได้รวดเร็วและถูกต้อง ทั้งยังช่วยให้ผู้เรียนสร้างรูปสองมิติและสามมิติบนหน้าจอแล้วทำกิจกรรมสำรวจการยืด หด เลื่อน รูปในมุมมองต่าง ๆ ทั้งสามารถวัดขนาดของมุม ความยาวส่วนของเส้นตรง การหาพื้นที่ของรูปหลายเหลี่ยมและหาอัตราส่วนของด้าน เพื่อเรียนรู้มโนทัศน์ทางเรขาคณิตได้รวดเร็ว นำไปสู่การค้นหาสมบัติต่าง ๆ ส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความกระตือรือร้นดึงดูดความสนใจ เกิดจินตนาการในการค้นคว้าหาเหตุผลและเพิ่มพูนความรู้ ซึ่งการเรียนรู้เรขาคณิตในลักษณะดังกล่าวจะทำให้ผู้เรียนมองสิ่งต่าง ๆ รอบตัวได้อย่างมีความหมายมากขึ้น การใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตจะช่วยให้การสร้างรูปได้รวดเร็วทำให้การแก้ปัญหาในเรื่องที่ยากและซับซ้อนได้อย่างมีประสิทธิภาพและประหยัดเวลาในการเรียนรู้ นอกจากนี้ยังใช้งานง่าย ใช้เวลาน้อยในการศึกษาวิธีการใช้งาน ผู้สอนสามารถทำเป็นสคริปต์ใช้ในการสาธิตหรือสรุปให้ผู้เรียนศึกษาตามเพื่อการทบทวนเนื้อหาได้

ลักษณะสำคัญของโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต มีดังนี้

1. ความสามารถในการใช้คำจำกัดความในเรื่องกราฟ และความแตกต่างของเครื่องมือที่สมบูรณ์แบบซึ่งพัฒนาให้ใช้ได้กับวิชาคณิตศาสตร์เกี่ยวกับเรขาคณิต ตรีโกณมิติ พีชคณิตและแคลคูลัส อีกทั้งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ในวิชาวิทยาศาสตร์ เกี่ยวกับกลศาสตร์และวิชาศิลปะ

2. รูปแบบการเคลื่อนไหว ทำให้มีความยืดหยุ่นและง่ายต่อการใช้

3. สามารถใช้งานได้หลากหลายด้วยลักษณะพิเศษเฉพาะ และสร้างแฟ้มเอกสารทางอิเล็กทรอนิกส์ การนำเสนอ และการออกแบบกิจกรรม การแบ่ง/ผสาน และการแก้ไขในการคำนวณ สามารถดัดแปลงให้ใช้งานได้ง่าย เป็นต้น

4. ใช้ในการคำนวณหาค่าของฟังก์ชันต่าง ๆเมื่อมีการกำหนดค่าของโดเมนโปรแกรมสามารถหาค่าของฟังก์ชันตามที่กำหนดได้ และง่ายต่อการแยกหรือรวมเพื่อการแปลงสมการรูป

5. ผู้ใช้สามารถบูรณาการไปสู่กิจกรรมทางเรขาคณิตบนเว็บได้

6. สามารถใช้ได้ทั้งระบบปฏิบัติการวินโดว์และแมคอินทอช

7. สามารถสร้างรูปที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้ง่ายขึ้น

8. เพิ่มกราฟิกให้มีสีสันของวัตถุ ตัวอักษร และพื้นหลังที่น่าประทับใจ

9. ใช้เพิ่มสีในมิติพิเศษ (Parametric Colour) ในมุมมองที่มากขึ้น ทำให้ง่ายต่อการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนทั้งในระดับเริ่มต้นและระดับสูง

10. สามารถเลือกวัตถุ (Multiple Objects) ได้ง่ายและมากขึ้น

การใช้งานโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต จะใช้ในงานที่มีลักษณะดังต่อไปนี้

1. สร้างรูปเพื่อศึกษาทฤษฎีของยูคลิดและนอกระบบยูคลิด โดยใช้เมนูคำสั่งเครื่องมือการวาดภาพในกล่องเครื่องมือ และคำสั่งในเมนูการสร้าง

2. ปรับเปลี่ยนรูปโดยใช้คำสั่งเมนูการแปลง ในการเลื่อนขนาน การสะท้อน การหมุน การย่อขยาย และทำซ้ำ เพื่อกำหนด คำนวณ และบอกปริมาณต่างๆ

3. ป้อนข้อมูลผลการวิเคราะห์ทางเรขาคณิต เพื่อให้แสดงในรูปการสร้างกราฟในระบบแกนมุมฉากหรือระบบโพลาร์

4. คำนวณและแสดงอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่างๆ ทั้งในรูปของกราฟและสัญลักษณ์

5. สร้างภาพเคลื่อนไหวเพื่อแสดงกราฟของฟังก์ชันไซน์และสำรวจเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ (Key Curriculum Press, 2001: 1-101)

การใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตในการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเป็นเครื่องมือสำหรับนักเรียนเพื่อสร้างการศึกษาทางพีชคณิต โดยการใช้แบบจำลองที่สนับสนุน การทดสอบการคาดเดาต่าง ๆ หลักการทั่วไป และการให้เหตุผล สามารถพัฒนาความคิดทางพีชคณิต ในขณะที่มีการเคลื่อนวัตถุหรือเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปร แล้วสังเกตผลลัพธ์ที่แสดงให้เห็นถึงการทำงานของฟังก์ชันตัวแปรนั้น นักเรียนยังสามารถคิดค้น และทดสอบสูตรใหม่โดยการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ได้ศึกษาสมบัติของฟังก์ชันโดยการ ปรับเปลี่ยนตัวแปรและเฝ้าดูพฤติการณ์ของกราฟ เกิดการพัฒนาความคิดรวบยอด ทั้งการสร้างสรรค์ และศึกษาการแทนที่ การสะท้อน การหมุนเวียนและการขยายออก รวมถึงการสร้างสรรค์ภาพ เคลื่อนไหวทางคณิตศาสตร์เพื่อวาดภาพประกอบส่วนโค้งทางเรขาคณิตในระบบคาร์ทีเซียนและ ระบบพิกัดฉาก และนักเรียนสามารถนำเครื่องมือการนำเสนอของ โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต สำหรับการศึกษาของนักเรียนได้อย่างมีประสิทธิภาพ

โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเป็นเครื่องมือสำหรับครูเพื่อช่วยเหลือนักเรียนให้เกิด ความเข้าใจความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ในระดับประถมศึกษา ระดับมัธยมศึกษา จนถึง ระดับอุดมศึกษา ในหัวข้อ พีชคณิต เรขาคณิต แคลคูลัสพื้นฐาน แคลคูลัส เป็นต้น ซึ่งสามารถ นำเสนอผ่านทางเครื่องฉายภาพข้ามศีรษะ หรือคอมพิวเตอร์ในห้องเรียน ใช้สำหรับสร้างใบงาน แบบทดสอบ และรายงานโดยการนำเอาจำนวนและการวัดไปใช้ในโปรแกรม spreadsheets โปรแกรม word processors โปรแกรมวาดรูปต่าง ๆ และระบบอินเตอร์เน็ต ใช้โปรแกรมเรขาคณิต พลวัตสามารถผสมผสานระบบสารสนเทศกลายเป็นกิจกรรมการเรียนรู้ที่เผยแพร่ทางอินเตอร์เน็ต ได้ทันที (กองวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมทหาร, 2552 : 5)

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2548 : 1-4) กล่าวถึงโปรแกรม เรขาคณิตพลวัต สามารถนำมาใช้ในการสำรวจเบื้องต้นเกี่ยวกับรูปเรขาคณิตสองมิติ จำนวนและ การดำเนินการ กราฟของสมการชนิดต่างๆ ตลอดจนถึงการแสดงการเคลื่อนไหวของรูปเรขาคณิต เพื่อการสร้างความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ที่ซับซ้อน ให้สามารถเข้าใจได้ง่ายและรวดเร็วยิ่งขึ้น ถ้าผู้ใช้เป็นนักเรียน โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตจะช่วยทำให้ผู้เรียนสำรวจเนื้อหาและพัฒนาความคิด รวบยอดเกี่ยวกับเนื้อหาสาระต่างๆ ในวิชาคณิตศาสตร์ได้หลายสาระ เช่น เรขาคณิต พีชคณิต ตรีโกณมิติ แคลคูลัสและเนื้อหาอื่นๆ สำหรับครูผู้สอนโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เป็นสื่อที่ช่วย สร้างบรรยากาศของการเรียนที่ส่งเสริมให้มีการนำเสนอความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ ความคิด ริเริ่มสร้างสรรค์ ซึ่งจะทำให้นักเรียนมีการซักถามและโต้ตอบ และช่วยทำให้นักเรียนตั้งข้อความ คาดเดาเหตุการณ์ และหาข้อสรุปในเวลาเรียนในห้องปฏิบัติการ หรือช่วงเวลาที่มีการนำเสนอหน้า ห้องเรียนได้ สำหรับผู้ใช้ที่เป็นนักวิจัยทางคณิตศาสตร์หรือนักคณิตศาสตร์ศึกษา จะพบว่าการใช้

โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต จะช่วยตอบคำถามที่เกี่ยว กับการทดลอง เช่น ถ้า....แล้ว โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตจะช่วยพิสูจน์สมบัติต่างๆ ทางเรขาคณิต นอกจากนั้นยังสามารถสร้างการค้นพบสิ่งใหม่ๆ ได้อย่างไม่สิ้นสุด สามารถสร้างแรงดึงดูดใจสำหรับนักเรียนระดับชั้นประถมศึกษาและมัธยมศึกษา โดยใช้รูปภาพซึ่งสามารถมองเห็นได้ชัดเจน เพื่อเป็นพื้นฐานความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่แข็งแกร่งและเป็นแรงกระตุ้นในการศึกษาวิชาคณิตศาสตร์ในระดับชั้นที่สูงขึ้น

ด้วยเหตุนี้ผู้วิจัยมีความเห็นว่า การจัดการเรียนการสอนโดยการนำรูปธรรมมาถ่ายทอดความเป็นนามธรรมจะทำให้เกิดความเข้าใจถึงมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ง่ายยิ่งขึ้น โดยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตจะเป็นสื่อที่สำคัญในการพัฒนาทักษะทางคณิตศาสตร์ ทำให้ผู้เรียนมีโอกาสเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยการสร้างองค์ความรู้ด้วยตนเอง ทำให้มีความรู้ ความเข้าใจในเนื้อหาสาระคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง นอกจากนี้ยังทำให้ผู้เรียนมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ตระหนักถึงคุณค่าของวิชาคณิตศาสตร์อย่างแท้จริง สามารถพัฒนาศักยภาพของผู้เรียนได้ถึงขั้นสูงสุด

2. มโนทัศน์

2.1 ความหมายของมโนทัศน์

มโนทัศน์เป็นคำในภาษาอังกฤษว่า Concept ซึ่งนักจิตวิทยาและนักการศึกษาไทยหลายท่านได้ให้ชื่อภาษาไทยหลายชื่อแตกต่างกัน เช่น ใช้ชื่อว่า สังกัป มโนมติ มโนภาพ มโนทัศน์ และความคิดรวบยอด ตามพจนานุกรมศัพท์สังคมวิทยา อังกฤษ-ไทย ฉบับราชบัณฑิตยสถานให้ความหมายของมโนทัศน์หรือความคิดรวบยอดว่า ความรู้สึกนึกคิด ความเข้าใจ ความเห็น หรือภาพสุดท้ายที่เกิดจากสิ่งเร้า หรือเหตุการณ์ของบุคคลที่ได้รับจากการเรียนรู้ในลักษณะเฉพาะของสิ่งนั้น อันเกิดจากประสบการณ์ที่เคยได้รับมาในสิ่งนั้น หรือในเรื่องนั้น หลาย ๆ แบบมีลักษณะเป็นนามธรรม โดยกระบวนการสร้างความคิดรวบยอดประกอบด้วย การรับรู้ การจัดประเภท การแยกแยะ และการสรุปครอบคลุม โดยอธิบายเพิ่มเติมว่า มโนทัศน์ หรือ ความคิดรวบยอด หมายถึง ภาพในใจ หรือแบบของความคิดที่เป็นตัวแทนสิ่งของทั้งประเภท เช่น “แมว” เป็นมโนทัศน์ทั่วไปสำหรับแมวทั้งหมด ถึงแม้แมวแต่ละตัวอาจจะไม่เหมือนกัน “ดำ” เป็นมโนทัศน์ของสีหรือความดำทั่วไป ไม่ว่าจะปรากฏเป็นคุณลักษณะของสิ่งใดในโอกาสใด “ความยุติธรรม” เป็นมโนทัศน์สำหรับคุณสมบัติอย่างหนึ่งที่เป็นกลางไม่ลำเอียง ไม่ว่าจะปรากฏในการกระทำเรื่องใดที่ไหน เป็นต้น มโนทัศน์อาจเป็นภาพกลางๆ ที่ประมวลสรุปได้จากภาพเฉพาะหลายๆ ภาพของสิ่งของประเภทเดียวกัน (เช่น แมว) หรือเป็นคุณลักษณะร่วมที่รับรู้ด้วยประสาทสัมผัสและแยกออกมาจากของต่างๆ กัน ซึ่งต่างมีคุณสมบัตินี้ตรงกัน (เช่น ดำ) หรือมโนทัศน์ไม่เป็นภาพของอะไรเลย แต่เป็น

คำจำกัดความคุณสมบัติบางอย่าง ที่มนุษย์กำหนดขึ้นเพื่อใช้ประโยชน์ร่วมกัน (เช่น ความยุติธรรม) ผู้มีมโนทัศน์ในเรื่องสุดท้ายนี้ได้ คือผู้ที่เข้าใจและยอมใช้คำจำกัดความเดียวกันเช่นนี้ร่วมกับผู้อื่น หรืออาจเป็นผู้ที่เลือกกำหนดคำจำกัดความตามที่ตนพอใจขึ้นเองโดยไม่ตรงกับผู้อื่น ซึ่งเป็นมูลเหตุของการถกเถียงขัดแย้งความคิดเห็นกันได้ทางหนึ่ง (เช่น มโนทัศน์ ความยุติธรรม ของนาย ก ไม่ตรงกับที่นาย ข ยึดถืออยู่)

ในการศึกษาทางวิชาการ แต่ละสาขาอาจมีมโนทัศน์ที่กำหนดใช้กันเป็นเฉพาะของแต่ละสาขาในความหมายที่แตกต่างกันได้ เช่น มโนทัศน์ "ความถูกต้อง" ในวิชาปรัชญาอาจไม่เหมือนกับในวิชานิติศาสตร์หรือวิชาสังคมวิทยา นอกจากนี้นักวิชาการได้ให้ความหมายมโนทัศน์ไว้ต่าง ๆ กันดังนี้

กิลฟอร์ด (Guilford, 1952: 1-3) กล่าวว่า มโนทัศน์ หมายถึง ลักษณะอย่างหนึ่งที่ได้มาจากประสบการณ์ของการผ่านพบสิ่งต่างๆ โดยรู้จักแยกแยะสิ่งของเหล่านั้นออกเป็นจำพวกต่างๆ และในจำนวนหนึ่งๆ มีลักษณะร่วมกันอยู่ เช่น เมื่อเราเห็นแมวหลายๆ ตัวเราก็รู้ "ลักษณะร่วมของแมว" ซึ่งแสดงว่าเรามีมโนทัศน์เกี่ยวกับเรื่องแมวเกิดขึ้นแล้ว

แมคโดนัล (McDonald, 1959: 184) ให้ความหมายว่า มโนทัศน์หรือกลุ่มของสิ่งเร้าหรือเหตุการณ์ที่มีลักษณะเฉพาะร่วมกัน มโนทัศน์ไม่ใช่เหตุการณ์ในตัวมันเองแต่มโนทัศน์เป็นกลุ่มของสิ่งเร้า เหตุการณ์หรือลักษณะจำเพาะที่แน่นอน ดังนั้นมโนทัศน์จึงเป็นความเข้าใจนั้นเป็นนามธรรมและเป็นข้อสรุปเกี่ยวกับเรื่องนั้น ในระยะหนึ่งหรือตลอดไปก็ได้

เดอ เชคโก (De Cecco, 1968: 388) ให้ความหมายของมโนทัศน์ว่า เป็นกลุ่มของเหตุการณ์หรือสิ่งแวดล้อมที่มีลักษณะบางประการหรือหลายประการร่วมกันอยู่ สิ่งแวดล้อมและเหตุการณ์ได้แก่ วัตถุ สิ่งของ สิ่งมีชีวิตตลอดจนสภาพดินฟ้าอากาศ และอื่นๆ ตัวอย่างมโนทัศน์ได้แก่ มนุษย์ สุนัข สงคราม เป็นต้น

กู๊ด (Good, 1973: 124) ได้ให้ความหมายถึงมโนทัศน์ไว้ 3 ลักษณะคือ

1. ความคิดหรือสัญลักษณ์ของส่วนประกอบ หรือลักษณะร่วมกันที่สามารถจำแนกออกเป็นกลุ่มเป็นพวกได้
2. ความคิดทั่วไปเชิงนามธรรมเกี่ยวกับสถานการณ์ กิจการหรือวัตถุ
3. ความรู้สึกนึกคิด ความเห็น ความคิด หรือภาพความคิด

มาโตเรลลา (Martorella, 1986: 186) ได้กล่าวถึงความหมายของมโนทัศน์ไว้ 2 ความหมายในเวลาเดียวกันว่า

1. มโนทัศน์เป็นการจัดลำดับชั้นของประสบการณ์ที่เป็นระเบียบ

2. มโนทัศน์เป็นข่ายของความเกี่ยวพันทางปัญญาที่นำมาจัดลำดับชั้นหรือประเภท ซึ่งไม่เพียงแต่จะจำแนกวัตถุ เหตุการณ์ที่เราปะสบ ถึงแม้เราจะเผชิญกับสิ่งใหม่ๆ หรือประสบการณ์เก่าๆ เราจะนำมโนทัศน์ทั้งเก่าและใหม่มาประสานสัมพันธ์ในการคิดแก้ปัญหา

พนัส หันนาคินทร์ และพิทักษ์ รักษพลเดช (2517: 39) ได้กล่าวว่า มโนทัศน์หมายถึง การสรุปรวบยอดคุณสมบัติที่เป็นองค์ประกอบร่วมของสิ่งที่เราได้ประสบพบเห็นแล้วกำหนดสัญลักษณ์แทนคุณสมบัติดังกล่าวได้ เช่น เราใช้สัญลักษณ์ "สุนัข" แก่สัตว์ชนิดหนึ่งที่มีลักษณะทั่วๆ ไปคือหน้ายาวๆ สี่ขา ขนค่อนข้างแข็ง เห่าได้ เป็นต้น

อาคม จันทสุนทร (2522: 47) ได้ให้ความหมายว่า มโนทัศน์หมายถึง ความเข้าใจที่สรุปรวมเกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือเรื่องใดเรื่องหนึ่งอันเกิดจากการได้รับประสบการณ์เกี่ยวกับสิ่งนั้นหลายๆ อย่างหลายๆ แบบ แล้วได้ใช้คุณลักษณะของสิ่งนั้นหรือเรื่องนั้นมาจัดเป็นพวกให้เกิดความคิดความเข้าใจ โดยสรุปรวมในสิ่งนั้นหรือเรื่องนั้น

บุญเสริม ฤทธาภิรมณ์ (2523: 7) ได้ให้ความหมายว่า มโนทัศน์คือ การสรุปความคิดของคนซึ่งเป็นผลจากการรับรู้ที่มีต่อสิ่งต่างๆ หรือเรื่องราวที่เกิดขึ้นกับคนในธรรมชาติและสังคม เป็นความคิดหลายชั้นหลายระดับ นับแต่เรื่องง่ายๆ ธรรมดาไปสู่ความคิดที่ยุ่งยากสลับซับซ้อน มีลักษณะเป็นนามธรรมที่คนเรารับรู้จากประสาทสัมผัสกลายเป็นประสบการณ์ที่คนแปลความหมายแทนไว้อีกต่อหนึ่ง

อรพรรณ ตันบรรจง (2529: 51) ได้ให้ความหมายไว้ว่า มโนทัศน์คือ การเข้าใจในนามธรรมของสิ่งของ ประสบการณ์ หรือ ปรากฏการณ์ที่สัมพันธ์กันซึ่งหมายถึงกลุ่มของมโนทัศน์ (Set of Concepts) มโนทัศน์เกี่ยวกับการปฏิบัติ (Operation of Concepts) ความเกี่ยวเนื่องของมโนทัศน์ (Relational Concepts) มโนทัศน์เกี่ยวกับโครงสร้าง (Structural Concepts)

ดวงเดือน พันธุมนาวิน (2531: 62-68) ได้ให้ความหมายว่า มโนทัศน์ หมายถึงความสามารถของบุคคลในการแยกแยะ จัดหมวดหมู่ของวัตถุ หรือเหตุการณ์ต่าง ๆ เข้าเป็นกลุ่มเดียวกันได้ โดยอาศัยลักษณะร่วมหรือลักษณะที่เหมือนกันของสิ่งเร้านั้นเป็นเกณฑ์ในการจัดรวมอยู่ในประเภทเดียวกัน และแบ่งแยกสิ่งเร้าที่ไม่มีลักษณะร่วมนี้ออกไว้ในประเภทอื่น ๆ

บุญชม ศรีสะอาด (2537: 28) ได้ให้ความหมายไว้ว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความสามารถในการจัดจำพวกสิ่งต่าง ๆ ตามคุณสมบัติเหมือนกันของสิ่งต่าง ๆได้แก่ กลม เหลี่ยม สีน้ำเงิน ฯลฯ ซึ่งผู้มีมโนทัศน์จุสามารถระบุสิ่งต่าง ๆ ตั้งแต่ 2 สิ่งขึ้นไปมีคุณสมบัติอย่างเดียวกัน เช่น ระบุว่าสิ่งที่มีลักษณะเป็นวงกลม ได้แก่ เหรียญบาท ยางรถยนต์ จานข้าว เป็นต้น

จากความหมายดังกล่าวพอสรุปได้ว่า มโนทัศน์ หมายถึง ความคิดความเข้าใจ ซึ่งเป็นความสามารถทางสมองอย่างหนึ่งที่จะทำให้บุคคลสามารถชี้บอกสิ่งเร้าแล้วจัดเข้าพวก โดยอาศัยลักษณะร่วมบางประการ สิ่งเร้านั้นอาจเป็นวัตถุ เหตุการณ์ หรือบุคคลก็ได้

2.2 ประเภทของมโนทัศน์

นักจิตวิทยาและนักการศึกษาได้จำแนกประเภทของมโนทัศน์ตามลักษณะหรือกฎเกณฑ์ที่แตกต่างกัน ดังต่อไปนี้

บรัคเนอร์และกอสนิคเกิล (Bruckner and Grossnickle, 1957: 41-43) ได้แบ่งประเภทของมโนทัศน์ออกเป็น 3 ลักษณะ ดังนี้

1. มโนทัศน์ร่วมลักษณะ เป็นการมีลักษณะเฉพาะ (Attributes) ร่วมกันตั้งแต่สองลักษณะขึ้นไป เช่นสมุดสีเขียวดอกไม้สีแดง หรือสิ่งเร้าที่พบเห็นโดยทั่วไปและคุ้นเคยในชีวิตประจำวันที่มีลักษณะร่วมกันตามขนาด รูปร่าง สี เป็นต้น

2. มโนทัศน์แยกลักษณะ เป็นการเลือกเอาอย่างใดอย่างหนึ่ง หรือทั้งสองอย่างร่วมกัน เช่น สัญลักษณ์ “o” อาจหมายถึง จำนวนเต็มศูนย์ วงกลมตัวอักษรในภาษาอังกฤษ หรือไข่ฟองหนึ่ง

3. มโนทัศน์เชิงสัมพันธ์ เป็นความสัมพันธ์ของเหตุการณ์สภาวะ หรือสิ่งเร้าตั้งแต่สองอย่างหรือมากกว่า เช่น ภาษีเงินได้สัมพันธ์กับระดับของรายได้

รัสเซล (Russell, 1956: 124-125 อ้างอิงจาก บุญเสริม ฤทธาภิรมย์, 2523: 9-11) ได้แบ่งมโนทัศน์เป็น 8 ประเภท ดังนี้ คือ

1. มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คือ มโนทัศน์เกี่ยวกับจำนวน ตัวเลข การวัด ซึ่งเกิดขึ้นอยู่เสมอในชีวิตประจำวัน

2. มโนทัศน์ในเรื่องเวลา เช่น เช้า สาย บ่าย เย็นกลางคืน กลางวัน และฤดูกาลต่าง ๆ

3. มโนทัศน์ทางวิทยาศาสตร์ เป็นมโนทัศน์ที่เกี่ยวข้องกับเวลาและมิติ เพราะวิทยาศาสตร์ขึ้นอยู่กับการวัดที่แน่นอนของเวลา มิติ น้ำหนัก และปรากฏการณ์อื่น ๆ

4. มโนทัศน์เกี่ยวกับตนเอง คือ การที่บุคคลมีความคิดว่าตัวเขาเป็นอะไร เป็นใคร เป็นอย่างไร

5. มโนทัศน์ทางสังคม เช่น ความสัมพันธ์ระหว่างบุคคลชุมชน ประชาธิปไตย ศีลธรรม และพฤติกรรมต่าง ๆที่แสดงออกมา

6. มโนทัศน์ทางสุนทรียภาพ มีความสัมพันธ์กับมโนทัศน์ที่เกี่ยวข้องกับความสวยงามและขึ้นกับมโนทัศน์ทางสังคม เช่นสุนทรียภาพในการเขียน ดนตรี

7. มโนทัศน์เกี่ยวกับความขบขัน มีพัฒนาการอยู่ในขอบเขตของสังคม บางสิ่งเป็นเรื่องที่ขบขันของสังคมหนึ่ง แต่อาจไม่ขบขันในอีกสังคมหนึ่งก็ได้

8. มโนทัศน์เกี่ยวกับเรื่องอื่น ๆ เช่น เกี่ยวกับความตาย เพศ สงคราม เป็นต้น

ออสูเบล (Ausubel, 1968: 41-43) สรุปออกเป็น 3 ประเภทได้ดังต่อไปนี้

1. มโนทัศน์ที่มีลักษณะร่วมกัน หมายถึง มโนทัศน์ที่เกิดจากการมีส่วนร่วมกันของลักษณะเฉพาะ ตั้งแต่สองลักษณะขึ้นไป เช่นสมุดสีเขียว ดอกไม้สีแดงสุนัขขนยาวสีขาว หรือสิ่งเร้าที่เราพบเห็นโดยทั่วไปมีลักษณะร่วมกัน ได้แก่ รูปร่าง ขนาด สี เป็นต้น มโนทัศน์ต่าง ๆ ที่เราคุ้นเคยในชีวิตประจำวัน มักเป็นมโนทัศน์แบบร่วมลักษณะ

2. มโนทัศน์แยกลักษณะ หมายถึง มโนทัศน์ที่เป็นโอกาสให้ตัดสินใจเลือกเอาอย่างใดอย่างหนึ่งหรือทั้งสองอย่างร่วมกัน เช่น คำว่า “กา” อาจเป็นนกหรือกาต้มน้ำ หรือเครื่องหมายกากบาท สัญลักษณ์ “o” อาจเป็นจำนวนศูนย์ วงกลม ตัวโอ ในภาษาอังกฤษ หรือไข่ฟองหนึ่งก็ได้

3. มโนทัศน์เชิงสัมพันธ์ หมายถึง มโนทัศน์ที่เกิดจากความสัมพันธ์ของเหตุการณ์ สภาวะหรือสิ่งเร้าตั้งแต่สองอย่างขึ้นไป เช่น การทำไม้ขีดไฟไปสัมพันธ์กับบุหรี่เพราะว่าเราใช้ไม้ขีดไฟจุดบุหรี่ หรือภาษีเงินได้สัมพันธ์กับระดับของรายได้

บุญเสริม ฤทธาภิรมย์ (2523: 9-11) ได้แยกประเภทของมโนทัศน์เป็น 3 ประเภท ในลักษณะที่คล้ายกัน ดังนี้

1. มโนทัศน์ที่มีลักษณะร่วมกัน เป็นมโนทัศน์ที่มีอยู่แล้วเป็นส่วนใหญ่มีลักษณะหลายๆ อย่างร่วมกัน ทำให้ง่ายในการเรียนรู้

2. มโนทัศน์ที่เป็นเชิงสัมพันธ์ เป็นความสัมพันธ์ระหว่างสมาชิกหรือส่วนของกลุ่มมาพิจารณาคุณลักษณะหรือคุณค่าที่แตกต่างกัน แต่มีความสัมพันธ์กันในบางลักษณะ

3. มโนทัศน์ที่เป็นเชิงวิเคราะห์ เป็นมโนทัศน์ที่อยู่บนพื้นฐานของคุณลักษณะที่สังเกตได้จากส่วนต่าง ๆ ของวัตถุ สิ่งของ เรื่องราวที่มีความซับซ้อนกว่าสองประเภทแรก

จากการแบ่งประเภทของมโนทัศน์ ดังกล่าว สรุปได้ว่า มโนทัศน์ แบ่งเป็นมโนทัศน์ที่สามารถสังเกตและสัมผัสได้ และมโนทัศน์ที่สามารถสังเกตและสัมผัสได้ต้องอาศัยการวิเคราะห์ โดยพิจารณาว่ามีลักษณะร่วมกันหรือแตกต่างกัน

2.3 ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

กู๊ด (Good, 1973: 118) ได้ให้ความหมายไว้สรุปได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดสำคัญ ความเข้าใจที่เกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือเรื่องใดเรื่องหนึ่งเกี่ยวข้องกับเนื้อหา คณิตศาสตร์ในด้านการคำนวณ ความสัมพันธ์กับจำนวน การให้เหตุผลอย่างมีระบบและ

คุณลักษณะภายนอกของสิ่งของ อันเกิดจากการสังเกตหรือการได้รับประสบการณ์แล้วนำลักษณะนั้นมาประมวลเข้าด้วยกันให้เป็นข้อสรุปทางคณิตศาสตร์

โทมาสิท (Toumasis, 1995: 98 อ้างอิงจาก เมธี ลิมอักษร, 2522: 4) ได้ให้ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดขั้นสุดท้ายเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ที่เกิดจากการเรียนรู้ของนักเรียนที่มีต่อสิ่งเร้า โดยนักเรียนสามารถแยกประเภทของสิ่งเร้าที่มีความสัมพันธ์กันและไม่สัมพันธ์กันได้

เบล (Bell, 1981: 124) ได้ให้ความหมายไว้สรุปได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์หมายถึงโครงสร้างทางคณิตศาสตร์ 3 แบบ คือ

1. มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์ เป็นการจัดประเภทของจำนวนความสัมพันธ์ระหว่างจำนวน และการใช้สัญลักษณ์แทนจำนวน เช่น หก แปด IV เป็นต้น
2. มโนทัศน์ทางสัญกรณ์ เป็นข้อตกลงเกี่ยวกับการใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ได้แก่ ความหมายและสมบัติของจำนวน เช่น การทราบว่าตัวเลขในจำนวน 275 ว่าตัวเลขแต่ละตัวหมายถึง อะไร เช่น 2 หมายถึง 200, 7 หมายถึง 70 และ5 หมายถึง 5 ดังนั้น 275 หมายถึง 200 + 70 + 5
3. มโนทัศน์ในการประยุกต์ เป็นการใช้มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์บริสุทธิ์กับมโนทัศน์ทางสัญกรณ์ ไปแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ และใช้ในสาขาที่เกี่ยวข้อง เช่น ความยาวพื้นที่และปริมาตรเป็นต้น

จากความหมายที่กล่าวมา จึงสรุปได้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึงความสามารถในการคิด และความเข้าใจเกี่ยวกับความคิดสำคัญหรือคามคิดรวบยอดเกี่ยวเนื้อหาทางคณิตศาสตร์อันเกิดจากการได้รับประสบการณ์และในการเรียนรู้ โดยสามารถสรุปเป็นความเข้าใจที่ได้ออกมาในรูปของบทนิยามทฤษฎีบทและสมบัติต่าง ๆ ของวิชาคณิตศาสตร์ รวมทั้งสามารถจัดประเภทของสิ่งเร้าที่เหมือนกันเข้าด้วยกันและแยกแยะความแตกต่างของสิ่งเร้าที่ไม่สัมพันธ์กันออกจากกัน

2.4 ความสำคัญของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

สุรชัย ขวัญเมือง (2522: 13-15) ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์กับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไว้ว่า หลักสูตรคณิตศาสตร์แผนใหม่หลายเรื่อง ได้ให้ความสำคัญของการฝึกทักษะทางการคิดคำนวณและถือว่าทักษะทางการคิดคำนวณมีความจำเป็นในการเรียนคณิตศาสตร์ แต่ทั้งนี้หมายความว่า การฝึกทักษะจะต้องมีความเข้าใจเป็นพื้นฐาน กล่าวคือจะต้องสอนให้ผู้เรียนเข้าใจมโนทัศน์เสียก่อนแล้วจึงฝึกทักษะเพื่อให้ผู้เรียนคิดคำนวณได้ง่ายและรวดเร็ว

การสอนคณิตศาสตร์ต้องพิจารณากระบวนการหรือหลักการทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีองค์ประกอบที่สัมพันธ์กัน 3 ประการดังภาพประกอบดังนี้

ภาพประกอบองค์ประกอบที่สัมพันธ์กันของการสอนคณิตศาสตร์

แผนภาพนี้แสดงให้เห็นว่า การเรียนรู้ควรเริ่มต้นจากความเข้าใจในมโนทัศน์เป็นอันดับแรก การฝึกทักษะให้เกิดความชำนาญเป็นอันดับต่อมา แล้วจึงถึงขั้นประยุกต์ คือการนำความรู้ไปใช้ในสถานการณ์ต่าง ๆ ในชีวิตเป็นขั้นสุดท้าย ซึ่งสอดคล้องกับ รวีวรรณ ธุมชัย (ม.ป.ป.: 77) ที่กล่าวว่าการสอนวิชาใด ๆ ในปัจจุบันใช้วิธีสอนคละกันซึ่งเรียนกว่าการสอนแบบผสม โดยมุ่งเน้นให้ผู้เรียนเกิดความเข้าใจและเกิดมโนทัศน์ที่ถูกต้องเป็นสำคัญ ถ้าครูได้เข้าใจกระบวนการต่าง ๆ ได้ศึกษาการคิดทางด้านคณิตศาสตร์เป็นอย่างดี ก็จะสามารถวางแผนการจัดประสบการณ์ในการเรียนรู้ให้นักเรียนได้อย่างเหมาะสม เพราะมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ คือโครงสร้างปัญญาและความคิดเป็นสิ่งอันเกิดจากประสบการณ์หรือปรากฏการณ์ใด ๆ นั่นเอง

2.5 รูปแบบการเรียนการสอนมโนทัศน์ (Concept Attainment Model) (ทิศนา แขมมณี, 2551: 225 - 226)

2.5.1 ทฤษฎี / หลักการ / แนวคิดของรูปแบบ

จอยส์และวีล (Joyce & Weil, 1996 : 161 - 178) พัฒนารูปแบบนี้ขึ้นโดยใช้แนวคิดของบรูเนอร์ กู๊ดนาว และออสติน (Bruner, Goodnow, and Austin) เกี่ยวกับการเรียนรู้มโนทัศน์ที่ว่า “Concept attainment is the search for and listing of attributes that can be used to distinguish exemplars from nonexemplars of various categories” (Bruner et al., 1967: 233) ซึ่งหมายความว่า การเรียนรู้มโนทัศน์ของสิ่งใดสิ่งหนึ่งนั้น สามารถทำได้โดยการค้นหาคุณสมบัติเฉพาะที่สำคัญของสิ่งนั้น เพื่อใช้เป็นเกณฑ์ในการจำแนกสิ่งที่ใช่และไม่ใช่สิ่งนั้นออกจากกัน

2.5.2 วัตถุประสงค์ของรูปแบบ

เพื่อช่วยให้ผู้เรียนเกิดการเรียนรู้มโนทัศน์ของเนื้อหาสาระต่าง ๆ อย่างเข้าใจและสามารถให้คำนิยามของมโนทัศน์นั้นด้วยตนเอง

2.5.3 กระบวนการเรียนการสอนของรูปแบบ

ขั้นที่ 1 ผู้สอนเตรียมข้อมูลสำหรับให้ผู้เรียนฝึกหัดจำแนก

1) ผู้สอนเตรียมข้อมูล 2 ชุด ชุดหนึ่งเป็นตัวอย่างของมโนทัศน์ที่ต้องการสอน อีกชุดหนึ่งไม่ใช่ตัวอย่างของมโนทัศน์ที่ต้องการสอน

2) ในการเลือกตัวอย่างข้อมูล 2 ชุดข้างต้น ผู้สอนจะต้องเลือกหาตัวอย่างที่มีจำนวนมากพอที่จะครอบคลุมลักษณะของมโนทัศฯที่ต้องการ

3) ถ้ามโนทัศน์ที่ต้องการสอนเป็นเรื่องยากและซับซ้อนหรือเป็นนามธรรม อาจใช้วิธีการยกเป็นตัวอย่างเรื่องสั้น ๆ ที่ผู้สอนแต่งขึ้นเองนำเสนอแก่ผู้เรียน

4) ผู้สอนเตรียมสื่อการสอนที่เหมาะสมจะใช้ประกอบการนำเสนอตัวอย่างมโนทัศน์เพื่อแสดงให้เห็นลักษณะต่าง ๆ ของมโนทัศน์ที่ต้องการสอนอย่างชัดเจน

ขั้นที่ 2 ผู้สอนอธิบายกติกาในการเรียนให้ผู้เรียนรู้และเข้าใจตรงกัน

ผู้สอนชี้แจงวิธีการเรียนรู้ให้ผู้เรียนเข้าใจก่อนเริ่มทำกิจกรรมโดยอาจสาธิตวิธีการและให้ผู้เรียนลองทำตามที่ผู้สอนบอกจนกระทั่งผู้เรียนเกิดความเข้าใจพอสมควร

ขั้นที่ 3 ผู้สอนเสนอข้อมูลตัวอย่างของมโนทัศน์ที่ต้องการสอน และข้อมูลที่ไม่ใช่ตัวอย่างของมโนทัศน์ที่ต้องการสอน

การนำเสนอข้อมูลตัวอย่างนี้ทำได้หลายแบบ แต่ละแบบมีจุดเด่นจุดด้อยดังต่อไปนี้

1) นำเสนอข้อมูลที่เป็นตัวอย่างของสิ่งที่จะสอนทีละข้อมูลจนหมดทั้งชุด โดยบอกให้ผู้เรียนรู้ว่าเป็นตัวอย่างของสิ่งที่จะสอนแล้วตามด้วยการเสนอนข้อมูลที่ไม่ใช่ตัวอย่างของสิ่งที่จะสอนทีละข้อมูล จนครบหมดทั้งชุดเช่นกัน โดยบอกให้ผู้เรียนรู้ว่าตัวอย่างชุดหลังนี้ไม่ใช่สิ่งที่จะสอน ผู้เรียนจะต้องสังเกตตัวอย่างทั้ง 2 ชุด และคิดหาคุณสมบัติร่วมและคุณสมบัติที่แตกต่างกัน เทคนิควิธีนี้สามารถช่วยให้ผู้เรียนสร้างมโนทัศน์ได้เร็ว แต่ใช้กระบวนการคิดน้อย

2) เสนอข้อมูลที่ใช่และไม่ใช่ตัวอย่างของสิ่งที่จะสอนสลับกันไปจนครบ เทคนิควิธีนี้ช่วยสร้างมโนทัศน์ได้ช้ากว่าเทคนิคแรก แต่ได้ใช้กระบวนการคิดมากกว่า

3) เสนอข้อมูลที่ใช่และไม่ใช่ตัวอย่างสิ่งที่จะสอนอย่างละ 1 ข้อมูล แล้วเสนอข้อมูลที่เหลือทั้งหมดทีละข้อมูลโดยให้ผู้เรียนตอบว่าข้อมูลแต่ละข้อมูลที่เหลือนั้นใช่หรือไม่ใช่ตัวอย่างที่จะสอน เมื่อผู้เรียนตอบ ผู้สอนเฉลยว่าผู้เรียนตอบถูกหรือผิด วิธีนี้ผู้เรียนจะได้ใช้กระบวนการคิดในการทดสอบสมมติฐานของตนทีละขั้นตอน

4) เสนอข้อมูลที่ใช่และไม่ใช่ตัวอย่างสิ่งที่จะสอนอย่างละ 1 ข้อมูล และให้ผู้เรียนช่วยกันยกตัวอย่างข้อมูลที่ผู้เรียนคิดว่าใช่ตัวอย่างของสิ่งที่จะสอน โดยผู้สอนจะเป็นผู้ตอบว่าใช่หรือไม่ใช่ วิธีนี้ผู้เรียนจะมีโอกาสคิดมากขึ้นอีก

ขั้นที่ 4 ให้ผู้เรียนบอกคุณสมบัติเฉพาะของสิ่งที่ต้องการสอน

จากกิจกรรมที่ผ่านมาในขั้นต้น ๆ ผู้เรียนจะต้องพยายามหา คุณสมบัติเฉพาะของตัวอย่างที่ใช่และไม่ใช่สิ่งที่ผู้สอนต้องการสอน และทดสอบคำตอบของตน หากคำตอบของตนผิด

ผู้เรียนก็จะต้องหาคำตอบใหม่ ซึ่งก็หมายความว่าต้องเปลี่ยนสมมติฐานที่เป็นฐานของคำตอบเดิม ด้วยวิธีนี้ผู้เรียนจะค่อย ๆ สร้างความคิดรวบยอดของสิ่งนั้นขึ้นมา ซึ่งก็มาจากคุณสมบัติเฉพาะของสิ่งนั้นนั่นเอง

ขั้นที่ 5 ให้ผู้เรียนสรุปและให้คำจำกัดความของสิ่งที่ต้องการสอน

เมื่อผู้เรียนได้รายการของคุณสมบัติเฉพาะของสิ่งที่ต้องการสอนแล้ว ผู้สอนให้ผู้เรียนช่วยกันเรียบเรียงให้เป็นคำนิยามหรือคำจำกัดความ

ขั้นที่ 6 ผู้สอนและผู้เรียนอภิปรายร่วมกันถึงวิธีการที่ผู้เรียนใช้ในการหาคำตอบให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เกี่ยวกับกระบวนการคิดของตัวเอง

2.5.4 ผลที่ผู้เรียนจะได้รับจากการเรียนตามรูปแบบ

เนื่องจากผู้เรียนเกิดการเรียนรู้มโนทัศน์ จากการคิด วิเคราะห์ และตัวอย่างที่หลากหลาย ดังนั้นผลที่ผู้เรียนจะได้รับโดยตรงคือ จะเกิดความเข้าใจในมโนทัศน์นั้น และได้เรียนรู้ทักษะการสร้างมโนทัศน์ซึ่งสามารถนำไปใช้ในการทำความเข้าใจมโนทัศน์อื่น ๆ ต่อไปได้ รวมทั้งช่วยพัฒนาทักษะการใช้เหตุผลโดยการอุปนัย (inductive reasoning) อีกด้วย

3. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

จากความสามารถของ โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตร จึงทำให้มีงานวิจัยต่างๆ เกี่ยวกับโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ดังนี้

3.1 งานวิจัยในต่างประเทศ

ฮิช (Hsieh, 1993 อ้างอิงจาก กฎุมพี กาสีชา, 2550: 9) กล่าวว่าโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เป็นระบบเชิงเรขาคณิตในสิ่งที่สร้างโดยการกระทำแบบค่อยเป็นค่อยไป การเคลื่อนไหวเกิดขึ้นซึ่งมีวิธีการควบคุม บรรยายตามลำดับขั้นตอนจุดสูงสุดของระบบไม่ต้องควบคุม จะมีการเคลื่อนที่อย่างอิสระ ส่วนจุดและเส้นเป็นระบบตรวจสอบเชิงเรขาคณิต โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตสนับสนุนการเปลี่ยนแปลงของโครงสร้างเรขาคณิตระบบ ยูคลิดแบบพลวัต ตรงกันข้ามกับสื่อที่นิ่ง (static) หรือลักษณะของวัตถุที่ไม่ชัดเจนไม่สามารถเปลี่ยนแปลงได้ดังในกรณีของสื่อที่เป็นพลวัตสามารถกระทำได้ โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเป็นกรณีหนึ่งที่สามารถสร้างจัดกระทำและเปลี่ยนแปลงจุดที่สร้างขึ้นบนแนวระนาบ สามารถเคลื่อนที่ไปได้ในทุก ๆ ตำแหน่งตามแนวระนาบนี้ ดังนั้นสิ่งที่สร้างเหล่านี้ไม่สามารถเป็นตัวแทนวัตถุที่แน่นอนอย่างใดอย่างหนึ่งได้ การใช้คุณสมบัติพลวัตในลักษณะเช่นนี้สามารถใช้อธิบายสิ่งที่คลุมเครือได้

เลสเตอร์ (Lester. 1996 : 2343–A) ได้ศึกษาวิจัยผลของการใช้ โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ที่มีผลสัมฤทธิ์ต่อการเรียนเรขาคณิตของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลาย รัฐแคลิฟอร์เนีย ประเทศสหรัฐ อเมริกา ค.ศ.1996 โดยที่ให้กลุ่มทดลองที่ใช้ โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนตามปกติ ผลการวิจัยดังกล่าวพบว่าค่าเฉลี่ยของผลการสอบหลังเรียนเกี่ยวกับความรู้ทางเรขาคณิตและการสร้างของกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุมไม่แตกต่างกันที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05 ค่าเฉลี่ยของผลการสอบหลังเรียนเกี่ยวกับการตั้งข้อคาดเดาทางเรขาคณิตของกลุ่มทดลองสูงกว่ากลุ่มควบคุมที่ระดับนัยสำคัญทางสถิติ .05

โยเซฟ (Yousef, 1997: 1637–A) ได้ศึกษาผลการใช้ โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต มีผลต่อเจตคติของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนปลายที่ลงทะเบียนเรียนวิชาเรขาคณิตเบื้องต้น ที่โรงเรียนเซาท์เวสเทิน รัฐโอไฮโอประเทศสหรัฐอเมริกา ค.ศ.1996 – 1997 โดยที่กลุ่มทดลองเรียนด้วยโปรแกรม โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ส่วนกลุ่มควบคุมเรียนด้วยวิธีปกติ ผลการวิจัยพบว่า กลุ่มทดลองมีเจตคติต่อวิชาเรขาคณิตสูงกว่ากลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

กาลินโด (Galindo, 1998: 76–82) กล่าวว่าในการสร้างรูปเรขาคณิตสำรวจความสัมพันธ์รูปเหล่านั้น ตั้งข้อคาดเดา สมบัติต่างๆ และทดสอบข้อคาดเดานั้นๆ เป็นการเรียนรู้ที่มีเหตุผลและมีความหมาย โดยนักเรียนสามารถเชื่อมโยงระหว่างการสร้างรูปโดยการใช้โปรแกรม โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต และการพิสูจน์ทางเรขาคณิต ทำให้นักเรียนเข้าใจเรขาคณิตได้อย่างลึกซึ้ง ไม่ใช่เชื่อการพิสูจน์แบบดั้งเดิม

ซิลกาลิส (Shilgalis, 1998: 162–165) ได้กล่าวถึงการนำโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต มาใช้เพิ่มพูนความรู้เพื่อการหาคำตอบ โดยผู้เรียนสามารถที่จะสืบเสาะสรุปผลการคาดเดาได้รวดเร็วกว่าการใช้กระดาษและดินสอ ซึ่งจะส่งผลให้นักเรียนมีทักษะและเข้าใจในการแก้ปัญหา

เอลเมทดาดี (Almeqdadi, 2000 อ้างอิงจาก วัชรสันต์ อินธิสาร, 2547: 58) ได้ศึกษาผลการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตที่มีต่อความเข้าใจมโนทัศน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนในประเทศจอร์แดน ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนในโรงเรียนสาธิต ของมหาวิทยาลัยยาร์มอก แบ่งเป็นกลุ่มทดลองซึ่งสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต และกลุ่มควบคุมสอนแบบปกติ กลุ่มละ 1 ห้อง พบว่าความเข้าใจทางเรขาคณิตหลังเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่าก่อนเรียน และกลุ่มควบคุมอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติ

เฮงราช (Heingraj, 2006 อ้างอิงจาก กฤมพี กาสีชา, 2550: 9) ได้ศึกษาบทบาทของโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ในกระบวนการสร้างความเข้าใจในมโนมติทางเรขาคณิต เกี่ยวกับการเลื่อนขนานของนักศึกษาระดับปริญญาตรีสาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น ชั้นปีที่ 1 ปีการศึกษา 2549 จำนวน 1 คน เป็นกรณีศึกษา โดยใช้กรอบทฤษฎี

ความเข้าใจระดับการจัดกระทำ ความเข้าใจระดับกระบวนการ และความเข้าใจระดับโครงสร้าง พบว่าการจัดกิจกรรมการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ช่วยให้นักศึกษาพัฒนาความเข้าใจระดับโครงสร้าง

3.2 งานวิจัยในประเทศ

วัชรสันต์ อินธิสาร (2547: 80) ได้ศึกษาผลของการพัฒนามโนทัศน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต พบว่านักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีผลสัมฤทธิ์สูง ปานกลาง และต่ำ ทั้งสามกลุ่มมีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญ

อำนาจ เชื้อบ่อคา (2547: 26-27) ได้ศึกษาผลของการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องพาราโบลา ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยการศึกษาครั้งนี้มีจุดมุ่งหมาย เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ก่อนและหลังการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ผลการศึกษาพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิทยาศาสตร์ เรื่องพาราโบลาหลังจากได้รับ การสอนโดยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต สูงกว่าก่อนได้รับการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

กฎมพี กาสีชา (2550: 27-30) ได้พัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องวงกลม โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต และได้วิเคราะห์ความเข้าใจของนักเรียนที่แสดงออกจากการปฏิบัติการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องวงกลม พบว่านักเรียนมีความเข้าใจ 3 ระดับ 1) ความเข้าใจเกี่ยวกับวงกลมระดับการจัดกระทำ ความเข้าใจระดับนี้นักเรียนสามารถใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ตามคำสั่ง เช่น เลือกจุดหรือพิกัด วาดรูปวงกลม หาระยะระหว่างจุด 2) ความเข้าใจเกี่ยวกับวงกลมระดับกระบวนการ ความเข้าใจระดับนี้ นักเรียนมาสารถสังเกตการณ์เปลี่ยนแปลงจากสถานการณ์ที่ครูเตรียมในโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ที่ใช้ประกอบในกิจกรรมการเรียนการสอน 3) ความเข้าใจเกี่ยวกับวงกลมระดับโครงสร้าง ความเข้าใจระดับนี้ เช่น นักเรียนสามารถสรุปความสัมพันธ์ระหว่างค่าของ h , k และ r ในรูปของสมการรูปมาตรฐานของวงกลมและค่าของ D , E และ F ในรูปของสมการทั่วไปของวงกลม เป็น $F = h^2 + k^2 - r^2$

เรณุวัฒน์ พงษ์อุทธา (2550: 28-30) ได้ศึกษาการเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องพาราโบลา เจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการวิเคราะห์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ระหว่างการจัดกิจกรรมโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตรเป็นสื่อกับการจัดกิจกรรมตามปกติ ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่เรียนโดยการจัดกิจกรรมด้วยการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตรเป็นสื่อ มีเจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมตามปกติและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องพาราโบลา

ที่เรียนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตรสูงกว่านักเรียนที่เรียนด้วยการจัดกิจกรรมปกติอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

สันติ อินพลนาวากุล (2550: 86-87) ได้พัฒนาชุดการเรียนคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เพื่อส่งเสริมความคิดรวบยอดเรื่องภาคตัดกรวย พบว่า ความคิดรวบยอดและผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องภาคตัดกรวยของนักเรียนหลังจากได้รับการสอนโดยชุดการเรียนคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตสูงขึ้น

จากเอกสารและงานวิจัยทั้งหมดที่เกี่ยวกับการวิจัยในครั้งนี้พบว่า การนำโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตมาจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ ทำให้ผู้เรียนเกิดการพัฒนามโนทัศน์หรือความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์ได้ดีขึ้น นักเรียนสามารถเข้าใจคณิตสาสตร์ที่เป็นนามธรรมที่สามารถถ่ายทอดให้เห็นได้อย่างเป็นรูปธรรม เป็นเครื่องมือที่ครูช่วยกระตุ้นการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ที่ทันสมัย ผู้เรียนเข้าใจเนื้อหาได้ง่ายและรวดเร็ว ทำให้คณิตศาสตร์ไม่เป็นเรื่องน่าเบื่อสำหรับผู้เรียนอีกต่อไป

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัยเรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ของนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร

ซึ่งการวิจัยครั้งนี้ มีขั้นตอนในการดำเนินการวิจัยดังนี้

1. การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง
2. การออกแบบการวิจัย
3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
4. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
5. การเก็บรวบรวมข้อมูล
6. การวิเคราะห์ข้อมูล

โดยแต่ละขั้นตอนมีรายละเอียด ดังต่อไปนี้

1. การศึกษาค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ผู้วิจัยได้ศึกษา ค้นคว้าเอกสารและงานวิจัยต่าง ๆ ทั้งในและต่างประเทศที่เกี่ยวข้องกับการวิจัย ดังต่อไปนี้

1.1 ศึกษาเอกสาร บทความ วารสาร งานวิจัยและทฤษฎีต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับความหมายของมโนทัศน์ ประเภทของมโนทัศน์ ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ความสำคัญของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ และรูปแบบการเรียนการสอนมโนทัศน์

1.2 ศึกษาโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต (The geometer's sketchpad : GSP)

1.3 ศึกษาเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ที่จะใช้สอนนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 3 ตามหลักสูตรโรงเรียนเตรียมทหาร พุทธศักราช 2546 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2550)

1.4 การศึกษาเอกสาร ตำรา และงานวิจัยที่เกี่ยวกับหลักการและวิธีการสร้างแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

2. การออกแบบการวิจัย

รูปแบบการวิจัยครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลองแบบแผนวัดก่อนและหลังการทดลองกลุ่มเดียว กำหนดรายละเอียดดังนี้

O_1 X O_2

โดยที่ O_1 หมายถึง การเก็บข้อมูลก่อนทดลอง (การวัดผลก่อนการเรียน)

X หมายถึง การจัดกระทำหรือการให้การทดลอง (การจัดการเรียนการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

O_2 หมายถึง การเก็บข้อมูลหลังการทดลอง (การจัดผลหลังการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

3. การกำหนดประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

3.1 ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักเรียนเตรียมทหารชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร สังกัดสถาบันป้องกันประเทศ กองบัญชาการกองทัพไทย กระทรวงกลาโหม จำนวน 18 ตอนเรียน และมีนักเรียน 542 คน ปีการศึกษา 2552

3.2 กลุ่มตัวอย่าง ที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยเลือกตัวอย่างประชากรโดยทำการเลือกแบบกลุ่ม เป็นนักเรียนเตรียมทหารชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร จำนวน 1 ตอนเรียน มีนักเรียนจำนวน 30 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552ได้รับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

4. การสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

2. สื่อการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

3. แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ขั้นตอนการสร้างเครื่องมือที่ใช้ในการศึกษา

1. แผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.1 ศึกษาหลักสูตรตามโรงเรียนเตรียมทหาร พุทธศักราช 2546 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2550) กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ และเอกสารต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับเนื้อหาบทเรียน เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.2 ศึกษาหลักการทฤษฎี เทคนิควิธีและเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้

1.3 วิเคราะห์เนื้อหาและจุดประสงค์การเรียนรู้เพื่อกำหนดโครงสร้างของแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1.4 ดำเนินการเขียนแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จำนวน 8 แผ่น ซึ่งแผนการจัดการเรียนรู้แต่ละแผนประกอบด้วย จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระสำคัญ เนื้อหา กิจกรรมการเรียนการสอน แบ่งเป็น 3 ขั้นตอน คือ ขั้นนำ ขั้นสอน และขั้นสรุป สื่อการเรียนการสอน และ การวัดและประเมินผล สำหรับกิจกรรมการเรียนการสอนจะมีการใช้สื่อการสอนโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตในกระบวนการเรียนการสอน

1.5 นำแผนการจัดการเรียนรู้ เสนอต่อผู้เชี่ยวชาญและอาจารย์ที่ปรึกษา เพื่อตรวจสอบความตรงตามจุดประสงค์การเรียนรู้ ความครอบคลุมของเนื้อหาตามหลักสูตรโรงเรียนเตรียมทหาร พุทธศักราช 2546 (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2550) ตลอดจนความเหมาะสมในการนำสื่อการสอนโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตเพื่อนำมาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญและอาจารย์ที่ปรึกษา รวมทั้งการปรับปรุงใบกิจกรรมในแต่ละแผนการจัดการเรียนรู้ให้เกิดความเหมาะสมในด้านปริมาณและการครอบคลุมเนื้อหา โดยแผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละคาบ แสดงเนื้อหาที่สอน และจุดประสงค์การเรียนรู้ ดังนี้

ตารางที่ 3.1 แสดงเนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน และจุดประสงค์การเรียนรู้ในแผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละคาบ

คาบที่	เนื้อหา	จุดประสงค์การเรียนรู้
1	- บทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน - ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน - ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน - ลิมิตของฟังก์ชันที่ a	นักเรียนสามารถ 1. เขียนสัญลักษณ์และบทนิยามลิมิตของฟังก์ชันได้ 2. อธิบายบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันได้ 3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตหรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้
2	- บทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน - ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน - ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน - ลิมิตของฟังก์ชันที่ a (ต่อ)	นักเรียนสามารถ 1. เขียนสัญลักษณ์และนิยามลิมิตของฟังก์ชันได้ 2. อธิบายบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันได้ 3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตหรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้
3	- ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต	นักเรียนสามารถ 1. เขียนสัญลักษณ์และบทนิยามลิมิตของฟังก์ชันได้ 2. อธิบายบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันได้ 3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตหรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้
4	- ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต(ต่อ)	นักเรียนสามารถ 1. เขียนสัญลักษณ์และบทนิยามลิมิตของฟังก์ชันได้ 2. อธิบายบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันได้ 3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตหรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้

ตารางที่ 3.1 (ต่อ) แสดงเนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน และจุดประสงค์การเรียนรู้ในแผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละคาบ

คาบที่	เนื้อหา	จุดประสงค์การเรียนรู้
5	- ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดใดๆ	นักเรียนสามารถ 1. เขียนบทนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ ได้ 2. อธิบายความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ ได้ 3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่
6	- ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดใดๆ - ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง (a, b)	นักเรียนสามารถ 1. อธิบาย ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ ได้ 2. อธิบาย ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง (a, b) ได้ 3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่ 4. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง (a, b) ที่กำหนดให้หรือไม่
7	- ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง [a, b]	นักเรียนสามารถ 1. เขียนบทนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง [a, b] ได้ 2. อธิบายความต่อเนื่องของฟังก์ชัน บนช่วง [a, b] ได้ 3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง [a, b] ที่กำหนดให้หรือไม่

ตารางที่ 3.1 (ต่อ) แสดงเนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน และจุดประสงค์การเรียนรู้ในแผนการจัดการเรียนรู้ในแต่ละคาบ

คาบที่	เนื้อหา	จุดประสงค์การเรียนรู้
8	- ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต - ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดใดๆ - ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง (a, b) - ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง [a, b]	นักเรียนสามารถ 1. เขียนนิยามลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้ 2. อธิบายลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้ 3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตหรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้ 4. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ณ จุด หรือช่วงที่กำหนดให้ หรือไม่

2. สื่อการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

2.1 ศึกษาการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

2.2 ศึกษาหลักการทฤษฎี เทคนิควิธีและเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการสร้างสื่อการสอน โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

2.3 สร้างสื่อการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

2.4 นำสื่อการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันไปให้ผู้เชี่ยวชาญทางด้านการสอน สื่อนวัตกรรม การวัดผลการศึกษาและความเหมาะสมของเนื้อหา และให้อาจารย์ที่ปรึกษาพิจารณา แล้วนำข้อเสนอแนะของผู้เชี่ยวชาญและอาจารย์ที่ปรึกษามาปรับปรุงแก้ไข

2.5 นำสื่อการสอนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันไปหาประสิทธิภาพ

3. แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

การสร้างเครื่องมือวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันมีขั้นตอน ดังภาพประกอบต่อไปนี้

ศึกษาทฤษฎี เนื้อหา และการเขียนแบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์เพื่อวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

↓

ศึกษาคำนิยาม ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

↓

วิเคราะห์สาระสำคัญ มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ กับจำนวนข้อสอบ

↓

วิเคราะห์หลักสูตรวิชาคณิตศาสตร์ ประกอบด้วย
สาระสำคัญ มโนทัศน์ และจุดประสงค์การเรียนรู้

↓

สร้างแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

↓

ตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหาของแบบวัดมโนทัศน์โดยผู้เชี่ยวชาญและ
จัดพิมพ์แบบวัดมโนทัศน์เพื่อนำไปทดลองใช้กับนักเรียน

↓

นำผลการสอบมาวิเคราะห์ บทค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) เป็นรายข้อ

↓

หาค่าความเชื่อมั่นของแบบวัดมโนทัศน์

↓

จัดทำแบบวัดมโนทัศน์ให้เป็นฉบับสมบูรณ์

แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยดำเนินการสร้างและหาคุณภาพ ดังนี้

3.1 ศึกษาทฤษฎี เนื้อหา และการเขียนแบบทดสอบวิชาคณิตศาสตร์เพื่อวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ จากหนังสือ ตำรา เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง เพื่อใช้ในการสร้างแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

3.2 ศึกษาคำนิยาม ความหมายของมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ จากหนังสือ เอกสาร ตำราและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

3.3 ผู้วิจัยสร้างตารางวิเคราะห์หลักสูตร โดยการวิเคราะห์จุดประสงค์การเรียนรู้เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน แบ่งเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนแบบอัตนัย และ ส่วนแบบปรนัย เพื่อเป็นแนวทางในการสร้างแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ ดังตารางที่ 3.2 และ 3.3 ตามลำดับ

ตารางที่ 3.2 แสดงการวิเคราะห์หลักสูตร ส่วนอัตนัย

พฤติกรรม (จำนวนข้อ, ข้อที่) / จุดประสงค์การเรียนรู้	ความรู้-ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์	รวม
ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน					
1.1 ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตหรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้			1(1)	1(3)	2
1.2 ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่			1(4)		1
1.3 ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ณ ช่วงที่กำหนดให้หรือไม่		1(2)			1
1.4 สามารถหาค่าของตัวแปร เมื่อฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้				1(5)	1
รวม		1	2	2	5

ตารางที่ 3.3 แสดงการวิเคราะห์หลักสูตร ส่วนปรนัย

พฤติกรรม (จำนวนข้อ, ข้อที่) / จุดประสงค์การเรียนรู้	ความรู้-ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์	รวม
ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน					
1.1 ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตหรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้		1(1)	2(7, 16)	1(18)	4
1.2 สามารถหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิตได้		1(2)	4(3, 4, 5, 17)		5
1.3 สามารถหาลิมิตทางซ้ายและลิมิตทางขวาของฟังก์ชันได้				1(6)	1
1.4 ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่			2(8, 9)		2
1.5 ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่		1(15)			1
1.6 สามารถวิเคราะห์ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบน ช่วงที่กำหนดให้ได้				2(14, 20)	2
1.7 สามารถหาค่าของตัวแปร เมื่อฟังก์ชันต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้				3(12, 13, 19)	3

ตารางที่ 3.3 (ต่อ) แสดงการวิเคราะห์หลักสูตร ส่วนปรนัย

พฤติกรรม (จำนวนข้อ, ข้อที่) / จุดประสงค์การเรียนรู้	ความรู้-ความจำ	ความเข้าใจ	การนำไปใช้	การวิเคราะห์	รวม
ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน					
1.8 พิจารณาฟังก์ชันไม่ต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้เพราะเหตุใด		1(11)			1
1.9 วิเคราะห์ได้ว่าฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้เพราะเหตุใด				1(10)	1
รวม		4	8	8	20

4. สร้างแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน รวมทั้งหมด 65 ข้อ ซึ่งเป็นแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่มี 2 ส่วน โดยส่วนที่ 1 แบบแสดงวิธีทำ จำนวน 15 ข้อ และส่วนที่ 2 แบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 50 ข้อ และกำหนดเกณฑ์การให้คะแนน และเหตุที่สร้างจำนวนข้อไว้เกินเพื่อใช้ในการตรวจหาคุณภาพข้อสอบ ซึ่งอาจพบข้อที่ใช้ไม่ได้ต้องคัดออก

5. นำแบบวัดทดสอบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นให้ผู้เชี่ยวชาญ ด้านการสอนคณิตศาสตร์และด้านวัดผลการศึกษา จำนวน 3 ท่าน ตรวจสอบความเที่ยงตรงเชิงเนื้อหา โดยการหาค่าดัชนีความสอดคล้องระหว่างข้อสอบแต่ละข้อ กับจุดประสงค์ (Index of Item Objective Congruence : IOC) โดยใช้เกณฑ์ประเมิน ดังนี้

+1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อสอบวัดตรงจุดประสงค์นั้น

0 หมายถึง ไม่แน่ใจว่าข้อสอนวัดตรงจุดประสงค์นั้น

-1 หมายถึง แน่ใจว่าข้อสอบไม่วัดตรงจุดประสงค์นั้น

6. นำแบบทดสอบที่ได้รับการตรวจจากผู้เชี่ยวชาญคำนวณค่า IOC และ คัดเลือกข้อสอบที่มีค่า IOC ตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป จัดพิมพ์แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นปีที่ 3 ซึ่งไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 30 คน

7. นำผลการสอบของนักเรียนเตรียมทหารที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างจำนวน 30 คน มาวิเคราะห์หาค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) เป็นรายข้อ พบว่ามีค่าความยากตั้งแต่ 0.17-0.80 ค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20-0.73

8. นำแบบวัดมโนทัศน์ที่คัดเลือกแล้วจำนวน 25 ข้อ ซึ่งเป็นแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ที่มี 2 ส่วน โดยส่วนที่ 1 แบบแสดงวิธีทำ จำนวน 5 ข้อ จาก 15 ข้อ และส่วนที่ 2 แบบเลือกตอบชนิด 4 ตัวเลือก จำนวน 20 ข้อ จาก 50 ข้อไปทดสอบกับนักเรียนชั้นปีที่ 3 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่างเดิม จำนวน 30 คน แล้วนำมาหาค่าความเที่ยงของแบบวัดมโนทัศน์ซึ่งส่วนที่ 1 ได้ค่าความเที่ยง 0.70 โดยใช้สูตร สัมประสิทธิ์แอลฟา และส่วนที่ 2 ได้ค่าความเที่ยง 0.81 โดยใช้สูตรของครูเดอร์ ริชาร์ดสัน (KR-20)

9. จัดทำแบบทดสอบวัดมโนทัศน์ให้เป็นฉบับสมบูรณ์ เพื่อนำไปใช้เป็นแบบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนต่อไป

5. การเก็บรวมรวมข้อมูล

ผู้วิจัยทำการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยมีข้อมูลดังนี้

5.1 ผู้วิจัยดำเนินการเก็บข้อมูลก่อนทดลอง โดยใช้แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ชุดก่อนเรียน

5.2 ผู้วิจัยดำเนินการสอนกลุ่มตัวอย่าง โดยใช้สื่อการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต จำนวน 8 แผนการจัดการเรียนรู้ แผนละ 50 นาที

5.3 เมื่อดำเนินการสอนครบตามแผนการเรียนรู้ที่กำหนดแล้ว ผู้วิจัยทำการทดสอบนักเรียนเพื่อวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ชุดหลังเรียน

5.4 นำคะแนนที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ชุกก่อนและหลังเรียนมาวิเคราะห์เพื่อทดสอบสมมติฐาน

6. การวิเคราะห์ข้อมูล

6.1 วิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันของกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังการเรียนการสอนด้วยสื่อการสอนโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต จากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ โดยคำนวณหาค่ามัชฌิมเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

6.2 วิเคราะห์ข้อมูลเพื่อศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันของนักเรียน ซึ่งเปรียบเทียบคะแนนก่อนและหลังการเรียนการสอน โดยใช้สื่อการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ โดยคำนวณค่ามัชฌิมเลขคณิต และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เทียบกับเกณฑ์ด้วยการทดสอบที่ใช้ค่าที (t – test dependent)

6.3 สถิติที่ใช้ในการทดสอบคุณภาพของเครื่องมือที่ใช้ในการทดลอง ดังนี้

6.3.1 หาค่าดัชนีความสอดคล้อง จากความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ ที่มีต่อความสอดคล้องระหว่างแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์กับจุดประสงค์การเรียนรู้ โดยใช้สูตร IOC

6.3.2 หาค่าความยากง่าย (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ของแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์

6.3.3 หาค่าความเที่ยงของแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ โดยคำนวณจากสูตร KR-20 สำหรับแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ส่วนปรนัย และสูตรสัมประสิทธิ์แอลฟาสำหรับแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ส่วนอัตนัย

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์ข้อมูลการวิจัยเรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเราขาคณิตพลวัต ของนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร ผู้วิจัยเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลดังต่อไปนี้

1. ค่าสถิติพื้นฐาน

1.1 มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนการสอน ด้วยโปรแกรมเราขาคณิตพลวัต โดยนำคะแนนสอบก่อนเรียนและหลังเรียนจากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตส่วนของอัตนัย ซึ่งมีคะแนนเต็ม 10 คะแนน หาค่าสถิติพื้นฐานดังตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4 .1 สถิติพื้นฐานของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง โดยใช้โปรแกรมเราขาคณิตพลวัต จากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตส่วนของอัตนัย

ระยะเวลา	n	MAX	MIN	$\overline{X}$	$\overline{X}_{\text{ร้อยละ}}$	S
ก่อนเรียน	30	4.33	0.00	2.30	23.00	1.15
หลังเรียน	30	10.00	2.00	7.38	73.80	1.86

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากตารางพบว่า คะแนนแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ส่วนอัตนัยของนักเรียนเตรียมทหาร จำนวน 30 คน มีคะแนนสูงสุดก่อนเรียนเท่ากับ 4.33 คะแนน หลังเรียนเท่ากับ 10.00 คะแนน คะแนนต่ำสุดก่อนเรียนเท่ากับ 0.00 คะแนน หลังเรียนเท่ากับ 7.38 คะแนน ค่ามัชฌิมเลขคณิตก่อนเรียนเท่ากับ 2.30 คะแนน หลังเรียน 7.38 คะแนน ค่ามัชฌิมเลขคณิตร้อยละก่อนเรียนเท่ากับ 23.00 คะแนน หลังเรียน 73.80 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานก่อนเรียนเท่ากับ 1.15 คะแนน หลังเรียนเท่ากับ 1.86 คะแนน

1.2 มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนการสอน ด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต โดยนำคะแนนสอบก่อนเรียนและหลังเรียน จากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตส่วนของปรนัย ซึ่งมีคะแนนเต็ม 15 คะแนนหาค่าสถิติพื้นฐานดังตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 สถิติพื้นฐานของนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่อง โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตจากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตส่วนของปรนัย

ระยะเวลา	n	MAX	MIN	$\overline{X}$	$\overline{X}_{\text{ร้อยละ}}$	S
ก่อนเรียน	30	6.00	3.75	5.18	34.53	1.03
หลังเรียน	30	14.25	3.00	9.22	61.47	3.36

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากตารางพบว่า คะแนนแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ส่วนปรนัยของนักเรียนเตรียมทหาร จำนวน 30 คน มีคะแนนสูงสุดก่อนเรียนเท่ากับ 6.00 คะแนน หลังเรียนเท่ากับ 14.25 คะแนน คะแนนต่ำสุดก่อนเรียนเท่ากับ 3.75 คะแนน หลังเรียนเท่ากับ 3.00 คะแนน ค่ามัชฌิมเลขคณิตก่อนเรียนเท่ากับ 5.18 คะแนน หลังเรียน 9.22 คะแนน ค่ามัชฌิมเลขคณิตร้อยละก่อนเรียนเท่ากับ 34.53 คะแนน หลังเรียน 61.47 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานก่อนเรียนเท่ากับ 1.03 คะแนน หลังเรียนเท่ากับ 3.36 คะแนน

2. ค่าสถิติทดสอบ

มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ของนักเรียนเตรียมทหารกลุ่มตัวอย่างก่อนและหลังได้รับการจัดการเรียนการสอน ด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตจากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตซึ่งมีคะแนนเต็ม 25 คะแนน ดังตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 เปรียบเทียบค่ามัชฌิมเลขคณิต ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของคะแนนมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันก่อนและหลังการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเราขาคณิตพลวัต

ระยะเวลา	$\overline{X}$	S	t-test
ก่อนเรียน	7.48	1.86	
			13.536*
หลังเรียน	16.60	5.13	

*$p < 0.05$

ผลการวิเคราะห์ข้อมูลจากตารางพบว่า คะแนนแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน มีค่ามัชฌิมเลขคณิตก่อนเรียนเท่ากับ 7.48 คะแนน หลังเรียน 16.60 คะแนน ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานก่อนเรียนเท่ากับ 1.86 คะแนน หลังเรียนเท่ากับ 5.13 คะแนน และมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ของนักเรียนเตรียมทหารหลังได้รับการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเราขาคณิตพลวัตสูงกว่าก่อนได้รับการเรียนการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

บทที่ 5
สรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัยเรื่อง การศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเราขาคณิตพลวัต ของนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันของนักเรียนเตรียมทหารชั้นปีที่ 3 ก่อนและหลังการจัดเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเราขาคณิตพลวัต

ประชากรที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้เป็นนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร สังกัดสถาบันป้องกันประเทศ กองบัญชาการกองทัพไทย กระทรวงกลาโหม จำนวน 18 ตอนเรียน และมีนักเรียน 542 คน ผู้วิจัยเลือกตัวอย่างประชากรทำการเลือกแบบกลุ่ม โดยเลือกนักเรียนเตรียมทหารชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร จำนวน 1 ตอนเรียน มีนักเรียนจำนวน 30 คน ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2552ได้รับการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ด้วยโปรแกรมเราขาคณิตพลวัต เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

การดำเนินการทดลอง ผู้วิจัยดำเนินการเก็บข้อมูลก่อนการทดลองโดยใช้แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันชุดก่อนเรียน ผู้วิจัยทำการสอนนักเรียนเตรียมทหารกลุ่มตัวอย่างโดยใช้โปรแกรมเราขาคณิตพลวัต เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันจนครบตามแผนการจัดการเรียนรู้ที่กำหนด แล้วเก็บข้อมูลหลังทำกิจกรรมโดยใช้แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ชุดหลังเรียน นำคะแนนที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ชุดก่อนและหลังเรียนมาวิเคราะห์หาสถิติพื้นฐานและสถิติเพื่อการทดสอบสมมติฐาน ทำการวิเคราะห์ผลข้อมูลนำไปสรุปผลการวิจัย โดยคะแนนที่ได้จากแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ชุดก่อนเรียน และชุดหลังเรียนนำมาวิเคราะห์หาค่ามัชฌิมเลขคณิตเพื่อเปรียบเทียบมโนทัศน์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ด้วยสถิติทดสอบค่าที (t-test)

1. สรุปการวิจัย

การวิจัยเพื่อศึกษามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยการจัดการเรียนการสอนด้วยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ของนักเรียนเตรียมทหาร ชั้นปีที่ 3 โรงเรียนเตรียมทหาร สรุปผลการวิจัย ดังนี้

มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ของนักเรียนเตรียมทหาร หลังได้รับการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต สูงกว่าก่อนได้รับการเรียนการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

2. อภิปรายผล

จากผลการวิจัยที่พบว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันของนักเรียนเตรียมทหาร หลังได้รับการเรียนการสอนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต สูงกว่าก่อนได้รับการเรียนการสอนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05 ซึ่งสอดคล้องกับสมมติฐานการวิจัยที่ตั้งขึ้น เหตุที่ผลการวิจัยได้เช่นนี้อาจเนื่องจากการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตนั้น เป็นเครื่องมือที่สามารถใช้กับเนื้อหาแคลคูลัส ทำให้นักเรียนได้เกิดการสำรวจ และทำความเข้าใจในเนื้อหาได้ง่ายขึ้นกว่าการสอนแบบเดิม โดยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตยังเป็นเครื่องมือที่ช่วยกระตุ้นให้เกิดกระบวนการค้นพบ เพราะโปรแกรมเอื้ออำนวยต่อการวัดค่าของฟังก์ชัน เมื่อมีการเปลี่ยนค่าของโดเมน ค่าของฟังก์ชันก็เปลี่ยนตามอย่างสอดคล้องและถูกต้อง ความสามารถของโปรแกรมที่โดดเด่นนี้ เป็นจุดช่วยทำให้การจัดกิจกรรมการเรียนการสอนเรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่มีลักษณะเป็นนามธรรม เพราะนักเรียนต้องจินตนาการลักษณะการเข้าใกล้ค่าของโดเมนที่สนใจ แสดงออกเป็นรูปธรรมได้อย่างชัดเจนมากยิ่งขึ้น นักเรียนสามารถเห็นภาพการเคลื่อนไหว การเปลี่ยนค่าฟังก์ชันแล้วทำให้เกิดการคิดวิเคราะห์ เกิดความเข้าใจในบทนิยาม นักเรียนสามารถตั้งข้อคาดเดาก่อนที่จะทำการพิสูจน์หรือทำความเข้าใจในทฤษฎีบทที่เรียน นักเรียนจะเพิ่มความเข้าใจในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หรือความคิดรวบยอด ซึ่งสอดคล้องตามที่ Good (1959: 118) ได้สรุปความหมายมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ไว้ว่า มโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความคิดสำคัญ ความเข้าใจที่เกี่ยวกับสิ่งใดสิ่งหนึ่งหรือเรื่องใดเรื่องหนึ่งเกี่ยวข้องกับเนื้อหา คณิตศาสตร์ในด้านการคำนวณ ความสัมพันธ์กับจำนวนการให้เหตุผลอย่างมีระบบและคุณลักษณะภายนอกของสิ่งของ อันเกิดจากการสังเกตหรือการได้รับประสบการณ์แล้วนำลักษณะนั้นมาประมวลเข้าด้วยกันให้เป็นข้อสรุปทางคณิตศาสตร์ เพราะมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์มีความสำคัญยิ่งต่อการเรียนรู้ดังที่ เสริมศักดิ์ สุรวัลลภ (ม.ป.ป.: 122)

ได้กล่าวถึงความสำคัญของมโนทัศน์กับการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ไว้ว่า หลักสูตรคณิตศาสตร์แผนใหม่หลายเรื่อง ได้ให้ความสำคัญของการฝึกทักษะทางการคิดคำนวณและถือว่าทักษะทางการคิดคำนวณมีความจำเป็นในการเรียนคณิตศาสตร์ แต่ทั้งนี้หมายความว่า การฝึกทักษะจะต้องมีความเข้าใจเป็นพื้นฐาน กล่าวคือจะต้องสอนให้ผู้เรียนเข้าใจมโนทัศน์เสียก่อนแล้วจึงฝึกทักษะเพื่อให้ผู้เรียนคิดคำนวณได้ง่ายและรวดเร็ว

ด้วยเนื้อหาคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันที่มีลักษณะของความเป็นนามธรรมค่อนข้างสูง ผู้เรียนมักจะประสบปัญหาไม่สามารถเข้าใจในมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ในเรื่องนี้อย่างแท้จริง มักเกิดมโนทัศน์ที่คลาดเคลื่อนอยู่เสมอ ดังนั้นกระบวนการเรียนรู้จากโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตที่จัดให้มีความเหมาะสมจะช่วยให้นักเรียนได้พัฒนาพื้นฐานของตนเองในเชิงรูปธรรมก่อนแล้วค่อย ๆ พัฒนาการเรียนรู้ไปสู่ระดับที่สูงขึ้น ทำให้นักเรียนเกิดความสนใจกระตือรือร้นต่อการเรียน สังเกตได้จากการซักถามอย่างอยากรู้อยากเห็น มีความคิดต่อยอดซึ่งพบจากการตั้งคำถามที่ลึกขึ้นของนักเรียน แสดงให้เห็นถึงการพัฒนามโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์อย่างต่อเนื่อง มีความสนุกสนานชื่นชอบกับความสามารถของโปรแกรมเรขาคณิต ที่สามารถแสดงกราฟของฟังก์ชันยุ่งยากซับซ้อน ที่ลักษณะกราฟของฟังก์ชันวาดด้วยมือได้ยาก นักเรียนได้เรียนรู้กระบวนการในการสร้างความรู้ความเข้าใจที่ลึกซึ้ง เข้าใจมโนทัศน์ที่สำคัญอย่างชัดแจ้งและเป็นรูปธรรมทางคณิตศาสตร์ด้วยการสร้างและศึกษามโนทัศน์ด้วยตนเอง (กองวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมทหาร, 2552: 4) จึงส่งผลให้นักเรียนมีมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันสูงกว่าก่อนเรียนมาก ซึ่งสอดคล้องกับผลการวิจัยของ Almeqdadi (2000 อ้างอิงจาก วัชรสันต์ อินธิสาร, 2547: 58) ได้ศึกษาผลการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตที่มีต่อความเข้าใจมโนทัศน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนในประเทศจอร์แดน ตัวอย่างประชากรเป็นนักเรียนในโรงเรียนสาธิต ของมหาวิทยาลัยยาร์มอก พบว่าความเข้าใจทางเรขาคณิตหลังเรียนของกลุ่มทดลองสูงกว่าก่อนเรียน และกลุ่มควบคุมอย่าง
มีนัยสำคัญทางสถิติ นอกจากนี้ยังสอดคล้องกับผลการวิจัยของ วัชรสันต์ อินธิสาร (2547: 80) ได้ศึกษาผลของการพัฒนามโนทัศน์ทางเรขาคณิตของนักเรียนโดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัตพบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นที่มีผลสัมฤทธิ์ สูง ปานกลาง และต่ำ ทั้งสามกลุ่มมีมโนทัศน์ทางเรขาคณิตหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญ

3. ข้อเสนอแนะ

จากผลการวิจัยดังกล่าว ผู้วิจัยมีข้อเสนอแนะดังนี้

1. ข้อเสนอแนะสำหรับครูผู้สอน

1.1 ครูผู้สอนและผู้เกี่ยวข้องกับการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ควรจัดให้มีการนำโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต มาใช้ในการเรียนการสอน ทั้งนี้เพื่อเพิ่มศักยภาพในการเรียนรู้ของนักเรียน

1.2 สิ่งที่สำคัญของการนำโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต มาใช้ในการเรียนการสอน ครูผู้สอนควรออกแบบกิจกรรมการเรียนการสอนโดยดึงความสามารถของโปรแกรมที่มีการเคลื่อนไหว การคำนวณค่าต่าง ๆ ของฟังก์ชัน ให้เกิดประสิทธิภาพต่อการเรียนรู้ของนักเรียน เป็นสิ่งที่กระตุ้นความสนใจ ผู้เรียนเกิดความกระตือรือร้นต่อการเรียน ได้อย่างหลากหลาย

2. ข้อเสนอแนะสำหรับการวิจัยต่อไป

2.1 ศึกษาผลของการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต มาใช้ในการเรียนการสอนในสาระทางคณิตศาสตร์อื่น ๆ เช่น ลำดับและอนุกรม เมตริกซ์ เวกเตอร์ เป็นต้น

2.2 ศึกษาผลของการใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต มาใช้ในการเรียนการสอนในกลุ่มสาระอื่น ๆ เช่น วิทยาศาสตร์ ศิลปะ เป็นต้น

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กฤมพี กาสีชา (2550) “การพัฒนากิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์เรื่องวงกลม โดยใช้โปรแกรม The Geometer’s Sketchpad” วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาคณิตศาสตร์ศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยขอนแก่น

กรรณิการ ผาสุข (2549) “การเปรียบเทียบผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เรื่องการแปลงทางเราขาคณิต ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ระหว่างการเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์กับการเรียนประกอบโปรแกรม The Geometer’s Sketchpad (GSP)” วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาเทคโนโลยีการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

กองวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมทหาร (2552) *การใช้โปรแกรม The geomete’s sketchpad (GSP) เบื้องต้น* กรุงเทพมหานคร สถาบันป้องกันประเทศ กองบัญชาการกองทัพไทย

ชัยพร ขุนรามวงษ์ (2534) “การศึกษาเปรียบเทียบผลการเรียนรู้ความคิดรวบยอด โดยใช้สไลด์เทปแบบมีการสรุปเป็นตอน ๆ ด้วยภาพผสมที่มีและไม่มีตัวชี้นำ” ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ฐาปนี ตนัยอัชฌาวุฒ (2547) “การเปรียบเทียบความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์เรื่องปริมาตรและพื้นที่ผิวของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 ที่ได้รับการสอนโดยใช้สื่อประสมกับการสอนปกติ” สารนิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา) บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

ดวงเดือน พันธุมนาวิน (2531) “การวัดและการวิจัยทัศนคติที่เหมาะสมตามหลักวิชาการ” *วารสารศึกษาศาสตร์ปริทัศน์* 1,12 (มิถุนายน) : 62-68

ชมนาด เชื้อสุวรรณทวี (2542) *การสอนคณิตศาสตร์* กรุงเทพมหานคร ภาควิชาหลักสูตรและการสอน มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

ทิศนา แขมมณี (2551) *“ศาสตร์การสอน” องค์ความรู้เพื่อการจัดกระบวนการเรียนรู้ที่มีประสิทธิภาพ* กรุงเทพมหานคร สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

นงนารถ สถาวโรดม (2530) “สอนสังคมอย่างไรให้น่าสนใจ” *วารสารศาสตร์ศึกษาศาสตร์* : 1

นวลจิตต์ เชาวกีรติพงศ์ (2537) “ความคิดรวบยอดกับการเรียนการสอน” *สารพัฒนาหลักสูตร* 14 (ตุลาคม-ธันวาคม) : 55-60

บุญชม ศรีสะอาด (2537) *การพัฒนาการสอน* กรุงเทพมหานคร สุวีริยาสาส์น

บุญเสริม ฤทธาภิรมย์ (2523) "การเรียนรู้แบบสร้างความคิดรวบยอด" *ประชากรศึกษา* 31, 12 (กุมภาพันธ์) : 6-17

พนัส หันนาคินทร์ และ พิทักษ์ รักษพลเดช (2517) *"คณิตศาสตร์ตอนที่ 3" ในวิธีการสอนคณิตศาสตร์* กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์คุรุสภา

เมธี ลิมอักษร (2522) *แนวคิดในการสอนคณิตศาสตร์* สงขลา ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

รวีวรรณ ธุมชัย (ม.ป.ป.) *วิธีการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา* กรุงเทพมหานคร ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ ประสานมิตร

เรณุวัฒน์ พงษ์อุทธา (2550) "การเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์ เรื่องพาราโบลา เจตคติต่อการเรียนวิชาคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดวิเคราะห์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 ระหว่างการจัดกิจกรรมโดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad เป็นสื่อกับการจัดกิจกรรมตามปกติ" วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต สาขาวิชาการวิจัยการศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยมหาสารคาม

โรงเรียนเตรียมทหาร (2550) *หลักสูตรโรงเรียนเตรียมทหาร พุทธศักราช ๒๕๔๖ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. ๒๕๕๐)* กรุงเทพมหานคร สถาบันป้องกันประเทศ กองบัญชาการกองทัพไทย

ราชบัณฑิตยสถาน (2549) *พจนานุกรมศัพท์สังคมวิทยา อังกฤษ - ไทย ฉบับราชบัณฑิตยสถาน* พิมพ์ครั้งที่ 3 ฉบับปรับปรุง กรุงเทพมหานคร ราชบัณฑิตยสถาน

วัชรสันต์ อินธิสาร (2547) "ผลของการพัฒนามโนทัศน์ทางเรขาคณิตและเจตคติต่อการเรียนของนักเรียนระดับมัธยมศึกษาตอนต้น โดยใช้โปรแกรม The Geometer's Sketchpad" วิทยานิพนธ์ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี กระทรวงศึกษาธิการ (2548) *คู่มืออ้างอิง The Geometer's Sketchpad ซอฟท์แวร์สำรวจเชิงคณิตศาสตร์ เรขาคณิตพลวัต* กรุงเทพมหานคร สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี

สันติ อินพลนาวากุล (2550) "การพัฒนาชุดการชุดการเรียนคณิตศาสตร์แบบสืบสวนสอบสวนโดยใช้โปรแกรม GSP (The Geometer's Sketchpad) เพื่อส่งเสริมความคิดรวบยอดทางคณิตศาสตร์เรื่อง ภาคตัดกรวย ระดับมัธยมศึกษาปีที่ 4" ปริญญานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต สาขาวิชาการมัธยมศึกษา บัณฑิตวิทยาลัย มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒ

สิริพร ทิพย์คง (2544) *งานวิจัยการเรียนการสอนคณิตศาสตร์ ปีการศึกษา 2521 - 2542* กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

สุวัฒนา อุทัยรัตน์ (2545) *วิธีและเทคนิคการสอนคณิตศาสตร์เพื่อพัฒนาการคิดสำหรับครูยุคปฏิรูปการศึกษา* กรุงเทพมหานคร โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

สุรชัย ขวัญเมือง (2522) *วิธีการสอนและการวัดผลวิชาคณิตศาสตร์ในชั้นประถมศึกษา* กรุงเทพมหานคร เทพนิมิตรการพิมพ์

อรพรรณ ตันบรรจง (2529) *ปัญหาการสอนคณิตศาสตร์ระดับมัธยมศึกษา* กรุงเทพมหานคร คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเกษตรศาสตร์

อาคม จันทสุนทร (2522) "ความคิดรวบยอดและหลักการ" *ครุปริทัศน์* 4 (สิงหาคม) : 47-50

อำนาจ เชื้อบ่อคา (2547) "ผลของการใช้โปรแกรม GSP ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่องพาราโบลา ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3" วิทยานิพนธ์การศึกษามหาบัณฑิต บัณฑิตวิทยาลัย จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

Ausubel, David P. (1968). *Educational Psychology: A Cognitive View.* New York: Holt Rinehart and Winston Inc.

Almeqdadi, Farouq. (2008). "The Effect of Using the Geometer's Sketchpad (GSP) on Jordanian Students' Understanding of Geometrical Concepts" Education Resources Information Center.

Bell, F.H. (1981). *Teaching and Learning Mathematics.* Lova, Dubuque: Wm. C. Brown Company Publishers.

Bruckner, L. J. and F. E. Grossnickle. (1957). *How to Make Arithmetic Meaningful.* Philadelphia: The John C. Winston.

De Cecco, J.P. (1968). The Psychology of Learning and Instruction : Educational Psychology. New Jersey: Prentice Hall.

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือ

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญตรวจสอบเครื่องมือ

รายชื่อผู้เชี่ยวชาญในการตรวจสอบความสอดคล้องด้านเนื้อหาในแผนการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ เรื่องลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยใช้โปรแกรมเรขาคณิตพลวัต และแบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียน จำนวน 2 ฉบับที่มีลักษณะคู่ขนาน

1. พันเอก สุจริต ทวีศักดิ์	ที่ปรึกษาส่วนการศึกษา โรงเรียนเตรียมทหาร จ.นครนายก
2. นาวาอากาศตรี ทินรัตน์ กาญจนกุญชร	หัวหน้าสายวิชาคณิตศาสตร์ ชั้นปีที่ 2 โรงเตรียมทหาร จ.นครนายก
3. นายอุทัย ธวัชสิน	ครูชำนาญการ โรงเรียนสุรศักดิ์มนตรี กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

ภาคผนวก ข

แผนการจัดการเรียนรู้

แผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ 1 **ชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552**

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **คณิตศาสตร์ 6 รหัสวิชา ค 41116**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน **เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน จำนวน 1 คาบ**

สาระสำคัญ

ลิมิตของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท $\lim_{x \to a} f(x) = L$ **ก็ต่อเมื่อ** $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. เขียนสัญลักษณ์และบทนิยามลิมิตของฟังก์ชันได้
2. อธิบายบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันได้
3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตหรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้

สาระการเรียนรู้

การเข้าใกล้

ในการพิจารณาเมื่อ เข้าใกล้จำนวนจริง a ใด ๆ เราสามารถพิจารณาได้ 2 กรณี

1. เมื่อจำนวนจริง x เข้าใกล้ a โดยที่ $x < a$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^-$
2. เมื่อจำนวนจริง x เข้าใกล้ a โดยที่ $x > a$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to a^+$

ตัวอย่างที่ 1

พิจารณาการเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ค่าที่กำหนดให้ ทั้งด้านซ้ายและด้านขวา กำหนด ค่า a = -2

พิจารณาการเข้าใกล้ค่า a = -2 ทางด้านซ้าย หรือ x < -2 แทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to -2^-$

-2.41781	-2.40276	-2.26731	- 2.19437	-2.07633	-2.01675	-2.00342	-2.00048	-2.00001

พิจารณาการเข้าใกล้ค่า a = -2 ทางด้านขวา หรือ x > -2 แทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to -2^+$

-1.99999	-1.98536	-1.90032	-1.90677	-1.89053	-1.86321	-1.78569	-1.65899	-1.57881

กำหนด ค่า a = 1

พิจารณาการเข้าใกล้ค่า a = 1 ทางด้านซ้าย หรือ x < 1 แทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to 1^-$

0.85419	0.86723	0.90836	0.93871	0.94855	0.97103	0.98723	0.99032	0.999999

พิจารณาการเข้าใกล้ค่า a = 1 ทางด้านขวา หรือ x > 1 แทนด้วยสัญลักษณ์ $x \to 1^+$

1.00001	1.00389	1.10467	1.28501	1.26796	1.30254	1.37892	1.49035	1.50273

บทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน

1. สำหรับฟังก์ชัน f ใด ๆ ที่มีโดเมน และเรนจ์เป็นสับเซตของเซตของจำนวนจริง [$f: R \to R$] ถ้าค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง L_1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางซ้าย x < a เรียก L_1 ว่า ลิมิตซ้ายของ f ที่ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

2. ถ้าค่าของ f(x) เข้าใกล้จำนวนจริง L_2 ได้เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ a ทางขวา x > a เรียก L_2 ว่า ลิมิตขวาของ f ที่ a เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

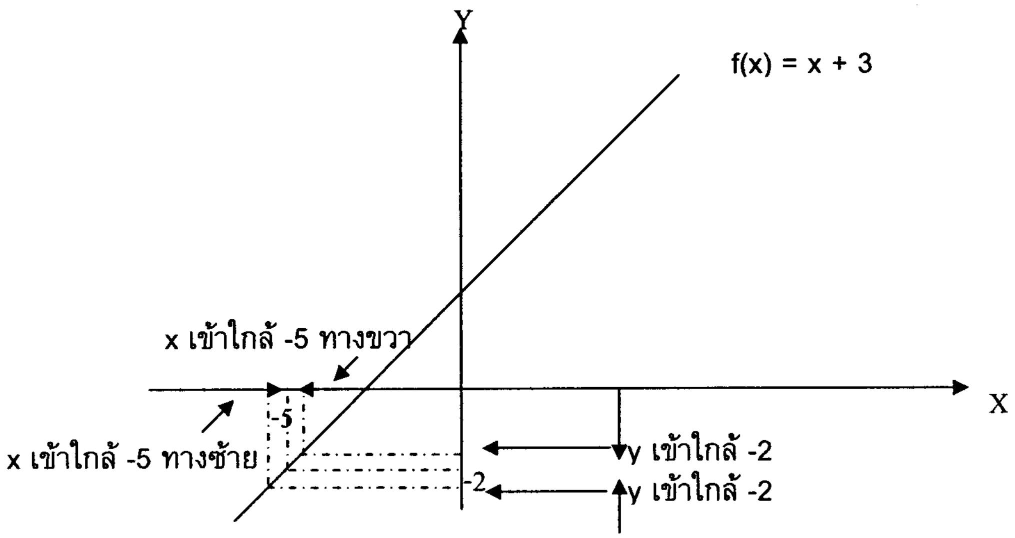
3. ถ้า $L_1 = L_2 = L$ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f มีลิมิตที่ a เท่ากับ L เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

4. ถ้า $L_1 \neq L_2$ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ a

ตัวอย่างที่ 2

พิจารณากราฟของฟังก์ชัน f(x) = x + 3



จะพบว่าจากกราฟ

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ -5 ทางซ้าย (x < -5) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ -5 ทางขวา (x > -5)

x	f(x)		x	f (x)
-10.0000	-7.0000		1.0000	4.0000
-8.0000	-5.0000		-1.0000	2.0000
-6.0000	-3.0000		-3.0000	0.0000
-5.8832	-2.8832		-4.0201	-1.0201
-5.6514	-2.6514		-4.1547	-1.1547
-5.5302	-2.5302		-4.3756	-1.3756
-5.3817	-2.3817		-4.6032	-1.6032
-5.1562	-2.1562		-4.8506	-1.8506
-5.0814	-2.0814		-4.9025	-1.9025
-5.0201	-2.0201		-4.9678	-1.9678

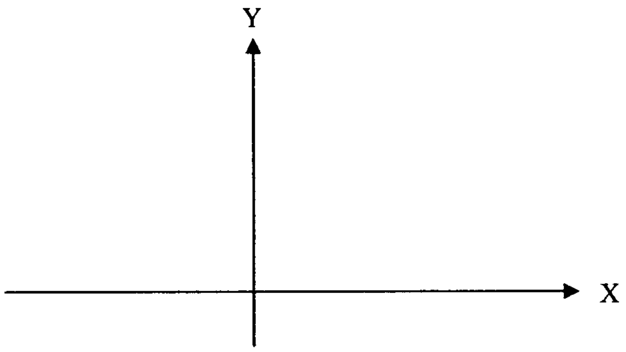
1. เมื่อ x เข้าใกล้ -5 ทางซ้าย $x \to -5^-$ ค่าของ y จะเข้าใกล้ -2
   เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to -5^-} f(x) = -2$
2. เมื่อ x เข้าใกล้ -5 ทางขวา $x \to -5^+$ ค่าของ y จะเข้าใกล้ -2
   เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim_{x \to -5^+} f(x) = -2$

ทฤษฎีบท $\lim_{x \to a} f(x) = L$ **ก็ต่อเมื่อ** $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L$

แบบฝึกหัด

1. บทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน กล่าวว่าอย่างไร
2. กำหนด f(x) = 2x จงพิจารณาค่าของ f(x) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2

พิจารณากราฟของ f(x) = 2x



ตารางที่ 1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย (x < 2)

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999	1.9999999
f(x)							

ตารางที่ 2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา (x > 2)

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001	2.0000001
f(x)							

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย

f(x) จะมีค่าเข้าใกล้....................หรือเขียนสัญลักษณ์ได้ว่า....................................

จากตารางที่ 2 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา

f(x) จะมีค่าเข้าใกล้....................หรือเขียนสัญลักษณ์ได้ว่า....................................

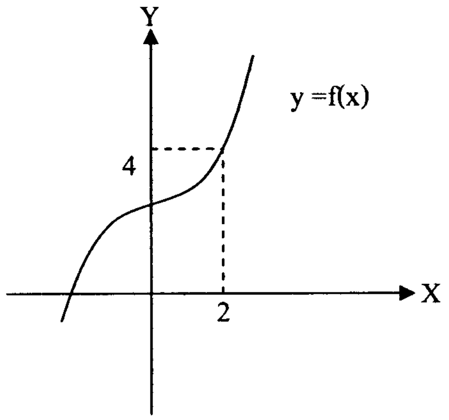
ดังนั้น ....

นั่นคือ ....

สรุปว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 แล้ว f(x) จะมีค่าเข้าใกล้............หรือเขียนสัญลักษณ์ได้ว่า..................

3. การหาลิมิตจากกราฟ

3.1

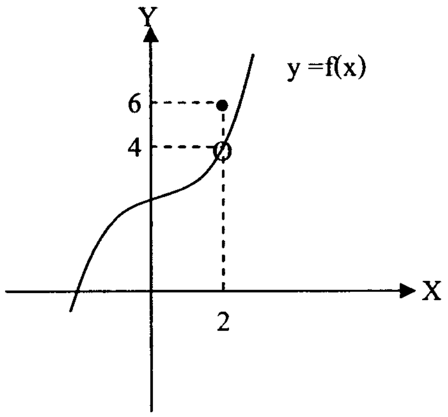


ก) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ ☐

ข) $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ ☐

ค) $\lim_{x \to 2} f(x) =$ ☐

3.2

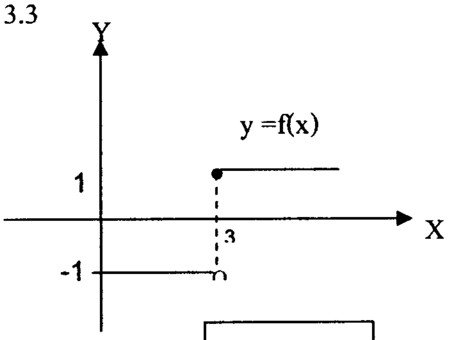


ก) $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$ ☐

ข) $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$ ☐

ค) $\lim_{x \to 2} f(x) =$ ☐

3.3

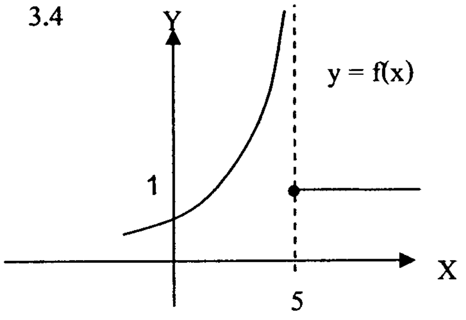


ก) $\lim_{x \to 3^-} f(x) =$ ☐

ข) $\lim_{x \to 3^+} f(x) =$ ☐

ค) $\lim_{x \to 3} f(x) =$ ☐

3.4



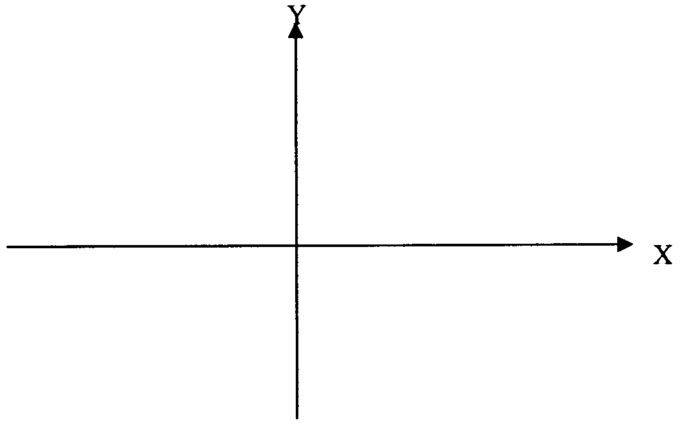
ก) $\lim_{x \to 5^-} f(x) =$ ☐

ข) $\lim_{x \to 5^+} f(x) =$ ☐

ค) $\lim_{x \to 5} f(x) =$ ☐

4. กำหนด $h(x)=\begin{cases} x+2, x\le 2 \\ x, x>2 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x\to 2} h(x)$ โดยการพิจารณาจากกราฟ

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ(โจทย์กำหนดเพียงฟังก์ชัน)



กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

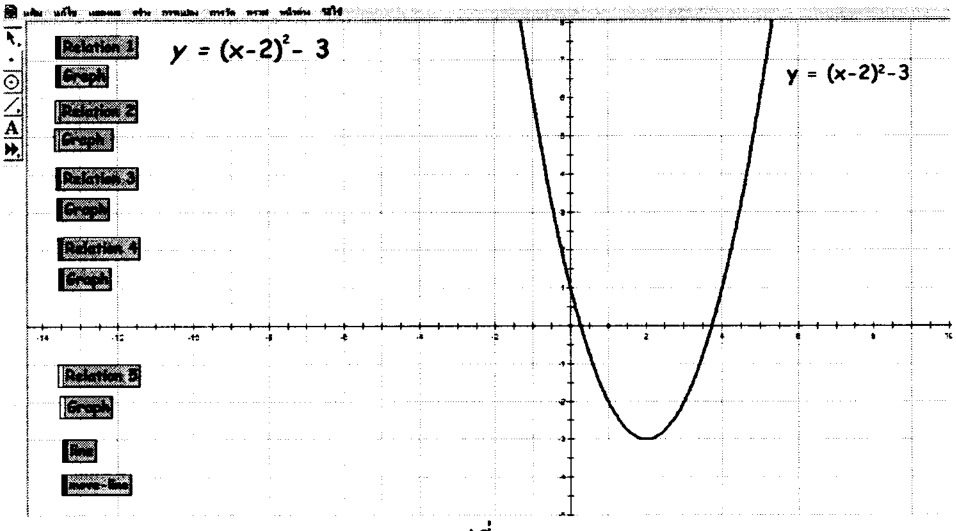
1. ครูทบทวนเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน โดยเริ่มตั้งคำถามนำดังนี้
   - ฟังก์ชัน คืออะไร , หากกล่าวถึงฟังก์ชันนักเรียนนึกถึงเรื่องใดบ้าง(โดเมน-เรนจ์ของฟังก์ชัน, สัญลักษณ์ y = f(x), การประยุกต์ฟังก์ชัน เช่น กราฟ)
   - หากมีกราฟของความสัมพันธ์แบบต่าง ๆ นักเรียนจะตรวจสอบอย่างไรว่ากราฟที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชัน

จะสุ่มถามนักเรียนที่ละคน หรืออาจมีนักเรียนแสดงความคิดเห็น โดยครูโต้ตอบกับความคิดเห็นของนักเรียน และ พยายามดึงความคิดของนักเรียนสู่เรื่องที่ต้องการ นั่นคือการตรวจสอบกราฟของความสัมพันธ์ใดเป็นฟังก์ชันด้วยการลากเส้นตรงขนานแกน Y ต้องตัดกราฟเพียงแค่จุดเดียวเท่านั้น

2. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – function หน้าเอกสาร “1” ตามรูปที่ 1 ดังนี้
   - ครูแสดงสมการความสัมพันธ์ f(x) โดย กดปุ่ม Relation 1 แล้วให้นักเรียนพิจารณาถึงลักษณะกราฟของความสัมพันธ์ดังกล่าว ครูแสดงกราฟของความสัมพันธ์ และ ถามว่า ความสัมพันธ์ดังกล่าวเป็นฟังก์ชันหรือไม่
   - ครูแสดงคำตอบ ซึ่งให้นักเรียนพิจารณาเองว่าเป็นฟังก์ชันหรือไม่ โดยแสดงเส้นตรงขนานแกน Y โดย กดปุ่ม line และปุ่ม move-line

- ครูเปลี่ยนสมการความสัมพันธ์ Relation 2, Relation 3, Relation 4 และ Relation 5 ตามลำดับ และดำเนินกิจกรรมตามลำดับดังที่กล่าวมา

3. นักเรียนบันทึกความเข้าใจในมโนทัศน์ที่เกี่ยวกับเรื่องความสัมพันธ์และฟังก์ชัน



รูปที่ 1

ขั้นสอน

1. ครูอธิบาย เรื่องการเข้าใกล้ค่าใดค่าหนึ่ง เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ค่าที่กำหนดให้ ทั้งด้านซ้ายและด้านขวา โดยครูแสดงสื่อสาธิตโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – function หน้าเอกสาร "x เข้าใกล้ a" ตามรูปที่ 2 ดังนี้

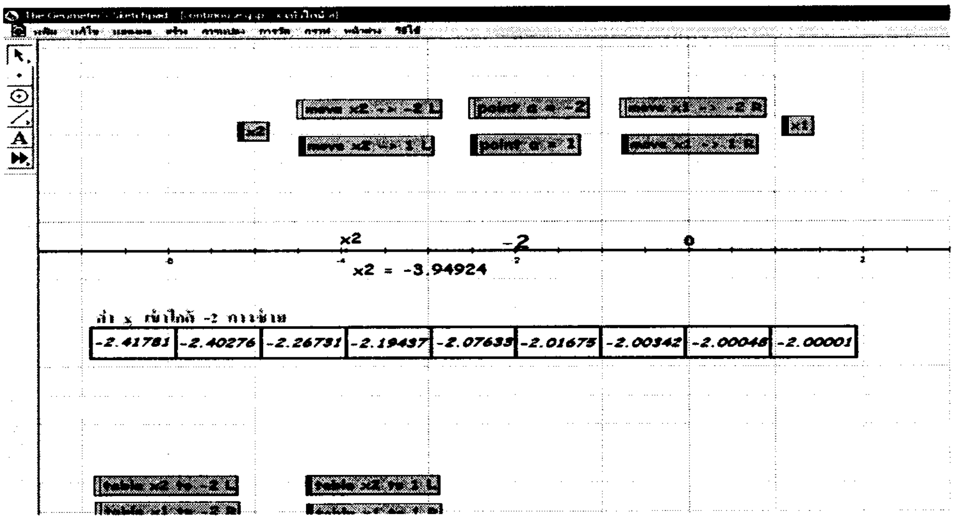
- ให้นักเรียนศึกษาการเข้าใกล้ ค่าใดค่าหนึ่ง กำหนด a = -2 เพื่อเข้าใจการเปลี่ยนแปลงค่า x โดยพิจารณาการเข้าใกล้ค่าที่กำหนดให้ทางด้านซ้าย จะกำหนดค่า a = -2 และ x2 โดยกดปุ่ม point a = -2 และ x2 ตามลำดับ ให้นักเรียนสังเกตค่าที่เปลี่ยนแปลงของ x2 เมื่อกดปุ่ม move x2 → −2 L
- ให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็นค่า x2 ที่สังเกตได้ (เช่น ค่า x2 ต่าง ๆ เป็นจำนวนที่น้อยกว่าจำนวนที่กำหนดให้ (a = -2) และเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ จนเข้าใกล้ค่า -2) จากนั้นครูแสดงตารางการเปลี่ยนแปลงค่า x เข้าใกล้ -2 ทางซ้าย เพื่อให้นักเรียนเกิดข้อสังเกตมากยิ่งขึ้น โดยกดปุ่ม table x2 to -2 L
- ให้นักเรียนศึกษาการเข้าใกล้ ค่าใดค่าหนึ่ง(ค่า a = -2) เพื่อเข้าใจการเปลี่ยนแปลงค่า x โดยพิจารณาการเข้าใกล้ค่าที่กำหนดให้ทางด้านขวา จะกำหนดค่า x1 โดยกดปุ่ม x1 และให้นักเรียนสังเกตค่าที่เปลี่ยนแปลงของ x1 เมื่อกดปุ่ม move x1 → −2R

- ให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็นค่า x1 ที่สังเกตได้ (เช่น ค่า x1 ต่าง ๆ เป็นจำนวนที่มากกว่าจำนวนที่กำหนดให้ (a = -2) และลดลงเรื่อย ๆ จนเข้าใกล้ค่า -2) จากนั้นครูแสดงตารางการเปลี่ยนแปลงค่า x เข้าใกล้ -2 ทางขวา เพื่อให้นักเรียนเกิดข้อสังเกตมากยิ่งขึ้น โดยกดปุ่ม table x1 to -2 R
- ครูกำหนดค่าใหม่ โดยกดปุ่ม a = 1 point a= 1 และทำตามลำดับขั้นตอนดังที่กล่าวมา

2. นักเรียนช่วยกันอภิปรายและรวบรวมความรู้ที่ได้เรียนมาดังนี้

สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ เมื่อจำนวนจริง x เข้าใกล้ a โดยที่ x < a จะกล่าวว่า x เข้าใกล้ a ทางด้ายซ้าย โดยครูเขียนสัญลักษณ์ $x \to a^-$ และเขียนสัญลักษณ์จากตัวอย่างดังนี้ $x \to -2^-$ และ $x \to 1^-$ ตามลำดับ พร้อมทั้งให้นักเรียนดูรูปจากโปรแกรมประกอบอีกครั้ง

สำหรับจำนวนจริง a ใด ๆ เมื่อจำนวนจริง x เข้าใกล้ a โดยที่ x > a จะกล่าวว่า x เข้าใกล้ a ทางด้ายขวา โดยครูเขียนสัญลักษณ์ $x \to a^+$ และเขียนสัญลักษณ์จากตัวอย่างดังนี้ $x \to -2^+$ และ $x \to 1^+$ ตามลำดับ พร้อมทั้งให้นักเรียนดูรูปจากโปรแกรมประกอบอีกครั้ง



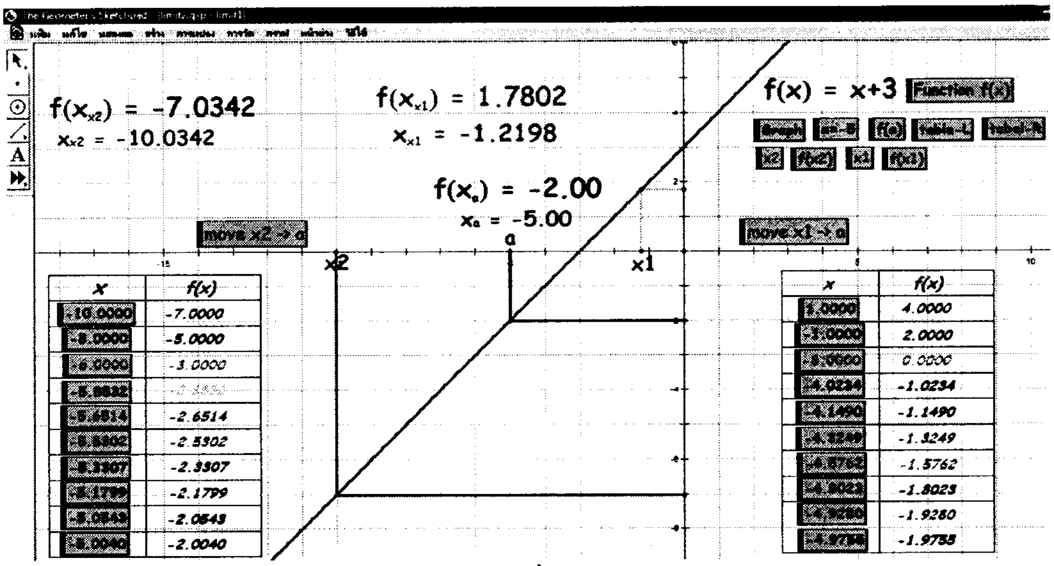
รูปที่ 2

3. ครูให้บทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน จากนั้นจึงยกตัวอย่างฟังก์ชัน f(x) = x + 3 แสดงโดยโปรแกรมเรขาคณิตพลวัตชื่อ file – limit1 เอกสาร “limit1.1” ตามรูปที่ 3 ดังนี้

- ครูกำหนดฟังก์ชัน f(x) = x + 3 โดยกดปุ่ม Function f(x) ให้นักเรียนพิจารณากราฟมีลักษณะอย่างไร ครูแสดงกราฟโดยกดปุ่ม Graph พร้อมทั้งกำหนดจุด

a = -5 ให้นักเรียนพิจารณาค่าของฟังก์ชันที่ x = -5 และกดปุ่ม a = -5 และ f(-5) ตามลำดับ

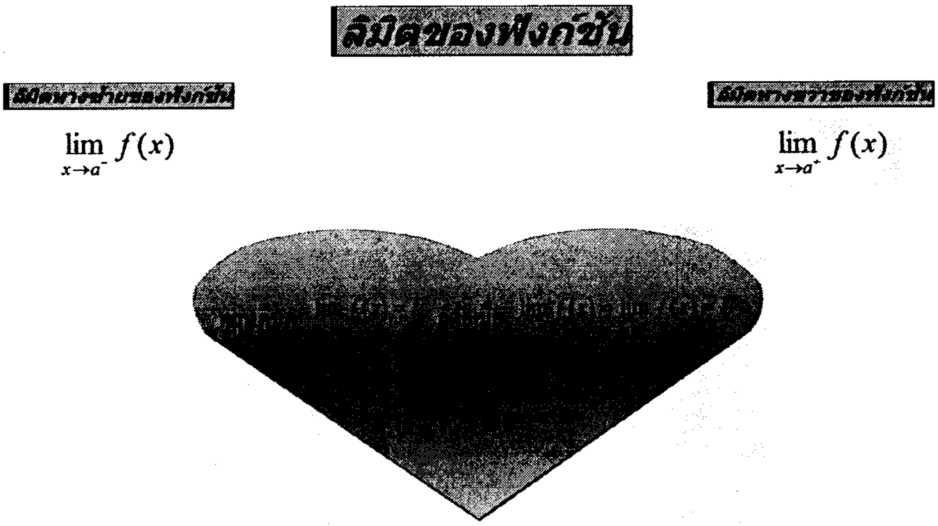
- ให้นักเรียนพิจารณา เมื่อ x เข้าใกล้ -5 ทางซ้าย โดยครูกดปุ่ม table-L, x2 และ f(x2) ตามลำดับ เรียกนักเรียนตอบค่าของฟังก์ชันที่ค่า x ต่าง ๆ ตามตาราง พร้อมทั้งเฉลยค่าโดยการกดปุ่มค่า x ต่าง ๆ เพื่อแสดงคำตอบ และการเข้าใกล้ เมื่อ x เข้าใกล้ -5 ทางซ้าย โดยการกดปุ่ม move x2 to a
- ให้นักเรียนพิจารณา เมื่อ x เข้าใกล้ -5 ทางขวา โดยครูกดปุ่ม table-R, x1 และ f(x1) ตามลำดับ เรียกนักเรียนตอบค่าของฟังก์ชันที่ค่า x ต่าง ๆ ตามตาราง พร้อมทั้งเฉลยค่าโดยการกดปุ่มค่า x ต่าง ๆ เพื่อแสดงคำตอบ และการเข้าใกล้ เมื่อ x เข้าใกล้ -5 ทางขวา โดยการกดปุ่ม move x1 to a



รูปที่ 3

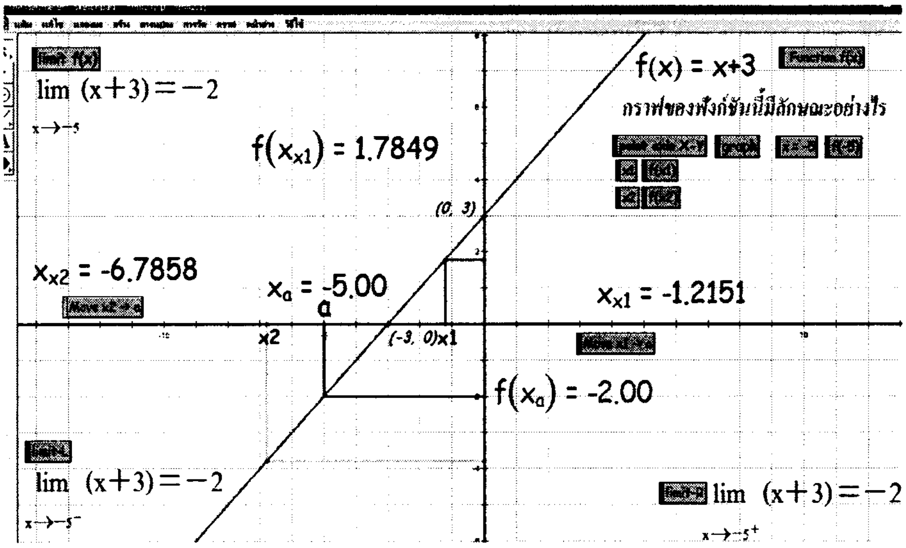
4. ครูแสดงบทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน โดยแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file-limit1 เอกสาร “def-limit” ตามรูปที่ 4 ดังนี้

- ครูอธิบายความหมายของลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน และแสดงสัญลักษณ์โดยการกดปุ่ม ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน
- ครูอธิบายความหมายของลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน และแสดงสัญลักษณ์โดยการกดปุ่ม ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน
- ครูอธิบายความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน และแสดงบทนิยามโดยการ กดปุ่ม ลิมิตของฟังก์ชัน



รูปที่ 4

5. ครูแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – limit1 เอกสาร “limit2.1” ตามรูปที่ 5 ดังนี้
   - ครูกำหนดฟังก์ชัน f(x) = x + 3 โดยกดปุ่ม Function f(x) ครูแสดงกราฟโดยกดปุ่ม Graph พร้อมทั้งกำหนดจุด a = -5 โดยกดปุ่ม a = -5 และ f(-5) ตามลำดับ
   - ให้นักเรียนพิจารณา เมื่อ x เข้าใกล้ -5 ทางซ้าย โดยครูกดปุ่ม move x2 to a พร้อมสุ่มนักเรียนเขียนสัญลักษณ์ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน และมีลิมิตเป็นเท่าไร
   - ให้นักเรียนพิจารณา เมื่อ x เข้าใกล้ -5 ทางขวา โดยครูกดปุ่ม move x1 to a พร้อมสุ่มนักเรียนเขียนสัญลักษณ์ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน และมีลิมิตเป็นเท่าไร
   - สุ่มนักเรียนสรุปค่าลิมิตทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชัน และมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงให้นักเรียนสรุปค่าลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ -5



รูปที่ 5

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปทบทวนความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน ตามทฤษฎีบท โดยครูแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ดังรูปที่ 4

ทฤษฎีบท $\lim_{x\to a} f(x) = L$ **ก็ต่อเมื่อ** $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

สื่อการเรียนรู้

1. สื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต
2. ใบกิจกรรมที่ 1

การวัดและการประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามในชั้นเรียนได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำใบกิจกรรมที่ครูมอบหมายได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรมในห้องเรียน

ใบกิจกรรมที่ 1

1. บทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน กล่าวว่าอย่างไร

....

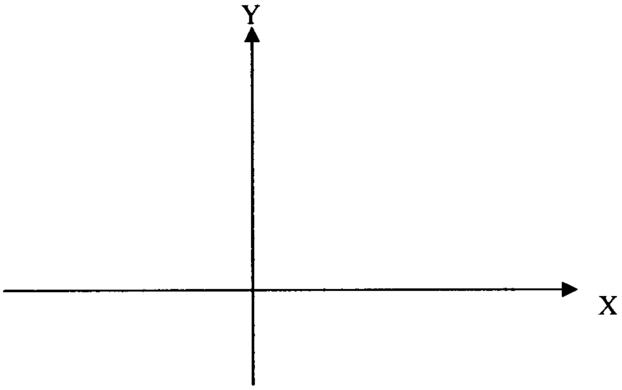
....

....

....

2. กำหนด f(x) = 2x จงพิจารณาค่าของ f(x) เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 (โจทย์กำหนดเพียงฟังก์ชัน)

พิจารณากราฟของ f(x) = 2x



ตารางที่ 1 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย (x < 2)

x	1.9	1.99	1.999	1.9999	1.99999	1.999999	1.9999999
f(x)							

ตารางที่ 2 เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา (x > 2)

x	2.1	2.01	2.001	2.0001	2.00001	2.000001	2.0000001
f(x)							

จากตารางที่ 1 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางซ้าย

f(x) จะมีค่าเข้าใกล้...................หรือเขียนสัญลักษณ์ได้ว่า....................................

จากตารางที่ 2 จะเห็นว่า เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 ทางขวา

f(x) จะมีค่าเข้าใกล้...................หรือเขียนสัญลักษณ์ได้ว่า....................................

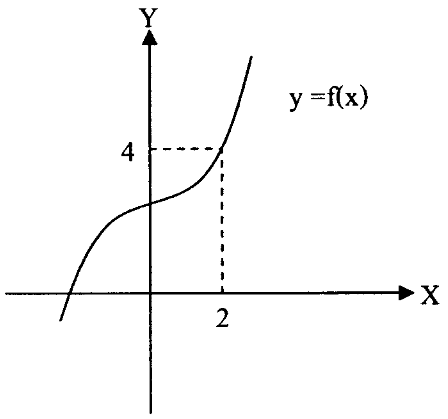
ดังนั้น..

นั่นคือ..

สรุปว่าเมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 2 แล้ว f(x) จะมีค่าเข้าใกล้............หรือเขียนสัญลักษณ์ได้ว่า................

3. การหาลิมิตจากกราฟ จงเติมคำตอบต่อไปนี้

3.1

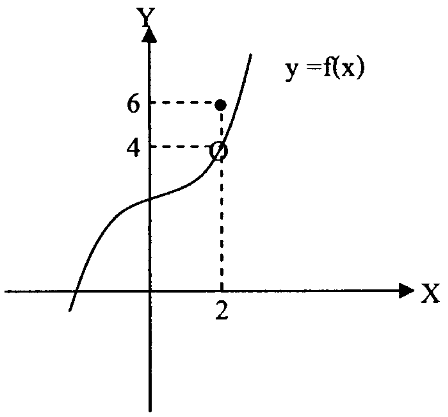


ก) $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ ☐

ข) $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ ☐

ค) $\lim_{x\to 2} f(x) =$ ☐

3.2

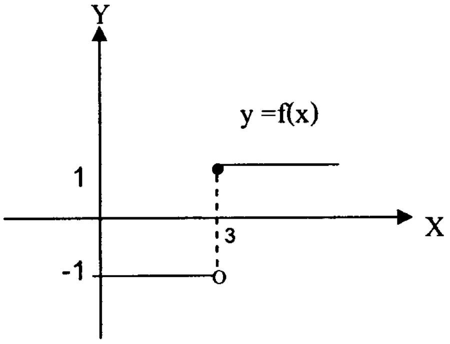


ก) $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$ ☐

ข) $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$ ☐

ค) $\lim_{x\to 2} f(x) =$ ☐

3.3

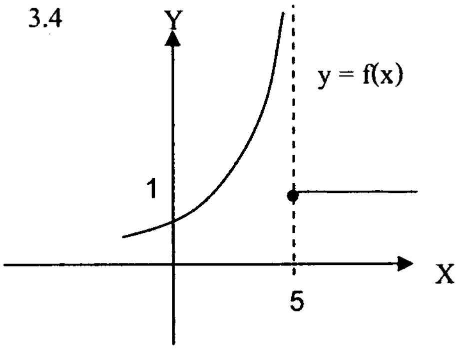


ก) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) =$ ☐

ข) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) =$ ☐

ค) $\lim\limits_{x\to 3} f(x) =$ ☐

3.4



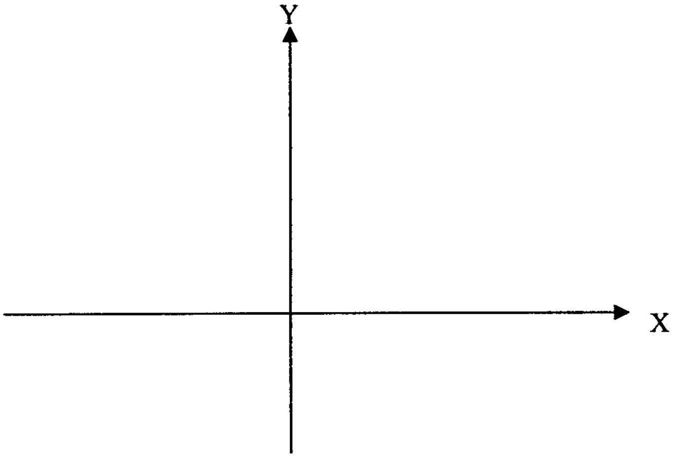
ก) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) =$ ☐

ข) $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) =$ ☐

ค) $\lim\limits_{x\to 5} f(x) =$ ☐

4. กำหนด $h(x) = \begin{cases} x+2, x \le 2 \\ x, x > 2 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 2} h(x)$ โดยการพิจารณาจากกราฟ

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ(โจทย์กำหนดเพียงฟังก์ชัน)



แผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ 2 **ชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552**

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **คณิตศาสตร์ 6 รหัสวิชา ค 41116**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน **เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน จำนวน 1 คาบ**

สาระสำคัญ

ลิมิตของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ **ก็ต่อเมื่อ** $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

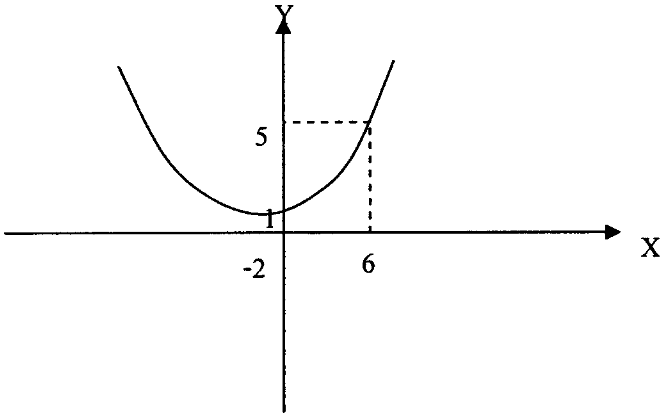
จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. เขียนสัญลักษณ์และบทนิยามลิมิตของฟังก์ชันได้
2. อธิบายบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันได้
3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตหรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้

สาระการเรียนรู้

ตัวอย่างที่ 3 กำหนด $f(x) = \dfrac{(x+2)^2}{16} + 1$ จงหา $\lim\limits_{x\to 6} f(x)$ โดยการพิจารณาจากกราฟ

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ(โจทย์กำหนดเพียงฟังก์ชัน)



จะเห็นว่า

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 6 ทางซ้าย จะได้ $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^-} \dfrac{(x+2)^2}{16} + 1 = 5$

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ 6 ทางขวา จะได้ $\lim\limits_{x\to 6^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 6^+} \dfrac{(x+2)^2}{16} + 1 = 5$

เพราะฉะนั้น

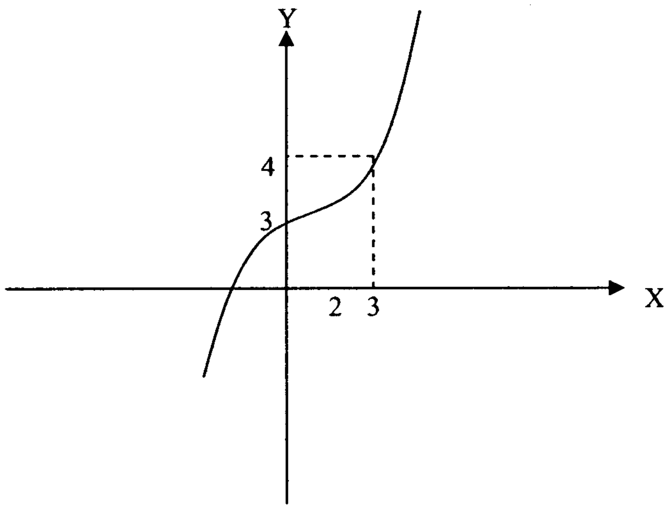
$$\lim_{x\to 6^-} f(x) = \lim_{x\to 6^+} f(x) = 5$$

ดังนั้น

$$\lim_{x\to 6} f(x) = 5$$

ตัวอย่างที่ 4 กำหนด $f(x) = (x-2)^3 + 3$ จงหา $\lim_{x\to 3} f(x)$ และ $f(3)$ โดยการพิจารณาจากกราฟ (โจทย์กำหนดเพียงฟังก์ชัน)

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ

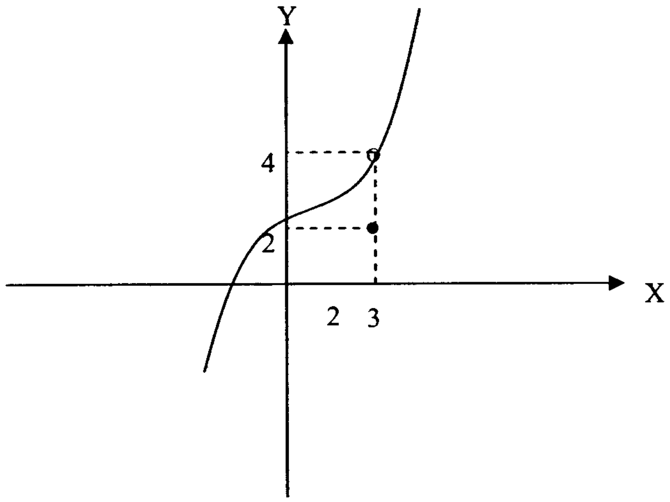


จะเห็นว่า

1. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} [(x-2)^3 + 3] = 4$
2. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} [(x-2)^3 + 3] = 4$
3. $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$
4. $f(3) = 4$

ตัวอย่างที่ 5 กำหนด $f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 + 3 & ; \quad x \neq 3 \\ 2 & ; \quad x = 3 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x\to 3} f(x)$ และ $f(3)$ โดยการพิจารณาจากกราฟ (โจทย์กำหนดเพียงฟังก์ชัน)

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ



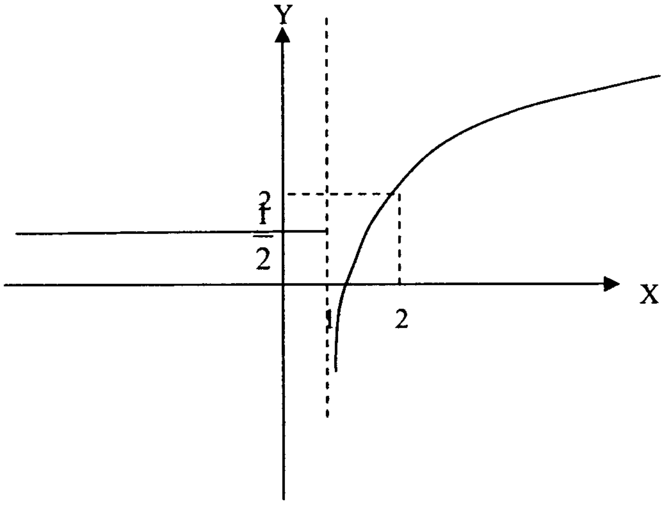
จะเห็นว่า

1. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-}[(x-2)^3+3] = 4$
2. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+}[(x-2)^3+3] = 4$
3. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$
4. $f(3) = 2$

ตัวอย่างที่ 6 กำหนด $f(x)=\begin{cases}\log(x-1)+2 & ; \quad x>1 \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x\le 1\end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ และ $f(1)$

โดยการพิจารณาจากกราฟ(โจทย์กำหนดเพียงฟังก์ชัน)

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ

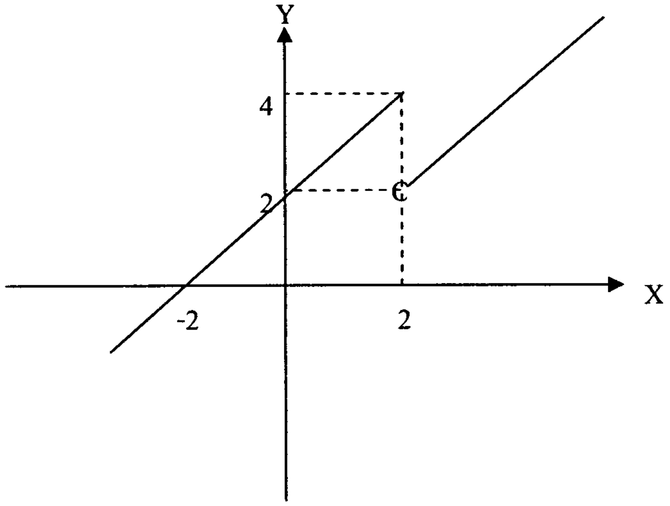


จะเห็นว่า

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}[\log(x-1)+2]$ ซึ่งหาค่าไม่ได้
3. $f(x)$ ไม่มีลิมิตที่ 1
4. $f(1) = \dfrac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 7 กำหนด $f(x)=\begin{cases} x+2 & ; \quad x \le 2 \\ x & ; \quad x > 2 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x\to 2} f(x)$ และ $f(2)$ โดยการพิจารณาจากกราฟ (โจทย์กำหนดเพียงฟังก์ชัน)

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ

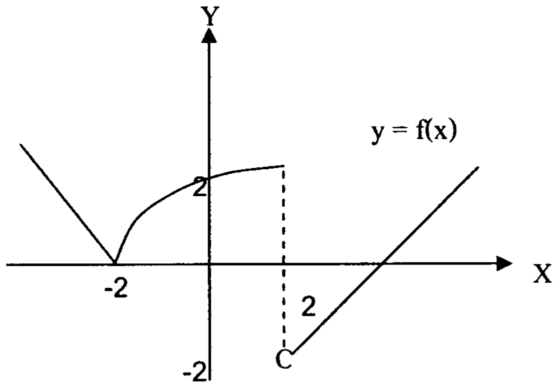


จะเห็นว่า

1. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x+2) = 4$
2. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2$
3. $f(x)$ ไม่มีลิมิตที่ 2
4. $f(2) = 4$

แบบฝึกหัด

1. จากกราฟของฟังก์ชัน f จงหา



1.1 $\lim_{x\to 2^-} f(x) =$

1.2 $\lim_{x\to 2^+} f(x) =$

1.3 $\lim_{x\to 2} f(x) =$

1.4 $\lim_{x\to -2^-} f(x) =$

1.5 $\lim_{x\to -2^+} f(x) =$

1.6 $\lim_{x\to -2} f(x) =$

2. กำหนด $g(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ จงหา $\lim_{x\to -1} g(x)$ พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชัน

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x+2; x<2\\ x+4; x\geq 2\end{cases}$ จงหา

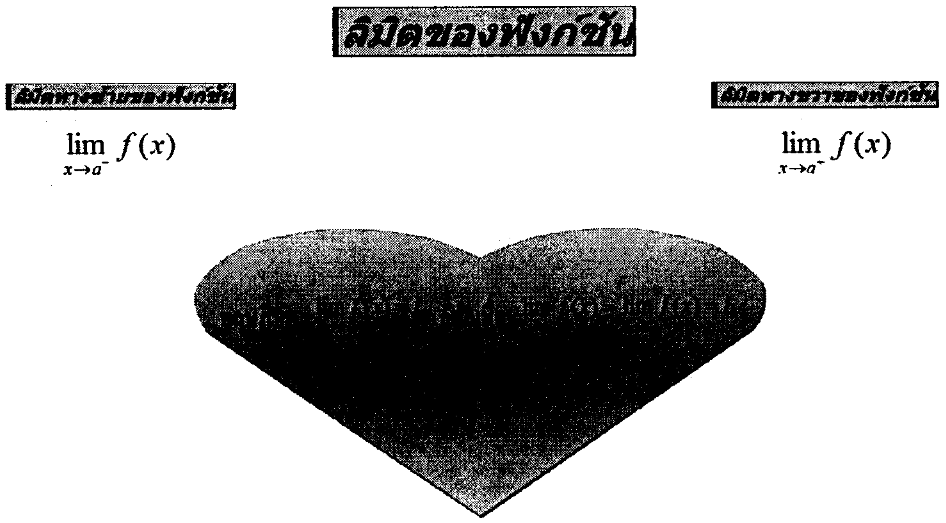
3.1 $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 3.2 $f(2)$ 3.3 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชัน

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนบทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน โดยแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file-limit1 เอกสาร "def-limit" ตามรูปที่ 6 ดังนี้
    - สุ่มนักเรียนอธิบายความหมายของลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน ครูแสดงสัญลักษณ์ โดยการ กดปุ่ม ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน
    - สุ่มนักเรียนอธิบายความหมายของลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน ครูแสดงสัญลักษณ์ โดยการ กดปุ่ม ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน
    - นักเรียนช่วยกันอธิบายความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน และครูแสดงบทนิยาม โดยการ กดปุ่ม ลิมิตของฟังก์ชัน

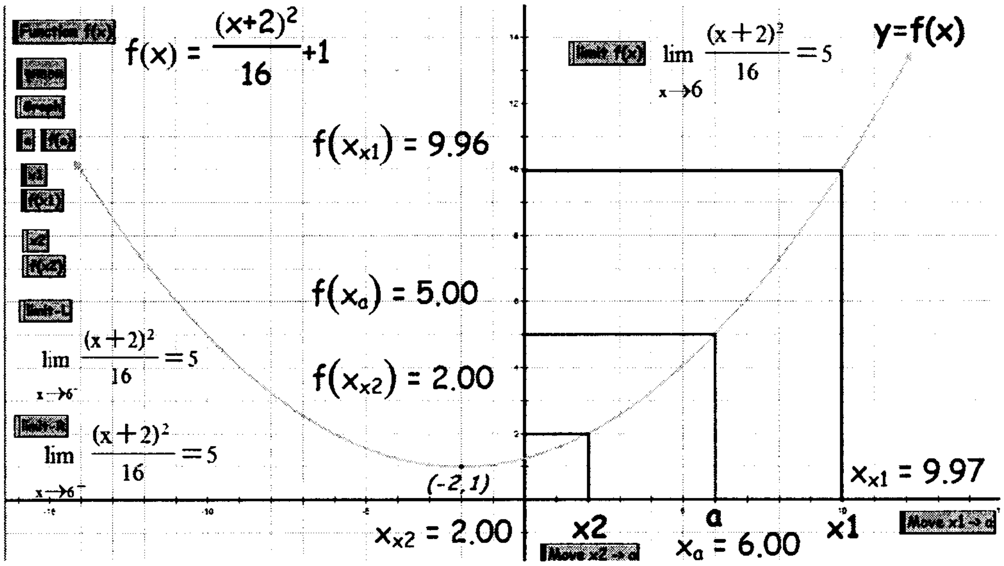


รูปที่ 6

ขั้นสอน

1. ครูสอนลิมิตของฟังก์ชัน โดยการยกตัวอย่างที่ 3 พร้อมวาดกราฟ และถามหาค่าลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ 6

- ครูยกตัวอย่างที่ 3 จากการแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – limit1 เอกสาร "limit1.3" ตามรูปที่ 7 ดังนี้
- ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{(x+2)^2}{16}+1$ โดยกดปุ่ม Function f(x) ครูตั้งคำถามให้กับนักเรียนว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลักษณะกราฟเป็นอย่างไร รอฟังนักเรียนแสดงความคิดเห็น หากมีนักเรียนคนใดตอบว่าเป็นรูปพาราโบลา ครูถามต่อเพื่อให้ได้ลักษณะของกราฟพาราโบลาที่ชัดเจนยิ่งขึ้น เช่น กราฟพาราโบลามีลักษณะหงายหรือคว่ำ และมีจุดยอดอยู่ที่ใด เป็นต้น
- ครูอธิบายลักษณะกราฟของฟังก์ชันให้ชัดเจนมากยิ่งขึ้น ซึ่งกราฟเป็นรูปพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ (-2, 1) แสดงโดยการกดปุ่ม จุดยอด และแสดงกราฟโดยการกดปุ่ม Graph พร้อมทั้งกำหนดจุด a = 6 โดยกดปุ่ม a = 6 ให้นักเรียนตอบค่าของ f(6) ก่อน ครูจึงกดปุ่ม f(6) ตามลำดับ
- ให้นักเรียนพิจารณา เมื่อ x เข้าใกล้ 6 ทางซ้าย โดยครูกดปุ่ม x2 และ f(x2) ตามลำดับ พร้อมสุ่มนักเรียนตอบค่าลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชันเป็นเท่าไร ซึ่งครูแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม Move x2 to a และแสดงสัญลักษณ์ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม Limit-L
- ให้นักเรียนพิจารณา เมื่อ x เข้าใกล้ 6 ทางขวา โดยครูกดปุ่ม x1 และ f(x1) ตามลำดับ พร้อมสุ่มนักเรียนตอบค่าลิมิตทางขวาของฟังก์ชันเป็นเท่าไร ซึ่งครูแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม Move x1 to a และแสดงสัญลักษณ์ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม Limit-R
- สุ่มนักเรียนอภิปรายค่าลิมิตทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชัน และมีค่าเท่ากันหรือไม่ จึงให้นักเรียนพิจารณาเพื่อตอบค่าลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 6 และครูแสดงสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม limit f(x)



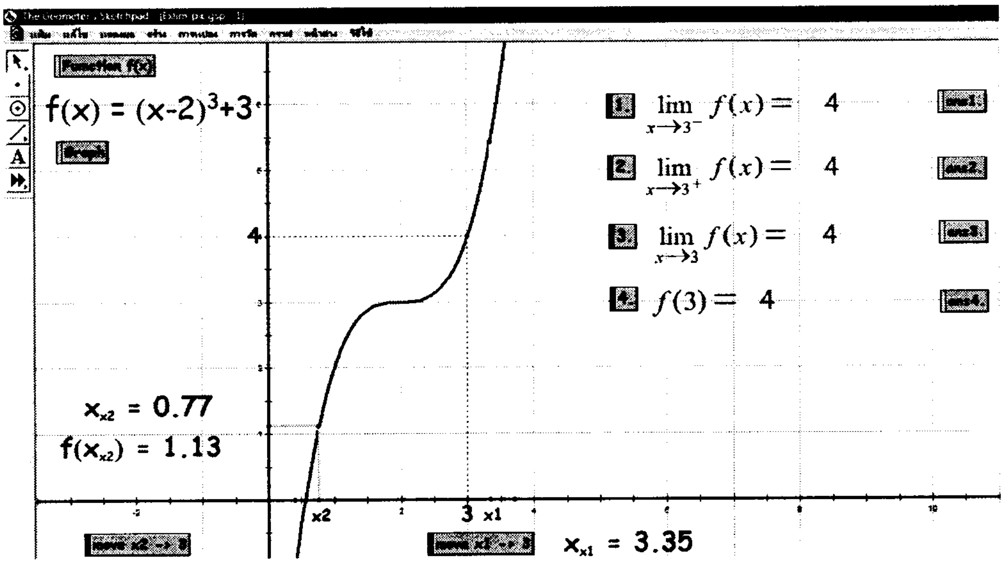
รูปที่ 7

2. ครูสอนลิมิตของฟังก์ชันเพื่อเน้นย้ำมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตของฟังก์ชันมากยิ่งขึ้น โดยการยกตัวอย่างที่ 4 พร้อมวาดกราฟ และถามหาค่าลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ 3

- ครูยกตัวอย่างที่ 4 จากการแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic เอกสาร “1” ตามรูปที่ 8 ดังนี้
- ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = (x-2)^3 + 3$ โดยกดปุ่ม Function f(x) ครูตั้งคำถามให้กับนักเรียนว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลักษณะกราฟเป็นอย่างไร รอฟังนักเรียนแสดงความคิดเห็น
- ครูแสดงกราฟโดยการกดปุ่ม Graph ซึ่งจะแสดงกราฟของฟังก์ชัน จุด x = 3 และค่า f(3) โดยมีเส้นประเชื่อมโยงอย่างชัดเจน
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 1. เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางซ้าย โดยครูกดปุ่ม 1. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน พร้อมสุ่มนักเรียนตอบค่าลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชันเป็นเท่าไร ซึ่งครูแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม x2 , f(x2) และ Move x2 to 3 และแสดงคำตอบลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม ans1.
- ครูเขียนสัญลักษณ์ ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางซ้าย พร้อมทั้งให้นักเรียนสังเกตด้วย
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 2. เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางขวา โดยครูกดปุ่ม 2. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน พร้อมสุ่มนักเรียนตอบค่าลิมิตทางขวา

ของฟังก์ชันเป็นเท่าไร ซึ่งครูแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม x1 , f(x1) และ Move x1 to 3 และแสดงคำตอบลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม ans2.

- ครูเขียนสัญลักษณ์ ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางขวา พร้อมทั้งให้นักเรียนสังเกตด้วย
- เพื่อให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 3. ค่าลิมิตทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชันมีค่าเท่ากันหรือไม่ โดยครูกดปุ่ม 3. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 3 และสุ่มให้นักเรียนตอบ และแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม ans3.
- ครูเขียนสัญลักษณ์ ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 3 พร้อมทั้งให้นักเรียนสังเกตด้วย
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 4. เพื่อหาค่า f(3) โดยการกดปม 4. พร้อมทั้งสุ่มนักเรียนเพื่อตอบคำถาม และแสดงคำตอบ โดยครูกดปุ่ม ans4.
- ครูตั้งคำถามนักเรียนว่า ค่าของ $\lim_{x\to 3} f(x)$ และ $f(3)$ มีค่าเท่ากันหรือไม่ พร้อมทั้งสุ่มให้นักเรียนพิจารณาและตอบคำถาม



รูปที่ 8

3. ครูสอนลิมิตของฟังก์ชันเพื่อเน้นย้ำมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตของฟังก์ชันมากยิ่งขึ้น โดยการยกตัวอย่างที่ 5 พร้อมวาดกราฟ และถามหาค่าลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ 3

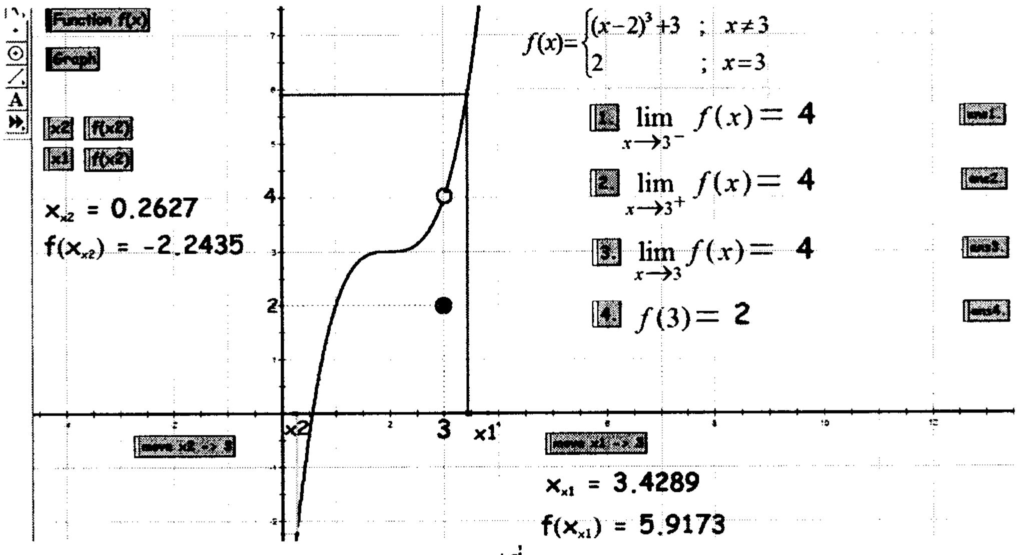
- ครูยกตัวอย่างที่ 5 จากการแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic เอกสาร “Exlim-pic2” ตามรูปที่ 9 ดังนี้

- ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}(x-2)^3+3 & ; \quad x\neq 3\\ 2 & ; \quad x=3\end{cases}$ โดยกดปุ่ม Function f(x) ครูตั้งคำถามให้กับนักเรียนว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลักษณะกราฟเป็นอย่างไร รอฟังนักเรียนแสดงความคิดเห็น
- ครูแสดงกราฟโดยการกดปุ่ม Graph ซึ่งจะแสดงกราฟของฟังก์ชัน จุด x = 3 และค่า f(3) โดยมีเส้นประเชื่อมโยงอย่างชัดเจน
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 1. เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางซ้าย โดยครูกดปุ่ม 1. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน พร้อมสุ่มนักเรียนตอบค่าลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชันเป็นเท่าไร รวมทั้งให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นว่าจะเลือกฟังก์ชันกรณีใดระหว่าง $x\neq 3$ กับ x = 3
- ครูเน้นย้ำลิมิตของฟังก์ชัน เป็นการพิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a อีกครั้ง ซึ่งแตกต่างจากค่าของฟังก์ชันที่ x = a
- ครูเขียนสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชันทางซ้ายบนกระดานดังนี้

  $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}[(x-2)^3+3]$ จากนั้นครูแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม x2 , f(x2) และ Move x2 to 3 และแสดงคำตอบลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม ans1.
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 2. เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางขวา โดยครูกดปุ่ม 2. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน พร้อมสุ่มนักเรียนตอบค่าลิมิตทางขวาของฟังก์ชันเป็นเท่าไร รวมทั้งให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นว่าจะเลือกฟังก์ชันกรณีใดระหว่าง $x\neq 3$ กับ x = 3
- ครูเน้นย้ำลิมิตของฟังก์ชัน เป็นการพิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a อีกครั้ง ซึ่งแตกต่างจากค่าของฟังก์ชันที่ x = a
- ครูเขียนสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชันทางขวาบนกระดานดังนี้

  $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}[(x-2)^3+3]$ จากนั้นครูแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม x1 , f(x1) และ Move x1 to 3 และแสดงคำตอบลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม ans2.
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 3. ค่าลิมิตทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชันมีค่าเท่ากันหรือไม่ โดยครูกดปุ่ม 3. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 3 และสุ่มให้นักเรียนตอบ และแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม ans3.

- ครูเขียนสัญลักษณ์ ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 3 พร้อมทั้งให้นักเรียนสังเกตด้วย
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 4. เพื่อหาค่า f(3) โดยการกดปุ่ม 4. พร้อมทั้งสุ่มนักเรียนเพื่อตอบคำถาม และแสดงคำตอบ โดยครูกดปุ่ม ans4.
- ครูตั้งคำถามนักเรียนว่า ค่าของ $\lim_{x \to 3} f(x)$ และ $f(3)$ มีค่าเท่ากันหรือไม่ พร้อมทั้งสุ่มให้นักเรียนตอบคำถาม



รูปที่ 9

4. ให้นักเรียนพิจารณาว่า ระหว่างค่า $\lim_{x \to a} f(x)$ และ $f(a)$ มีความแตกต่างกันหรือไม่ สุ่มนักเรียนแสดงความคิดเห็น 2 – 3 คน

5. ครูสอนลิมิตของฟังก์ชันเพื่อเน้นย้ำมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตของฟังก์ชันมากยิ่งขึ้น โดยการยกตัวอย่างที่ 6 พร้อมวาดกราฟ และถามหาค่าลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ 1

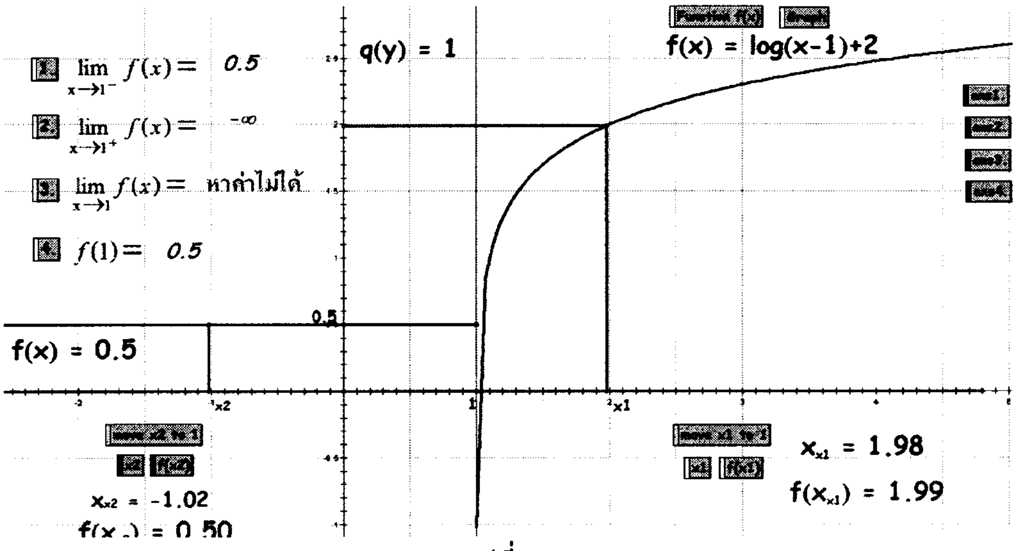
- ครูยกตัวอย่างที่ 6 จากการแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic เอกสาร “Exlim-pic3” ตามรูปที่ 10 ดังนี้
- ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\log(x-1)+2 & ; \quad x>1\\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x\leq 1\end{cases}$ โดยกดปุ่ม Function f(x)

  ครูตั้งคำถามให้กับนักเรียนว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลักษณะกราฟเป็นอย่างไร รอฟังนักเรียนแสดงความคิดเห็น
- ครูแสดงกราฟโดยการกดปุ่ม Graph ซึ่งจะแสดงกราฟของฟังก์ชัน จุด x = 1 และค่า f(1) อย่างชัดเจน

- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 1. เมื่อ x เข้าใกล้ 1 ทางซ้าย โดยครูกดปุ่ม 1. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน พร้อมสุ่มนักเรียนตอบค่าลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชันเป็นเท่าไร รวมทั้งให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นว่าจะเลือกฟังก์ชันกรณีใดระหว่าง $x > 1$ กับ $x \leq 1$
- ครูเน้นย้ำลิมิตของฟังก์ชัน เป็นการพิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย และ x เข้าใกล้ a ทางขวาอีกครั้ง
- ครูเขียนสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชันทางซ้ายบนกระดานดังนี้

  $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{2}$ จากนั้นครูแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม x2 , f(x2) และ Move x2 to 3 และแสดงคำตอบลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม ans1.
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 2. เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางขวา โดยครูกดปุ่ม 2. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน พร้อมสุ่มนักเรียนตอบค่าลิมิตทางขวาของฟังก์ชันเป็นเท่าไร รวมทั้งให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นว่าจะเลือกฟังก์ชันกรณีใดระหว่าง $x > 1$ กับ $x \leq 1$
- ครูเน้นย้ำลิมิตของฟังก์ชัน เป็นการพิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย และ x เข้าใกล้ a ทางขวาอีกครั้ง
- ครูเขียนสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชันทางขวาบนกระดานดังนี้

  $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} [\log(x-1) + 2]$ ครูแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม x1 , f(x1) และ Move x1 to 3 และแสดงคำตอบลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม ans2.
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 3. ค่าลิมิตทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชันมีค่าเท่ากันหรือไม่ โดยครูกดปุ่ม 3. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 1 และสุ่มให้นักเรียนตอบ และแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม ans3.
- ครูเขียนสัญลักษณ์ ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 1 พร้อมทั้งให้นักเรียนสังเกตด้วย
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 4. เพื่อหาค่า f(1) โดยการกดปุ่ม 4. พร้อมทั้งสุ่มนักเรียนเพื่อตอบคำถาม และแสดงคำตอบ โดยครูกดปุ่ม ans4.
- ครูตั้งคำถามนักเรียนว่า ค่าของ $\lim_{x \to 1} f(x)$ และ $f(1)$ มีค่าเท่ากันหรือไม่ พร้อมทั้งสุ่มให้นักเรียนตอบคำถาม



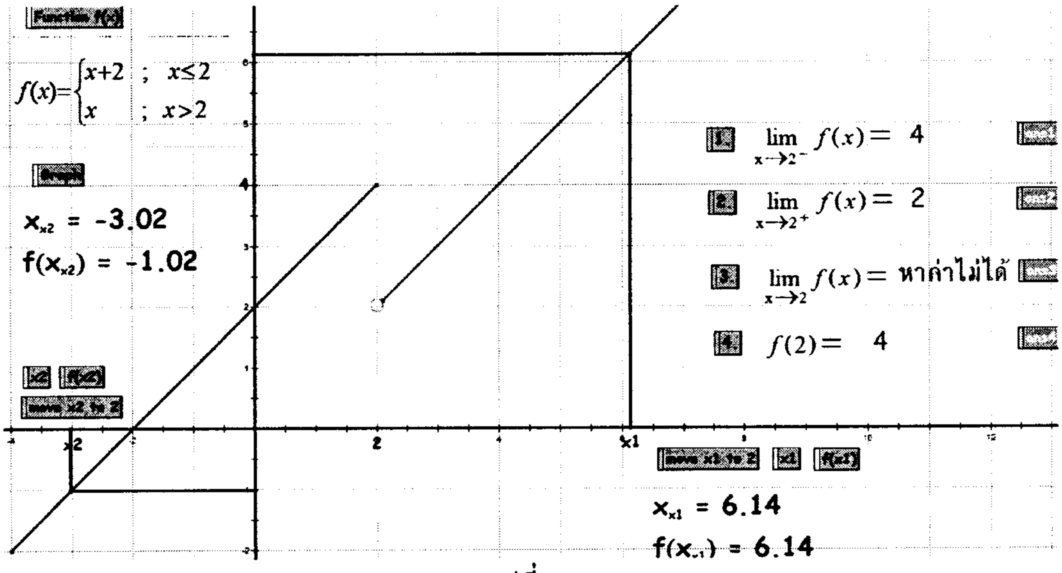
รูปที่ 10

6. ครูสอนลิมิตของฟังก์ชันเพื่อเน้นย้ำมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์เรื่องลิมิตของฟังก์ชันมากยิ่งขึ้น โดยการยกตัวอย่างที่ 7 พร้อมวาดกราฟ และถามหาค่าลิมิต เมื่อ x เข้าใกล้ 2

- ครูยกตัวอย่างที่ 7 จากการแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic เอกสาร “Exlim-pic3” ตามรูปที่ 11 ดังนี้
- ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} x+2 & ; \quad x \le 2 \\ x & ; \quad x > 2 \end{cases}$ โดยกดปุ่ม Function f(x) ครูตั้งคำถามให้กับนักเรียนว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลักษณะกราฟเป็นอย่างไร รอฟังนักเรียนแสดงความคิดเห็น
- ครูแสดงกราฟโดยการกดปุ่ม Graph ซึ่งจะแสดงกราฟของฟังก์ชัน จุด x = 2 และค่า f(2) อย่างชัดเจน
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 1. เมื่อ x เข้าใกล้ 2 ทางซ้าย โดยครูกดปุ่ม 1. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน พร้อมสุ่มนักเรียนตอบค่าลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชันเป็นเท่าไร รวมทั้งให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นว่าจะเลือกฟังก์ชันกรณีใดระหว่าง $x \le 2$ กับ $x > 2$
- ครูเน้นย้ำลิมิตของฟังก์ชัน เป็นการพิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย และ x เข้าใกล้ a ทางขวาอีกครั้ง
- ครูเขียนสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชันทางซ้ายบนกระดานดังนี้

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x+2)$ จากนั้นครูแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม x2 , f(x2) และ Move x2 to 3 และแสดงคำตอบลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม ans1.

- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 2. เมื่อ x เข้าใกล้ 3 ทางขวา โดยครูกดปุ่ม 2. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน พร้อมสุ่มนักเรียนตอบค่าลิมิตทางขวาของฟังก์ชันเป็นเท่าไร รวมทั้งให้นักเรียนแสดงความคิดเห็นว่าจะเลือกฟังก์ชันกรณีใดระหว่าง $x \leq 2$ กับ $x > 2$
- ครูเน้นย้ำลิมิตของฟังก์ชัน เป็นการพิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a ทางซ้าย และ x เข้าใกล้ a ทางขวาอีกครั้ง
- ครูเขียนสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชันทางขวาบนกระดานดังนี้ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} x$ ครูแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม x1 , f(x1) และ Move x1 to 3 และแสดงคำตอบลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน โดยการกดปุ่ม ans2.
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 3. ค่าลิมิตทางซ้ายและทางขวาของฟังก์ชันมีค่าเท่ากันหรือไม่ โดยครูกดปุ่ม 3. จะแสดงสัญลักษณ์ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 2 และสุ่มให้นักเรียนตอบ และแสดงคำตอบโดยการกดปุ่ม ans3.
- ครูเขียนสัญลักษณ์ ลิมิตของฟังก์ชัน เมื่อ x เข้าใกล้ 2 พร้อมทั้งให้นักเรียนสังเกตด้วย
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามข้อที่ 4. เพื่อหาค่า f(2) โดยการกดบ่ม 4. พร้อมทั้งสุ่มนักเรียนเพื่อตอบคำถาม และแสดงคำตอบ โดยครูกดปุ่ม ans4.
- ครูตั้งคำถามนักเรียนว่า ค่าของ $\lim_{x \to 2} f(x)$ และ $f(2)$ มีค่าเท่ากันหรือไม่ พร้อมทั้งสุ่มให้นักเรียนตอบคำถาม



รูปที่ 11

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งจะเน้นการพิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a มีความแตกต่างจากค่าของฟังก์ชันที่ x = a นั่นคือ ความแตกต่างระหว่าง $\lim_{x \to a} f(x)$ และ $f(a)$

2. นักเรียนช่วยกันทบทวนบทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน โดยครูแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file-limit1 เอกสาร "def-limit" ตามรูปที่ 6

3. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 2 แบบฝึกหัด ข้อที่ 1.-3.

4. ให้นักเรียนย้อนกลับไปพิจารณาใบกิจกรรมที่ 1 เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้นและแก้ไขข้อที่ผิดพลาดด้วยตนเอง

สื่อการสอน

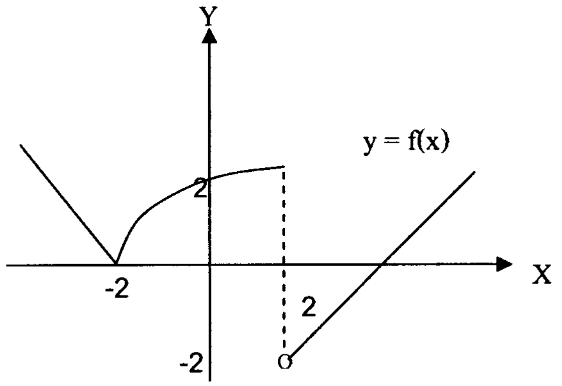
1. สื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต
2. ใบกิจกรรมที่ 2

การวัดและการประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามในชั้นเรียนได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำใบกิจกรรมที่ครูมอบหมายได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรมในห้องเรียน

ใบกิจกรรมที่ 2

1. จากกราฟของฟังก์ชัน f จงหา



1.1 $\lim_{x \to 2^-} f(x) =$

1.2 $\lim_{x \to 2^+} f(x) =$

1.3 $\lim_{x \to 2} f(x) =$

1.4 $\lim_{x \to -2^-} f(x) =$

1.5 $\lim_{x \to -2^+} f(x) =$

1.6 $\lim_{x \to -2} f(x) =$

2. กำหนด $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ จงหา $\lim_{x \to -1} g(x)$ พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชัน

3. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2; x < 2 \\ x + 4; x \geq 2 \end{cases}$ จงหา

3.1 $\lim_{x \to 2} f(x)$ 3.2 $f(2)$ 3.3 $\lim_{x \to -1} f(x)$

พร้อมทั้งวาดกราฟของฟังก์ชัน

แผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ 3 **ชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552**

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **คณิตศาสตร์ 6 รหัสวิชา ค 41116**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน **เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน จำนวน 1 คาบ**

สาระสำคัญ

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

เมื่อ $a \in R$ และ f, g เป็นฟังก์ชันภายในเซตของจำนวนจริง

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in I^+$
4. $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c\lim\limits_{x \to a} f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
5. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
7. $\lim\limits_{x \to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$ เมื่อ $n \in I^+$
9. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ เมื่อ $n \in I^+ - \{1\}$ และ $\sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} \in R$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. เขียนนิยามลิมิตของฟังก์ชันได้
2. อธิบายนิยามของลิมิตของฟังก์ชันได้
3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดมีลิมิต ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้

สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

เมื่อ $a \in R$ และ f, g เป็นฟังก์ชันภายในเซตของจำนวนจริง

1. $\lim_{x \to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim_{x \to a} x = a$
3. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in I^+$
4. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
5. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$
6. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$
7. $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ เมื่อ $n \in I^+$
9. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ เมื่อ $n \in I^+ - \{1\}$ และ $\sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \in R$

การหาค่าลิมิตของฟังก์ชัน : $\lim_{x \to a} f(x)$

ตัวอย่างที่ 8

เช่น $\lim_{x \to 2} (2 - 4x) = 2 - 4(2) = 6$

เช่น $\lim_{x \to 4} \frac{|x^2 - 16|}{x + 4} = \frac{0}{8} = 0$

จะได้ว่า เมื่อ แทน x ด้วย a ถ้าได้เป็นจำนวนจริง (ให้ตอบจำนวนนั้นเลย)

ตัวอย่างที่ 9

เช่น $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 4}{x + 2} = \frac{8}{0}$ ดังนั้น $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 4}{x + 2}$ หาค่าไม่ได้

จะได้ว่า เมื่อแทน x ด้วย a ถ้าได้คำตอบในรูป $\frac{k}{0}$, k เป็นจำนวนจริงที่ไม่เท่ากับ 0

(ให้ตอบ $\lim_{x \to a} f(x)$ หาค่าไม่ได้)

ตัวอย่างที่ 10

เช่น $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12} = \frac{0}{0}$ จะได้ว่า $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12}$ ยังสรุปไม่ได้ (แต่อาจมีคำตอบ)

ดังนั้น $\lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x^2 - x - 12} = \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(x + 3)} = \lim_{x \to 4} \frac{x - 4}{x + 3} = \frac{1}{7}$

กรณีแทนค่าแล้วเป็น $\frac{0}{0}$ ทำได้ดังนี้

ดึงตัวร่วมหรือแยกตัวประกอบแล้วจัดรูปฟังก์ชันใหม่

โจทย์ติดเอาสังยุค คูณทั้งเศษและส่วน

โจทย์มีค่าสัมบูรณ์ ใช้นิยามของค่าสัมบูรณ์ดังนี้ $|x| = \begin{cases} x \,;\, x \geq 0 \\ -x \,;\, x > 0 \end{cases}$

แบบฝึกหัด

ฝึกใช้สูตร จงหาค่า

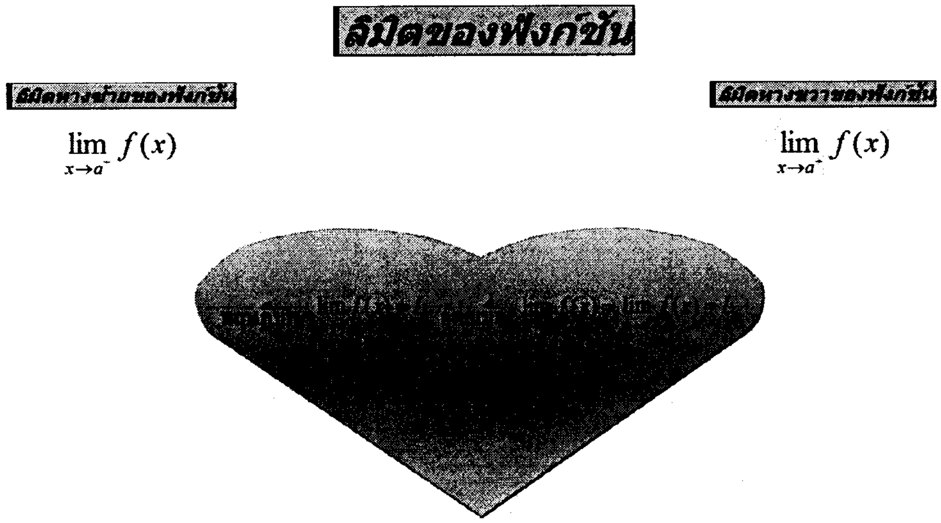
1. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+3x^2-6)$
2. $\lim\limits_{x\to 4}(1-\frac{x^2}{2})(1+x^3)$
3. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2)(x^3+4x^2-1)$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x+1}}$
6. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+2x}{x^3+1}$
7. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$
8. $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x})^{-1}$
9. $\lim\limits_{x\to 3}(1+\frac{1}{x+3})^{-1}$
10. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x+1 \,;\, x \geq 2 \\ 2x-1 \,;\, x < 2 \end{cases}$
11. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}$
12. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x-4}$
13. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+3x+2}$
14. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4x+4}$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$
16. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$
17. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$
18. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4-x}{3-\sqrt{x^2-7}}$
19. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x^2+2x-3|}{x-1}$
20. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x|-1}{x-1}$

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนนิยามลิมิตของฟังก์ชัน โดยแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file-limit1 เอกสาร "def-limit" ตามรูปที่ 12 ดังนี้

- สุ่มนักเรียนอธิบายความหมายของลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน ครูแสดงสัญลักษณ์ โดยการ กดปุ่ม ลิมิตทางซ้ายของฟังก์ชัน
- สุ่มนักเรียนอธิบายความหมายของลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน ครูแสดงสัญลักษณ์ โดยการ กดปุ่ม ลิมิตทางขวาของฟังก์ชัน
- นักเรียนช่วยกันอธิบายความหมายของลิมิตของฟังก์ชัน และครูแสดงนิยามโดยการ กดปุ่ม ลิมิตของฟังก์ชัน



รูปที่ 12

ขั้นสอน

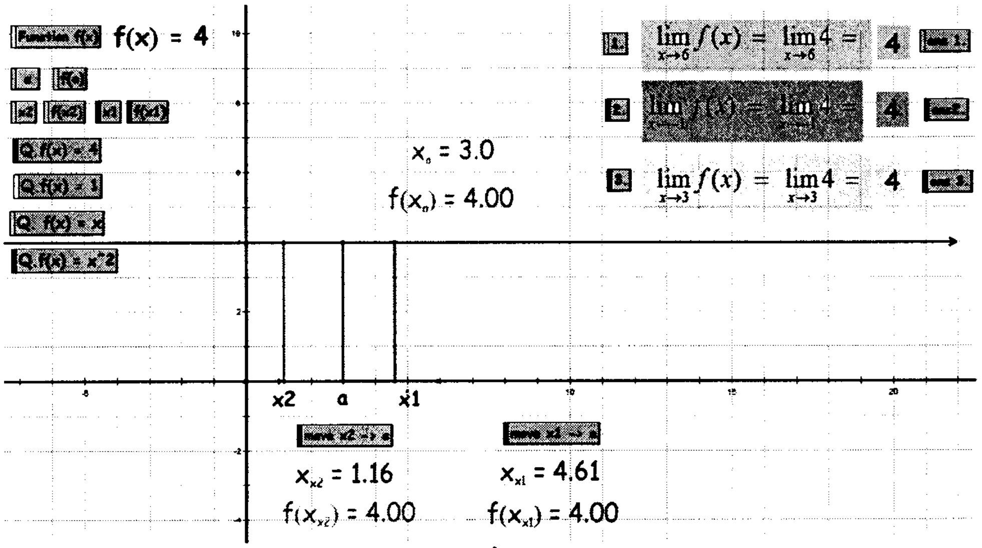
1. ครูอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 1 โดยครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ THlimit ตามรูปที่ 13 และ 14 ดังนี้

- ครูกำหนดสมการของฟังก์ชัน f(x) = 4 โดยกดปุ่ม "function f(x)"
- ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณา กราฟของฟังก์ชัน f(x) = 4
- ครูแสดงกราฟของฟังก์ชัน f(x) = 4 และกำหนด ค่า a โดยการกดปุ่ม "a"
- ให้นักเรียนพิจารณาค่า f(a) เป็นเท่าใด จากนั้น ครูแสดงค่า f(a) โดยการกดปุ่ม "f(a)" แล้วครูลองเลื่อนค่าตำแหน่ง a พร้อมทั้งให้นักเรียนพิจารณาค่า ของ f(a) เป็นอย่างไร

- ครูกำหนดค่า x2 และค่าของ f(x2) โดยกดปุ่ม “x2” และ “f(x2)” ตามลำดับ
- ครูกำหนดค่า x1 และค่าของ f(x1) โดยกดปุ่ม “x1” และ “f(x1)” ตามลำดับ
- ครูตั้งคำถามโดยกดปุ่ม “Q.f(x) = 4” จะมีทั้งหมด 3 คำถาม

- นักเรียนตอบคำถาม โดยครูสุ่มเรียกถามทีละข้อเป็นรายบุคคล ถ้าข้อใดนักเรียนตอบผิดจะแสดงหาค่าคำตอบโดยการ เลื่อนจุด a ตามคำถามของข้อนั้น แล้ว กดปุ่ม “move $x2 \to a$” และ “move $x1 \to a$” ให้นักเรียนพิจารณาหาค่าลิมิตใหม่

(แสดงดังรูปที่ 13)

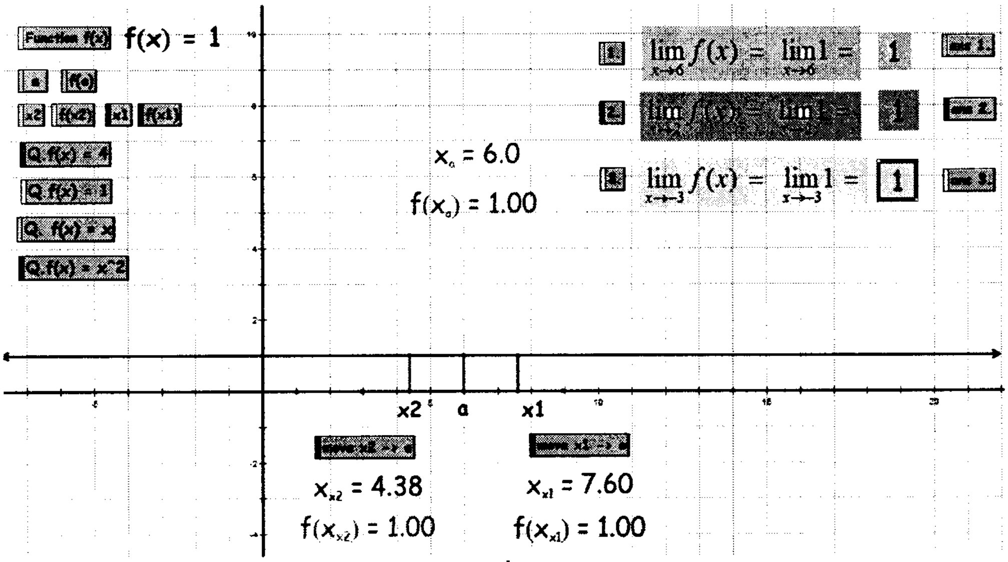


รูปที่ 13

- ครูปิดคำถามและคำตอบชุด Q. f(x) = 4
- ครูกำหนดสมการของฟังก์ชัน f(x) = 1 โดยใช้คำสั่งแก้ไขฟังก์ชัน
- ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณา กราฟของฟังก์ชัน f(x) = 1
- ครูแสดงกราฟของฟังก์ชัน f(x) = 1 และกำหนด ค่า a
- ให้นักเรียนพิจารณาค่า f(a) เป็นเท่าใด
- ครูลองเลื่อนค่าตำแหน่ง a พร้อมทั้งให้นักเรียนพิจารณาค่า ของ f(a) เป็นอย่างไร
- ครูตั้งคำถามโดยกดปุ่ม “Q.f(x) = 1” จะมีทั้งหมด 3 คำถาม

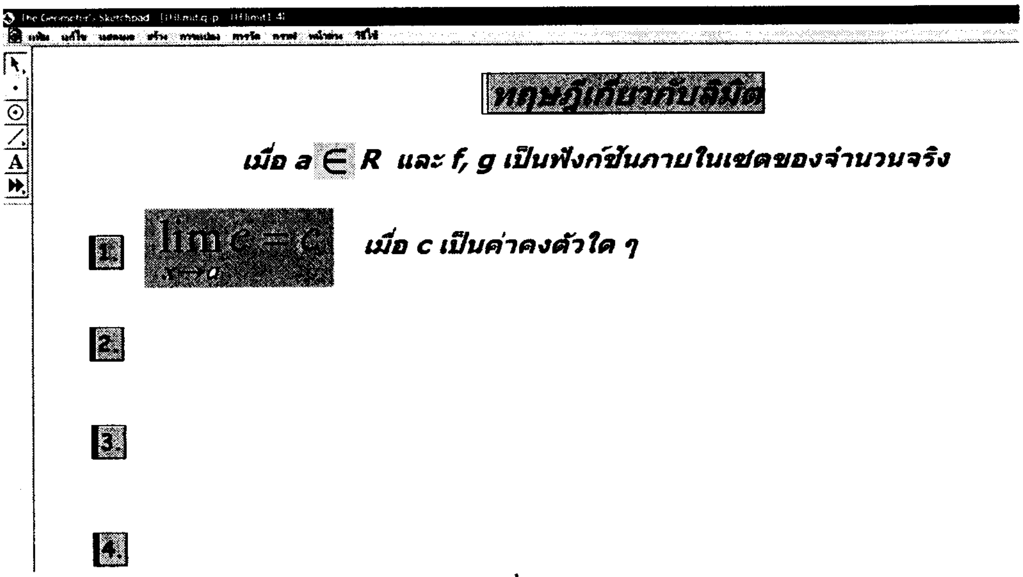
- นักเรียนตอบคำถาม โดยครูสุ่มเรียกถามทีละข้อเป็นรายบุคคล ถ้าข้อใดนักเรียนตอบผิดจะแสดงหาค่าคำตอบโดยการ เลื่อนจุด a ตามคำถามของข้อนั้น แล้ว กดปุ่ม “move $x2 \to a$” และ “move $x1 \to a$” ให้นักเรียนพิจารณาหาค่าลิมิตใหม่

(แสดงดังรูปที่ 14)



รูปที่ 14

- ครูปิดคำถามและคำตอบชุด Q. f(x) = 1
- ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาคำตอบ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 1. $\lim_{x \to a} c =$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
- ครูอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 1 เพิ่มเติม โดยครูแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file-THlimit เอกสาร TH.limit1-4 เพื่อแสดงทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 1 ดังรูปที่ 15

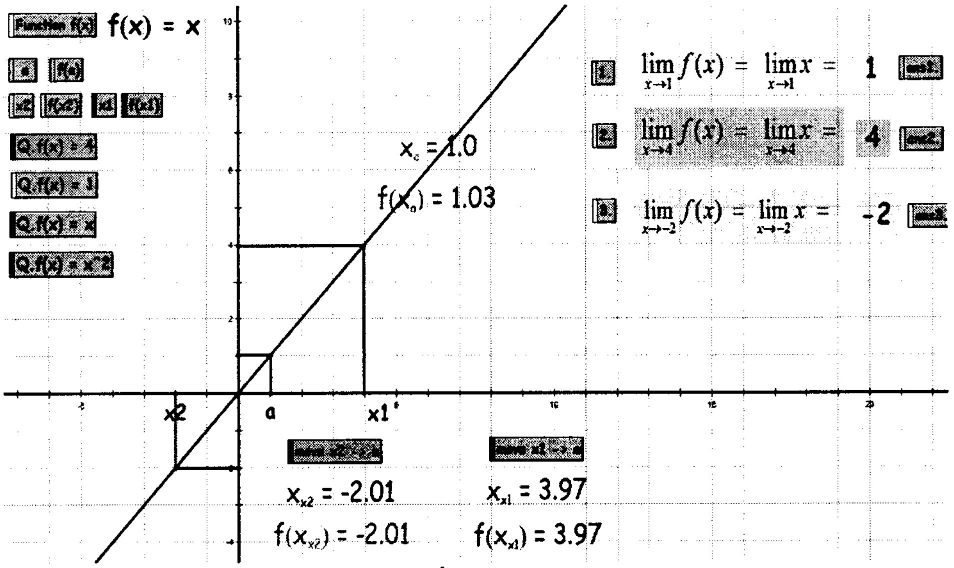


รูปที่ 15

2. ครูอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 2 โดยครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ THlimit ตามรูปที่ 16 ดังนี้

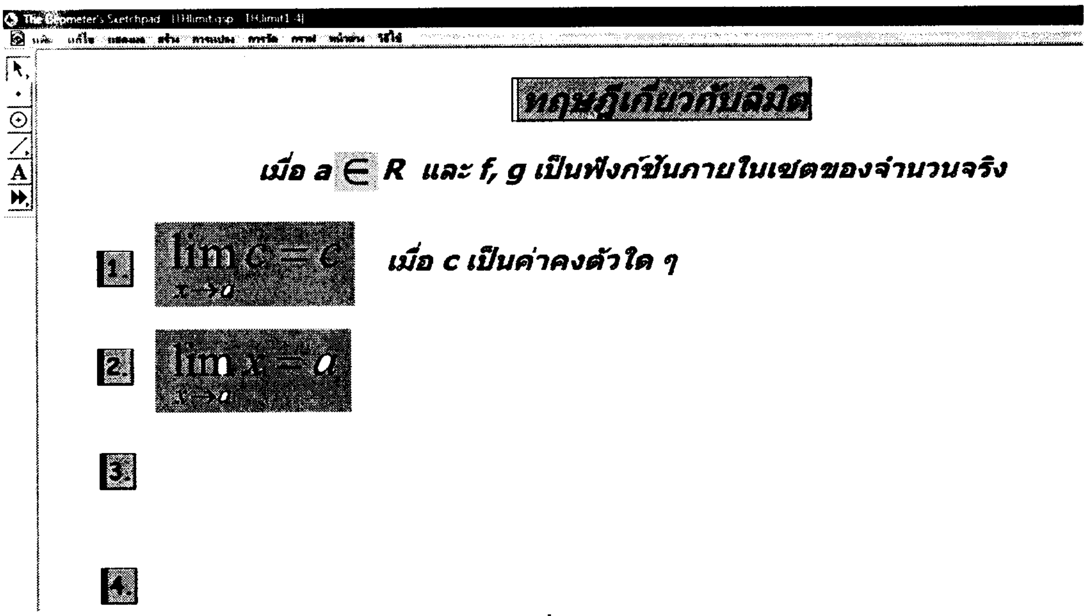
- ครูกำหนดสมการของฟังก์ชัน f(x) = x โดยใช้คำสั่งแก้ไขฟังก์ชัน
- ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณา กราฟของฟังก์ชัน f(x) = x
- ครูแสดงกราฟของฟังก์ชัน f(x) = x และกำหนด ค่า a
- ให้นักเรียนพิจารณาค่า f(a) เป็นเท่าใด
- ครูลองเลื่อนค่าตำแหน่ง a พร้อมทั้งให้นักเรียนพิจารณาค่า ของ f(a) เป็นอย่างไร
- ครูตั้งคำถามโดยกดปุ่ม “Q.f(x) = x” จะมีทั้งหมด 3 คำถาม

- นักเรียนตอบคำถาม โดยครูสุ่มเรียกถามทีละข้อเป็นรายบุคคล ถ้าข้อใดนักเรียนตอบผิดจะแสดงหาค่าคำตอบโดยการ เลื่อนจุด a ตามคำถามของข้อนั้น แล้ว กดปุ่ม “move $x2 \to a$” และ “move $x1 \to a$” ให้นักเรียนพิจารณาหาค่าลิมิตใหม่



รูปที่ 16

- ครูปิดคำถามและคำตอบชุด Q. f(x) = x
- ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาคำตอบ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 2. $\lim_{x\to a} x =$
- ครูอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 2 เพิ่มเติม โดยครูแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file-THlimit เอกสาร TH.limit1-4 เพื่อแสดงทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 2 ดังรูปที่ 17

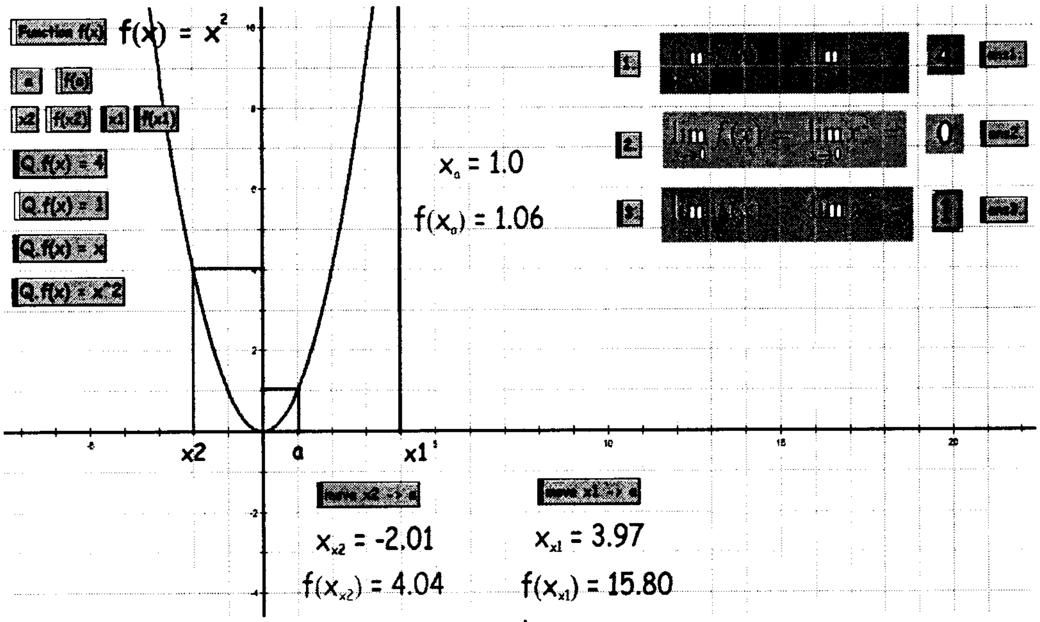


รูปที่ 17

3. ครูอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 3 โดยครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ THlimit ตามรูปที่ 18 ดังนี้

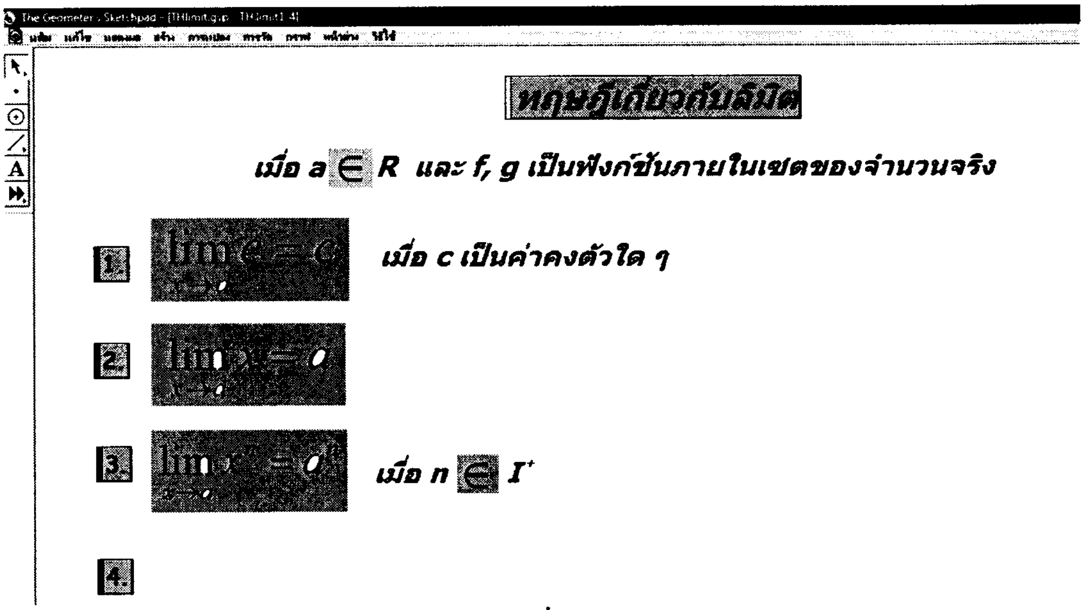
- ครูกำหนดสมการของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$ โดยใช้คำสั่งแก้ไขฟังก์ชัน
- ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณา กราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x^2$
- ครูแสดงกราฟของฟังก์ชัน $f(x) = x$ และกำหนด ค่า a
- ให้นักเรียนพิจารณาค่า f(a) เป็นเท่าใด
- ครูลองเลื่อนค่าตำแหน่ง a พร้อมทั้งให้นักเรียนพิจารณาค่า ของ f(a) เป็นอย่างไร
- ครูตั้งคำถามโดยกดปุ่ม "Q.$f(x) = x^2$" จะมีทั้งหมด 3 คำถาม

- นักเรียนตอบคำถาม โดยครูสุ่มเรียกถามที่ละข้อเป็นรายบุคคล ถ้าข้อใดนักเรียนตอบผิดจะแสดงหาค่าคำตอบโดยการ เลื่อนจุด a ตามคำถามของข้อนั้น แล้ว กดปุ่ม "move $x2 \to a$" และ "move $x1 \to a$" ให้นักเรียนพิจารณาหาค่าลิมิตใหม่



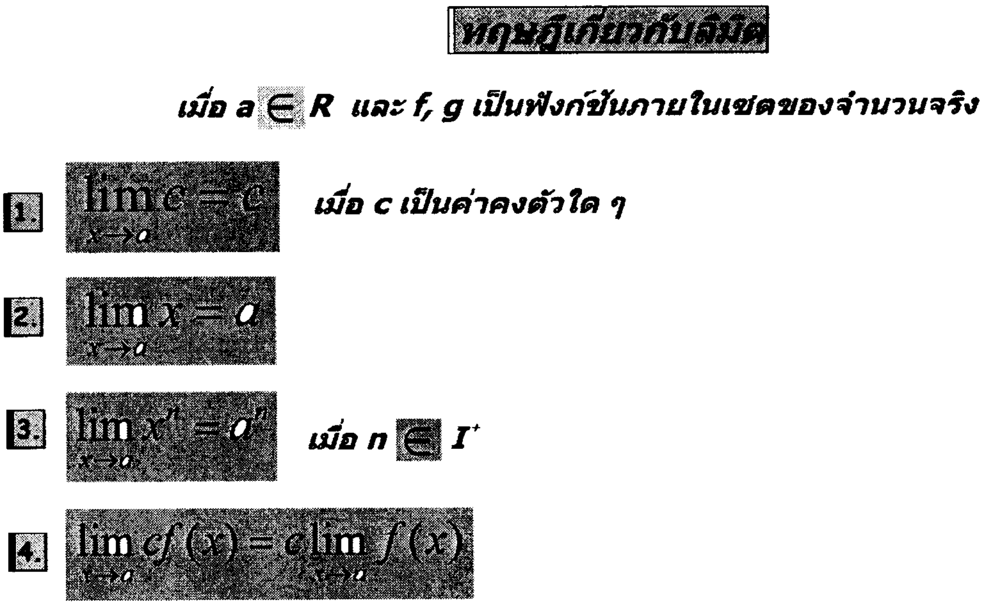
รูปที่ 18

- ครูปิดคำถามและคำตอบชุด Q. f(x) = x^2
- ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาคำตอบ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 3. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$
- ครูอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 3 เพิ่มเติม โดยครูแสดงโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file-THlimit เอกสาร TH.limit1-4 เพื่อแสดงทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 3 ดังรูปที่ 19



รูปที่ 19

4. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเราขาคณิตพลวัต ชื่อ TH.limit1-4 เพื่ออธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 4.ตามรูปที่ 20 ดังนี้



รูปที่ 20

5. ครูอธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 5-9 โดยครูแสดงสื่อโปรแกรมเราขาคณิตพลวัต ชื่อ TH.limit5-9 ตามรูปที่ 21 ดังนี้

- ครูกดปุ่ม “5.” เพื่ออธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อ 5.
- ทำซ้ำรูปแบบเดิมให้ครบถึงทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อ 9.

5. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

6. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

7. $\lim\limits_{x \to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ *เมื่อ* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

8. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$

9. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

รูปที่ 21

6. ครูแสดงตัวอย่างหาค่าลิมิตจากทฤษฎีบท ตัวอย่างที่ 8 – 10
7. ให้นักเรียนตอบคำถามและแสดงการหาคำตอบจากใบกิจกรรมที่ 3

ขั้นสรุป

ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปทบทวนทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตของฟังก์ชัน โดยใช้สื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ตามรูปที่ 20-21

สื่อการเรียนรู้

1. สื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต
2. ใบกิจกรรมที่ 3

การวัดและการประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามในชั้นเรียนได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำใบกิจกรรมที่ครูมอบหมายได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรมในห้องเรียน

ใบกิจกรรมที่ 3

ฝึกใช้สูตร จงหาค่า

1. $\lim\limits_{x\to -1}(x^3+3x^2-6)$

2. $\lim\limits_{x\to 4}(1-\frac{x^2}{2})(1+x^3)$

3. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2)(x^3+4x^2-1)$

4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+1}{\sqrt{x+1}}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+4}{\sqrt{x+1}}$

6. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2+2x}{x^3+1}$

7. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

8. $\lim\limits_{x\to 2}(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{x})^{-1}$

9. $\lim\limits_{x\to 3}(1+\frac{1}{x+3})^{-1}$

10. $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} x+1\ ; x\geq 2 \\ 2x-1\ ; x<2 \end{cases}$

11. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+4x+4}{x+2}$

12. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x-4}$

13. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+3x+2}$

14. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4x+4}$

15. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

16. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

17. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

18. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{4-x}{3-\sqrt{x^2-7}}$

19. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x^2+2x-3|}{x-1}$

20. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{|x|-1}{x-1}$

แผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ 4 (ต่อจากคาบที่ 3) **ชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552**
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **คณิตศาสตร์ 6 รหัสวิชา ค 41116**
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน **เรื่อง ลิมิตของฟังก์ชัน จำนวน 1 คาบ**

สาระสำคัญ

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

เมื่อ $a \in R$ และ f, g เป็นฟังก์ชันภายในเซตของจำนวนจริง

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$
3. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in I^+$
4. $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c\lim\limits_{x \to a} f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
5. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$
6. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$
7. $\lim\limits_{x \to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$
8. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$ เมื่อ $n \in I^+$
9. $\lim\limits_{x \to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$ เมื่อ $n \in I^+ - \{1\}$ และ $\sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)} \in R$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. เขียนบทนิยามลิมิตของฟังก์ชันได้
2. อธิบายบทนิยามของลิมิตของฟังก์ชันได้
3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดมีลิมิต ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันโดยใช้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตได้

สาระการเรียนรู้

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

เมื่อ $a \in R$ และ f, g เป็นฟังก์ชันภายในเซตของจำนวนจริง

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

2. $\lim_{x \to a} x = a$

3. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in I^+$

4. $\lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ

5. $\lim_{x \to a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

6. $\lim_{x \to a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

7. $\lim_{x \to a} \left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

8. $\lim_{x \to a} [f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$ เมื่อ $n \in I^+$

9. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$ เมื่อ $n \in I^+$ - $\{1\}$ และ $\sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)} \in R$

ฝึกการใช้สูตร

1. $\lim_{x \to -1} (x^3 + 3x^2 - 6)$

2. $\lim_{x \to 4} (1 - \frac{x^2}{2})(1 + x^3)$

3. $\lim_{x \to 2} (x^2 + 2)(x^3 + 4x^2 - 1)$

4. $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x + 1}}$

5. $\lim_{x \to 1} \frac{x + 4}{\sqrt{x + 1}}$

6. $\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 2x}{x^3 + 1}$

7. $\lim_{x \to 4} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$

8. $\lim_{x \to 2} (\frac{x^2}{4} - \frac{1}{x})^{-1}$

9. $\lim_{x \to 3} (1 + \frac{1}{x + 3})^{-1}$

10. $\lim_{x \to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x) = \begin{cases} x + 1 \, ; x \geq 2 \\ 2x - 1 \, ; x < 2 \end{cases}$

11. $\lim_{x \to -2} \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 2}$

12. $\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x - 4}$

13. $\lim_{x \to -1} \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 2}$

14. $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 4}$

15. $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x}$

16. $\lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x}$

17. $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x + 2} - 3}{x - 7}$

18. $\lim_{x \to 4} \frac{4 - x}{3 - \sqrt{x^2 - 7}}$

19. $\lim_{x \to 1} \frac{|x^2 + 2x - 3|}{x - 1}$

20. $\lim_{x \to 1} \frac{|x| - 1}{x - 1}$

แบบฝึกหัด

จงหาค่า

1. $\lim_{x\to 2} x^3+2x^2+3x+8$

2. $\lim_{x\to 3}(5+\sqrt{x^2-5})$

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+1}{x^3+1}$

4. $\lim_{x\to -2}(x^2-1)^2$

5. $\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{3x^3+20x^2+4}$

6. $\lim_{s\to 2}\dfrac{s^2-4}{s^3-8}$

7. $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$

8. $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+6x+5}{x^2-2x-3}$

9. $\lim_{x\to 3}\dfrac{3x^2-10x+3}{x-3}$

10. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}$

11. $\lim_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{25-x^2}-4}{x+3}$

12. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x}{(x-1)^2}$

13. $\lim_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{3-\sqrt{x^2+5}}$

14. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2}\right]$

15. $\lim_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{(x-5)^2}}{x^2-4x-5}$

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นนำ

1. ให้นักเรียนช่วยกันทบทวนทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต โดยเรียกสุ่มนักเรียนตอบทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต ทีละข้อ ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ TH.limit1-4 และ TH.limit5-9 ดังรูปที่ 22 และ 23 ตามลำดับ ดังนี้
   - ครูกดปุ่ม “ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต” เพื่อแสดงเมื่อ $a \in R$ และ f, g เป็นฟังก์ชันภายในเซตของจำนวนจริง
   - ครูสุ่มนักเรียนให้ตอบทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อ 1. พร้อมทั้งกดปุ่ม “1.”
   - ทำซ้ำรูปแบบเดิมให้ครบถึงทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตข้อที่ 9.

ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต

เมื่อ a $\in$ R และ f, g เป็นฟังก์ชันภายในเซตของจำนวนจริง

1. $\lim_{x \to a} c = c$ ***เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ***

2. $\lim_{x \to a} x = a$

3. $\lim_{x \to a} x^n = a^n$ ***เมื่อ n $\in$ I^+***

4. $\lim_{x \to a} cf(x) = c\lim_{x \to a} f(x)$

รูปที่ 22

5. $\lim_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$

6. $\lim_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$

7. $\lim_{x \to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ ***เมื่อ*** $\lim_{x \to a} g(x) \neq 0$

8. $\lim_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim_{x \to a} f(x)]^n$

9. $\lim_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to a} f(x)}$

รูปที่ 23

ขั้นสอน

1. ครูแสดงวิธีทำ โดยเลือกจากใบกิจกรรมที่ 3 เช่น

ข้อ 10. $\lim_{x\to 2} f(x)$ เมื่อ $f(x)=\begin{cases} x+1 \;; x\geq 2 \\ 2x-1 \;; x<2 \end{cases}$

ข้อ 14. $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4x+4}$ ข้อ 15. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

ข้อ 16. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$ ข้อ 18. $\lim_{x\to 4}\frac{4-x}{3-\sqrt{x^2-7}}$

ข้อ 19. $\lim_{x\to 1}\frac{|x^2+2x-3|}{x-1}$ ข้อ 20. $\lim_{x\to 1}\frac{|x|-1}{x-1}$

- แต่ละข้อจะให้นักเรียนพิจารณาโดยการเรียกถามตอบเป็นรายบุคคล
- ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณา ถึงความแตกต่างระหว่าง ค่า f(a) กับ ค่า $\lim_{x\to a} f(x)$
- ให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายว่าการหาค่าลิมิตบางข้อสามารถนำค่า x = a ไปแทนในฟังก์ชันได้เลย แต่บางข้อเมื่อแทนค่าแล้วพบว่าค่าที่ได้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งรูปแบบที่ยังไม่ได้กำหนด (indeterminate form) ต้องมีการจัดรูปฟังก์ชันใหม่ขึ้นกับลักษณะของฟังก์ชัน อาจใช้การแยกตัวประกอบ, การคูณด้วยสังยุคทั้งเศษและส่วน หรือ การใช้นิยามค่าสัมบูรณ์ เช่น

จากข้อ 12. ถ้ากำหนด $f(x)=\frac{x^2-8x+16}{x-4}$ การหาค่า f(4) จะไม่สามารถหาค่าได้

แต่ถ้าหาค่า $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x-4}$ ต้องแสดงการจัดรูปก่อน กล่าวคือ

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4}\frac{x^2-8x+16}{x-4} &= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x-4)}{x-4}\\ &= \lim_{x\to 4}(x-4)\\ &= 0\end{aligned}$$

นั่นคือ ฟังก์ชัน f(x) สามารถหาลิมิตที่ 4 ได้ เท่ากับ 0

จากข้อ 14. ถ้ากำหนด $f(x)=\frac{x-2}{x^2-4x+4}$ การหาค่า f(2) จะไม่สามารถหาค่าได้

แต่ถ้าหาค่า $\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4x+4}$ ต้องแสดงการจัดรูปก่อน กล่าวคือ

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{1}{x-2}$$

$$= \frac{1}{0}$$

นั่นคือ ลิมิตของฟังก์ชัน f(x) ไม่มีลิมิตที่ 2

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปทบทวนลิมิตของฟังก์ชัน ซึ่งจะเน้นการพิจารณาค่าของฟังก์ชันเมื่อ x เข้าใกล้ a มีความแตกต่างจากค่าของฟังก์ชันที่ x = a นั่นคือ ความแตกต่างระหว่าง $\lim_{x\to a} f(x)$ และ $f(a)$ โดยแสดงด้วยสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ดังรูปที่ 22-23 ตามลำดับ
2. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 4 ข้อที่ 1.-15.
3. ให้นักเรียนย้อนกลับไปพิจารณาใบกิจกรรมที่ 3 เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้นและแก้ไขข้อที่ผิดพลาดด้วยตนเอง

สื่อการสอน

1. สื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต
2. ใบกิจกรรมที่ 4

การวัดและการประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามในชั้นเรียนได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำใบกิจกรรมที่ครูมอบหมายได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรมในห้องเรียน

ใบกิจกรรมที่ 4

จงหาค่า

1. $\lim\limits_{x \to 2} x^3 + 2x^2 + 3x + 8$

2. $\lim\limits_{x \to 3} (5 + \sqrt{x^2 - 5})$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + 1}{x^3 + 1}$

4. $\lim\limits_{x \to -2} (x^2 - 1)^2$

5. $\lim\limits_{x \to 3} \sqrt[3]{3x^3 + 20x^2 + 4}$

6. $\lim\limits_{s \to 2} \dfrac{s^2 - 4}{s^3 - 8}$

7. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x - 1}$

8. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + 6x + 5}{x^2 - 2x - 3}$

9. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{3x^2 - 10x + 3}{x - 3}$

10. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x - 1} - 1}{x - 2}$

11. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{25 - x^2} - 4}{x + 3}$

12. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + 2x}{(x - 1)^2}$

13. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4 - x^2}}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x}\left[\dfrac{1}{2 + x} - \dfrac{1}{2}\right]$

15. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{(x - 5)^2}}{x^2 - 4x - 5}$

แผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ 5 **ชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552**
กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **คณิตศาสตร์ 6 รหัสวิชา ค 41116**
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน
เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จำนวน 1 คาบ

สาระสำคัญ

บทนิยาม

1. ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a เมื่อฟังก์ชัน f มีคุณสมบัติดังนี้

   1.1 $f(a)$ หาค่าได้

   1.2 $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้

   1.3 $f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

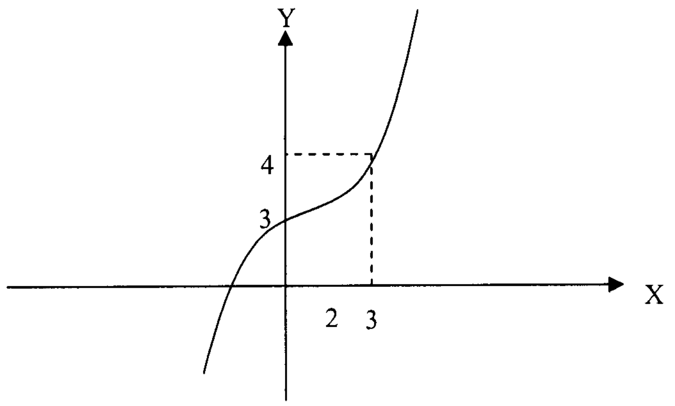
1. เขียนบทนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุด ใด ๆ ได้
2. อธิบายความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุด ใด ๆ ได้
3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่

สาระการเรียนรู้

ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ตัวอย่างที่ 11 กำหนด $f(x)=(x-2)^3+3$ จงพิจารณากราฟมีความต่อเนื่องที่ x = 3 หรือไม่ (โจทย์กำหนดเพียงสมการฟังก์ชัน)

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ

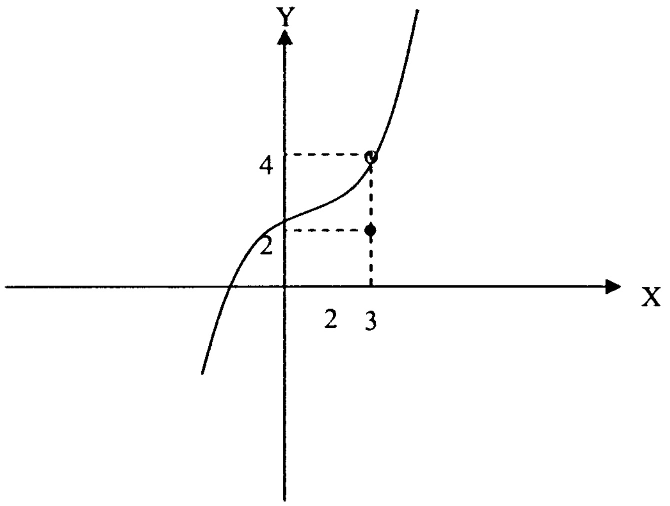


จะเห็นว่า

1. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x-2)^3 + 3 = 4$
2. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-2)^3 + 3 = 4$
3. $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$
4. $f(3) = 4$

ตัวอย่างที่ 12 กำหนด $f(x)=\begin{cases}(x-2)^3+3 & ; \quad x \neq 3 \\ 2 & ; \quad x = 3\end{cases}$ **จงพิจารณาฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่ x = 3 หรือไม่**

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ

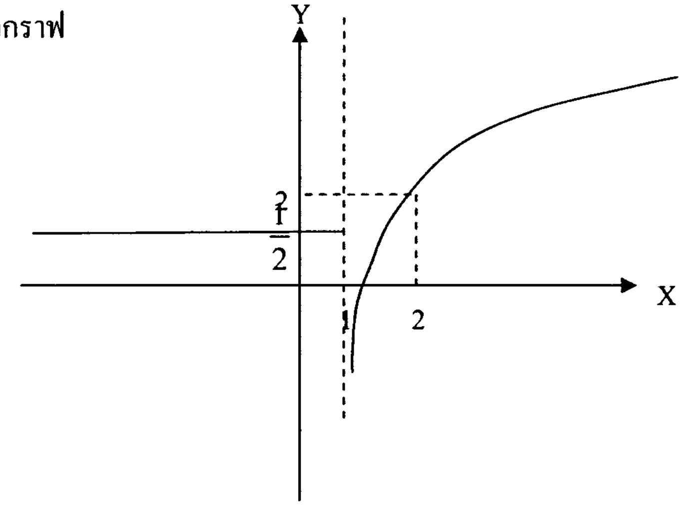


จะเห็นว่า

1. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x-2)^3 + 3 = 4$
2. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (x-2)^3 + 3 = 4$
3. $\lim_{x\to 3} f(x) = 4$
4. $f(3) = 2$

ตัวอย่างที่ 13 กำหนด $f(x)=\begin{cases}\log(x-1)+2 & ; \quad x>1 \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x\le 1\end{cases}$ จงพิจารณาฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่ x = 1 หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ

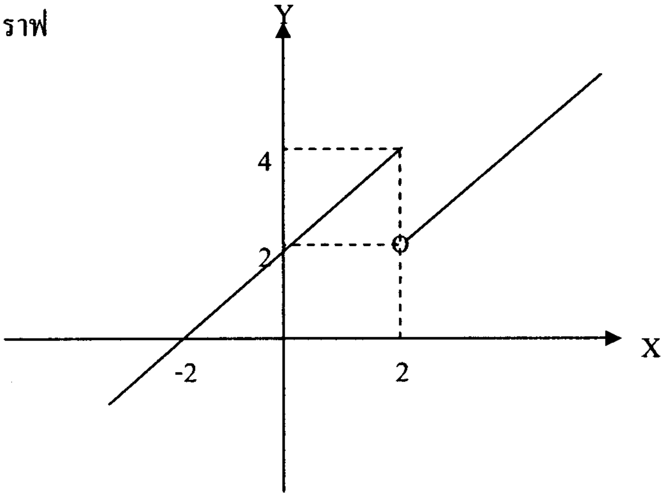


จะเห็นว่า

1. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
2. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}[\log(x-1)+2]$ ซึ่งหาค่าไม่ได้
3. $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้
4. $f(1) = \frac{1}{2}$

ตัวอย่างที่ 14 กำหนด $f(x)=\begin{cases}x+2 & ; \quad x\le 2 \\ x & ; \quad x>2\end{cases}$ จงพิจารณาฟังก์ชันมีความต่อเนื่องที่ x = 2 หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ



จะเห็นว่า

1. $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(x+2) = 4$
2. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2$
3. $\lim_{x\to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้
4. $f(2) = 4$

บทนิยาม

1. ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a เมื่อฟังก์ชัน f มีสมบัติดังนี้

   1.1 $f(a)$ หาค่าได้

   1.2 $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้

   1.3 $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$

หากขาดเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่ง นั่นแสดงว่า ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = a

ตัวอย่างที่ 15 $f(x) = \begin{cases} 1, x < 0 \\ x+1, 0 \le x < 2 \\ 2, x \ge 2 \end{cases}$

f(2) = 2

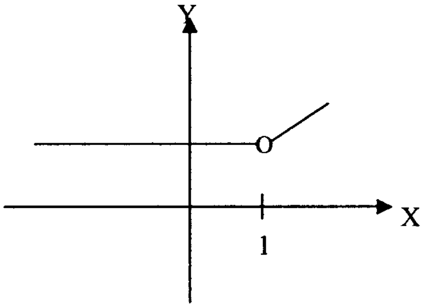
$\lim_{x\to 2^+} f(x) = 2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = 3$

จะได้ว่า f ไม่มีลิมิตที่ 2 ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 2

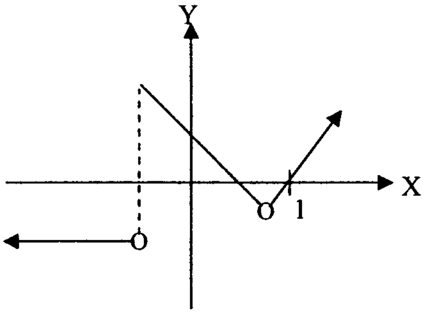
แบบฝึกหัด

1. บทนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุด ใด ๆ กล่าวว่าอย่างไร
2. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ กราฟของฟังก์ชันในข้อใดต่อเนื่องที่จุด x = 1



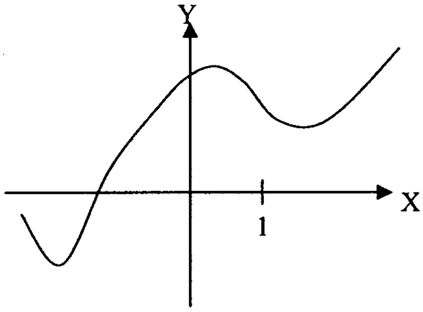
รูปที่ 1

....



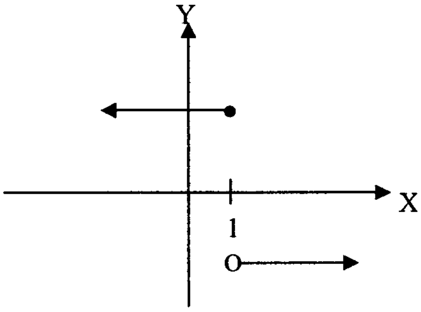
รูปที่ 2

....



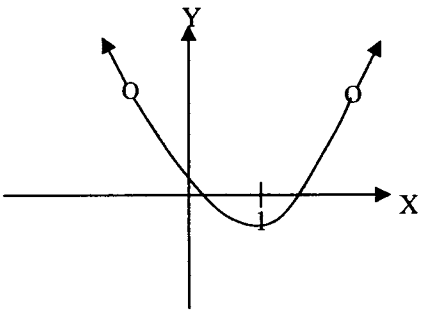
รูปที่ 3

....



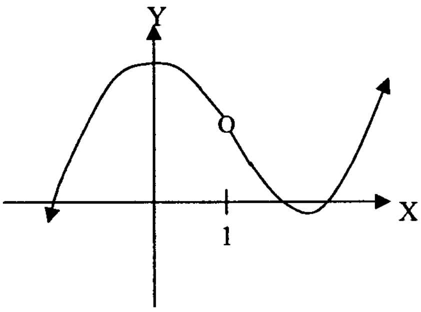
รูปที่ 4

....



รูปที่ 5

....



รูปที่ 6

....

3. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x+1 \; ; \; x \geq 1 \\ x-1 \; ; \; x < 1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่จุด x = 1 หรือไม่ พร้อมทั้งเขียนกราฟประกอบ

4. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่

4.1 $f(x) = 2(x-1)^3, x = 1$

4.2 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$, $x = 1$

4.3 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ x^2+1 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$

4.4 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$, x = 1

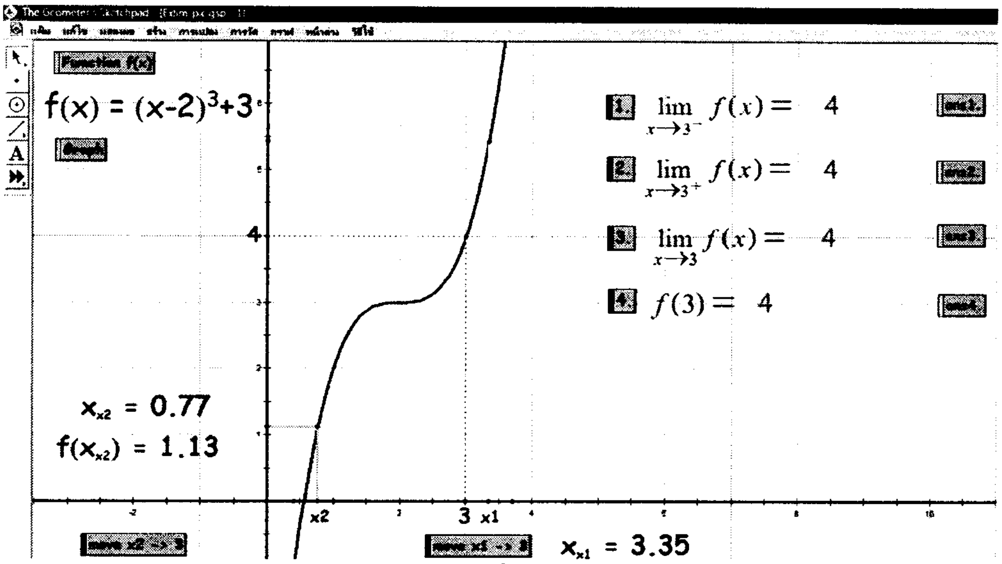
4.5 $f(x) = \begin{cases} 2, x > 0 \\ 1, x \leq 0 \end{cases}$, x = 1

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ครูทบทวนเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “1” ตามรูปที่ 24 ดังนี้

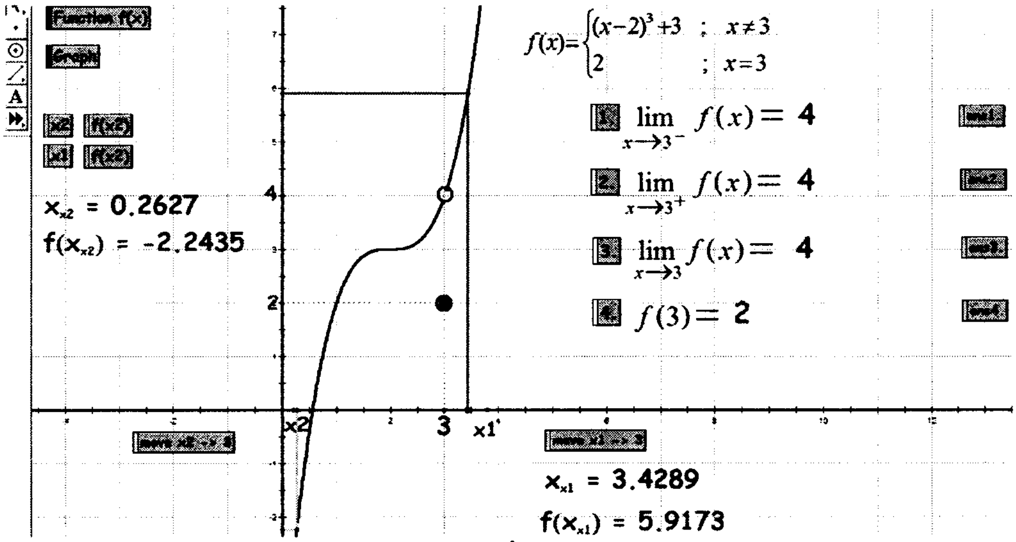
- ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x) = (x-2)^3 + 3$ โดยกดปุ่ม Function f(x) และแสดงกราฟ โดยกดปุ่ม “Graph”
- ให้นักเรียนตอบคำถาม จำนวน 4 ข้อ จากการสุ่มเรียกตอบทีละคน จากการกดปุ่ม 1. ถึง ปุ่ม 4.
- ครูเฉลยโดยการกดปุ่ม คำตอบทั้ง 4 ข้อ



รูปที่ 24

2. ครูทบทวนเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Exlim-pic2” ตาม รูปที่ 25 ดังนี้

- ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}(x-2)^3+3 & ; \quad x\neq 3\\ 2 & ; \quad x=3\end{cases}$ โดยกดปุ่ม Function f(x) และแสดงกราฟ โดยกดปุ่ม “Graph”
- ให้นักเรียนตอบคำถาม จำนวน 4 ข้อ จากการสุ่มเรียกตอบที่ละคน จากการกดปุ่ม 1. ถึง ปุ่ม 4.
- ครูเฉลยโดยการกดปุ่ม คำตอบทั้ง 4 ข้อ

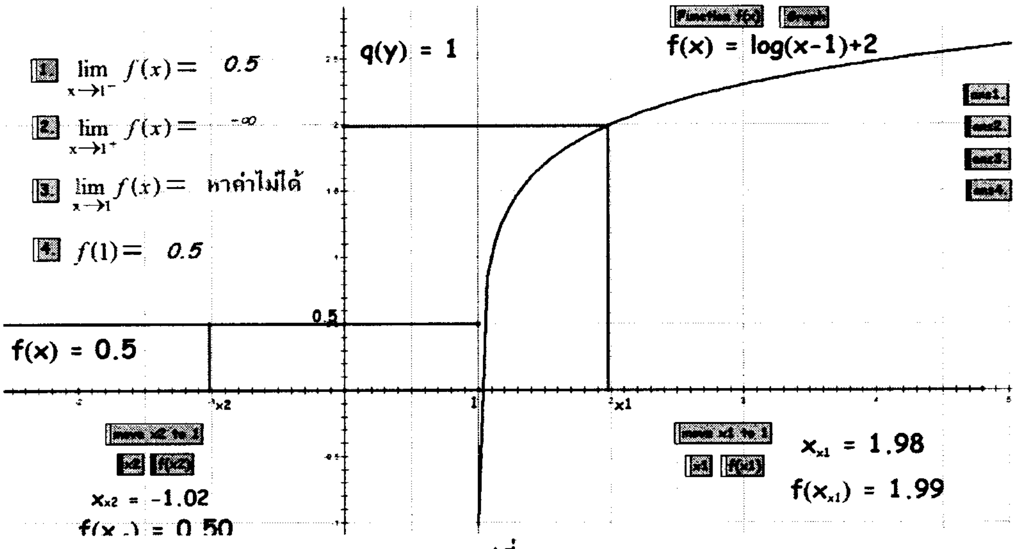


รูปที่ 25

ขั้นสอน

1. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร "Exlim-pic3" ตามรูปที่ 26 ดังนี้

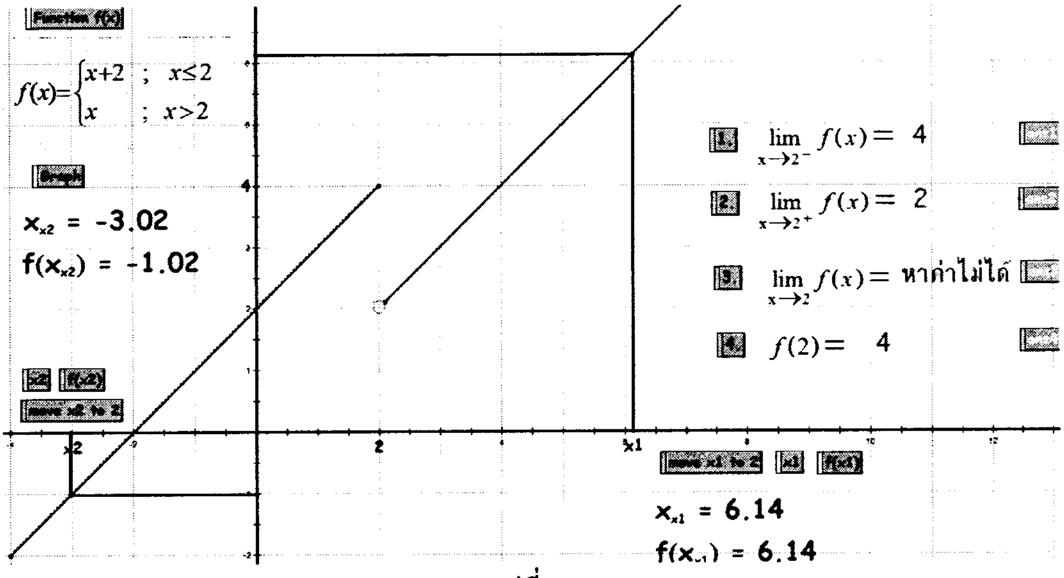
- ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\log(x-1)+2 & ; \quad x>1 \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad x\le 1\end{cases}$ โดยกดปุ่ม Function f(x) และแสดงกราฟ โดยกดปุ่ม "Graph"
- ให้นักเรียนตอบคำถาม จำนวน 4 ข้อ จากการสุ่มเรียกตอบทีละคน จากการกดปุ่ม 1. ถึง ปุ่ม 4.
- ครูเฉลยโดยการกดปุ่ม คำตอบทั้ง 4 ข้อ



รูปที่ 26

2. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร "Exlim-pic4" ตามรูปที่ 27 ดังนี้

- ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}x+2 & ; \quad x\le 2 \\ x & ; \quad x>2\end{cases}$ โดยกดปุ่ม Function f(x) และแสดงกราฟ โดยกดปุ่ม "Graph"
- ให้นักเรียนตอบคำถาม จำนวน 4 ข้อ จากการสุ่มเรียกตอบทีละคน จากการกดปุ่ม 1. ถึง ปุ่ม 4.
- ครูเฉลยโดยการกดปุ่ม คำตอบทั้ง 4 ข้อ



รูปที่ 27

3. ครูตั้งคำถามว่ากราฟไม่ต่อเนื่องที่จุดใด ๆ และเพราะเหตุใด

4. นักเรียนช่วยกันตามความเข้าใจของตน อาจพบคำตอบเช่น กราฟต้องไม่ขาดตรงจุดนั้น กราฟเชื่อมกันที่จุดนั้น เส้นกราฟต้องต่อกันทั้งหมด เป็นต้น

5. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “1” ตามรูปที่ 24

- ครูตั้งคำถามว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีความต่อเนื่องที่ x = 3 หรือไม่
- นักเรียนช่วยกันค้นหาคำตอบและแสดงเหตุผลตามที่ตนเข้าใจ
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามและคำตอบ ข้อ 1. ถึง 4.

6. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Exlim-pic2” ตามรูปที่ 25

- ครูตั้งคำถามว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีความต่อเนื่องที่ x = 3 หรือไม่
- นักเรียนช่วยกันค้นหาคำตอบและแสดงเหตุผลตามที่ตนเข้าใจ
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามและคำตอบ ข้อ 1. ถึง 4.

7. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Exlim-pic3” ตามรูปที่ 26

- ครูตั้งคำถามว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีความต่อเนื่องที่ x = 1 หรือไม่
- นักเรียนช่วยกันค้นหาคำตอบและแสดงเหตุผลตามที่ตนเข้าใจ
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามและคำตอบ ข้อ 1. ถึง 4.

8. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Exlim-pic4” ตามรูปที่ 27

- ครูตั้งคำถามว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีความต่อเนื่องที่ x = 2 หรือไม่
- นักเรียนช่วยกันค้นหาคำตอบและแสดงเหตุผลตามที่ตนเข้าใจ
- ให้นักเรียนพิจารณาคำถามและคำตอบ ข้อ 1. ถึง 4.

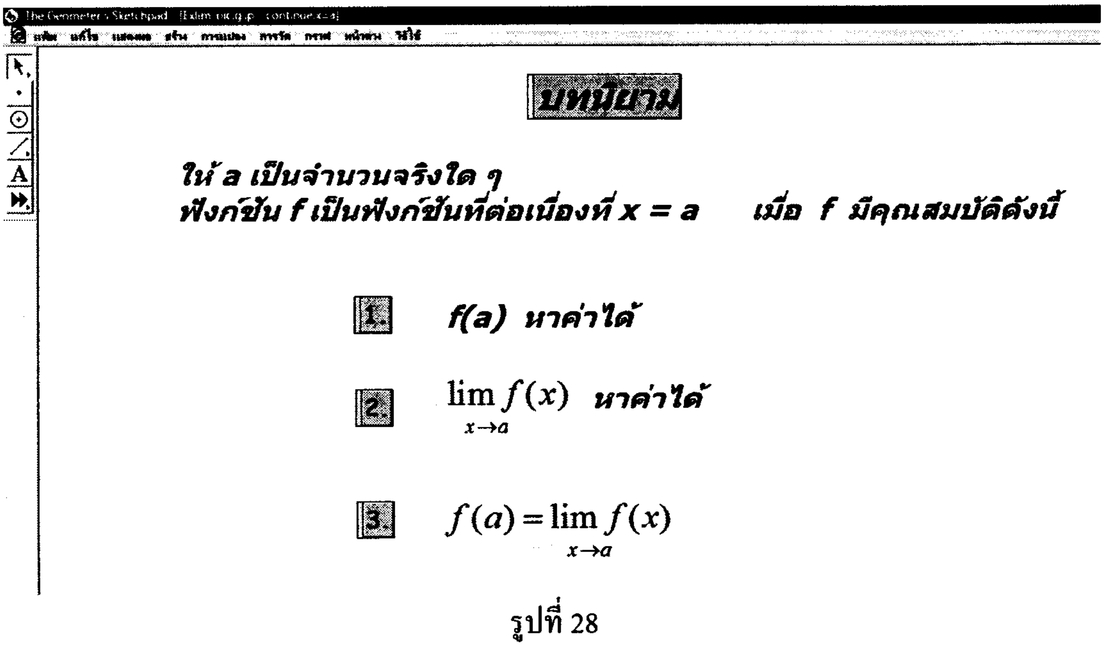
9. ครูเฉลยว่า กราฟของฟังก์ชันในรูปที่ 24 ต่อเนื่องที่ x = 3 กราฟของฟังก์ชันในรูปที่ 25 ไม่ต่อเนื่องที่ x = 3 กราฟของฟังก์ชันในรูปที่ 26 ไม่ต่อเนื่องที่ x = 1 และ กราฟของฟังก์ชันในรูปที่ 27 ไม่ต่อเนื่องที่ x = 2

10. ให้นักเรียนช่วยกันอภิปราย ว่า ฟังก์ชันจะมีความต่อเนื่องที่ x = a จะต้องมีเงื่อนไขใดบ้าง โดยครูเปิดกราฟรูปที่ 24 ถึง 27 และให้นักเรียนพิจารณาคำถามและคำตอบทั้ง 4 ข้อ อีกครั้ง

11. ครูสรุปความคิดเห็นของนักเรียนอีกครั้ง

12. ครูสรุป บทนิยาม และอธิบายฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ จุด x = a โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Continue.x=a” ตาม รูปที่ 28 ดังนี้

- ครูกดปุ่ม “บทนิยาม” เพื่อแสดง ข้อตกลงเบื้องต้นของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “1.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 1. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “2.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 2. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “3.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 3. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- หากขาดเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่ง นั่นแสดงว่า ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = a



รูปที่ 28

13. ครูแสดงตัวอย่างที่ 15 กำหนด $f(x)=\begin{cases}1, x<0\\ x+1, 0\leq x<2\\ 2, x\geq 2\end{cases}$ f ต่อเนื่องที่ x = 2 หรือไม่ ดังนี้

- สุ่มนักเรียนตอบคำถาม f จะต่อเนื่องที่ x = 2 ต้องมีเงื่อนไขใดบ้าง
- ครูเขียนสรุปเงื่อนไขที่ต้องหาบนกระดาน คือ
    1. หาค่า f(2)
    2. หาค่า $\lim_{x\to 2} f(x)$
    3. พิจารณา ค่า f(2) = $\lim_{x\to 2} f(x)$ หรือไม่
- ให้นักเรียนหาคำตอบแต่ละข้อ โดยครูเขียนวิธีทำบนกระดานที่ละขั้นตอน

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปทบทวนบทนิยาม ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ จุด x = a ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ จุด x = a โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Continue.x=a” ตาม รูปที่ 28 ดังนี้

- ครูกดปุ่ม “บทนิยาม” เพื่อแสดง ข้อตกลงเบื้องต้นของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “1.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 1. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “2.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 2. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “3.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 3. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- หากขาดเงื่อนไขข้อหนึ่งข้อใด นั่นแสดงว่า ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = a

สื่อการเรียนรู้

1. สื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต
2. ใบกิจกรรมที่ 5

การวัดและการประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามในชั้นเรียนได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำใบกิจกรรมที่ครูมอบหมายได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรมในห้องเรียน

ใบกิจกรรมที่ 5

1. บทนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุด ใด ๆ กล่าวว่าอย่างไร

....

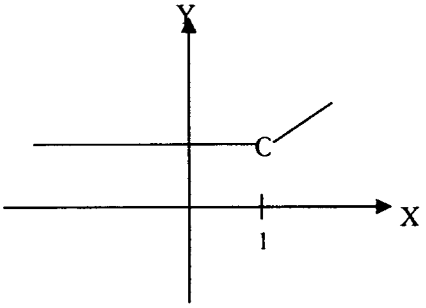
....

....

....

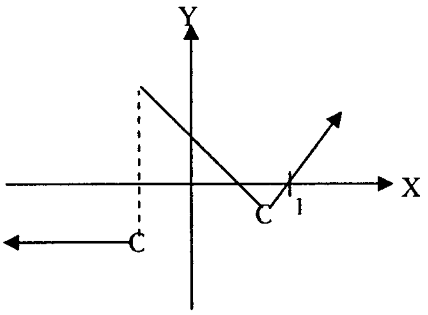
....

2. จากกราฟของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ กราฟของฟังก์ชันในข้อใดต่อเนื่องที่จุด x = 1



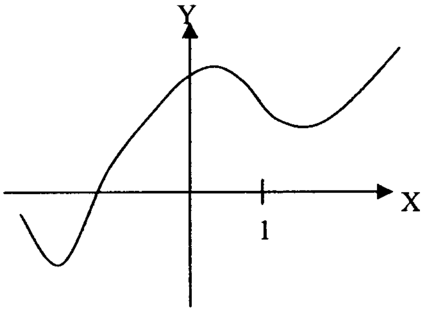
รูปที่ 1

....



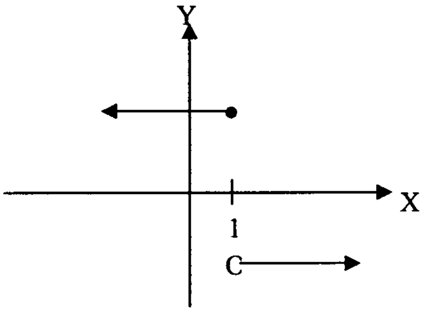
รูปที่ 2

....



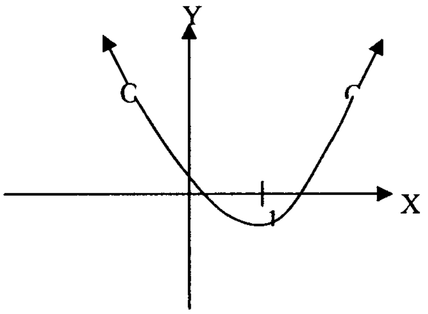
รูปที่ 3

....



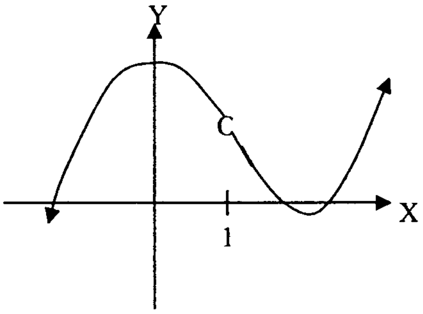
รูปที่ 4

....



รูปที่ 5

....



รูปที่ 6

....

3. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x+1 \; ; \; x \geq 1 \\ x-1 \; ; \; x < 1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องที่จุด x = 1 หรือไม่ พร้อมทั้งเขียนกราฟประกอบ

4. จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่

4.1 $f(x) = 2(x-1)^3, x = 1$

4.2 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$, $x = 1$

4.3 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ x^2+1 & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$

4.5 $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^3-1}$, $x = 1$

4.6 $f(x) = \begin{cases} 2, x > 0 \\ 1, x \leq 0 \end{cases}$, $x = 1$

แผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ 6 **ชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552**

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **คณิตศาสตร์ 6 รหัสวิชา ค 41116**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จำนวน 1 คาบ

สาระสำคัญ

บทนิยาม

1. ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a เมื่อฟังก์ชัน f มีสมบัติดังนี้

 1.1 $f(a)$ หาค่าได้

 1.2 $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ หาค่าได้

 1.3 $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

 หากขาดเงื่อนไขข้อใดข้อหนึ่ง นั่นแสดงว่า ฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = a

2. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b) ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. อธิบาย ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุด ใด ๆ ได้
2. อธิบาย ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง (a, b) ได้
3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ณ จุดที่กำหนดให้หรือไม่
4. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง (a, b) ที่กำหนดให้หรือไม่

สาระการเรียนรู้

ตัวอย่างที่ 16 จงพิจารณาว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้ ต่อเนื่องที่ x = 1 และ x = 2 หรือไม่

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x(x-1)}{x^2 - 3x + 2} & ; x \neq 1, 2 \\ -3 & ; x = 1 \\ 4 & ; x = 2 \end{cases}$$

วิธีทำ พิจารณาที่ x = 1

1. f(1) = -3

2. $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x(x-1)}{x^2-3x+2}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x(x-1)}{(x-1)(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x}{(x-2)}$

$= \lim\limits_{x\to 1}(-3) \quad = \quad -3$

3. $f(1) = \lim\limits_{x\to 1} f(x) = -3$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องที่ x = 1

พิจารณาที่ x = 2

1. f(2) = 4

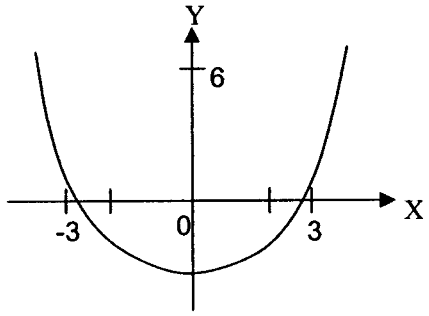
2. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x(x-1)}{x^2-3x+2}$

$= \dfrac{6}{0}$

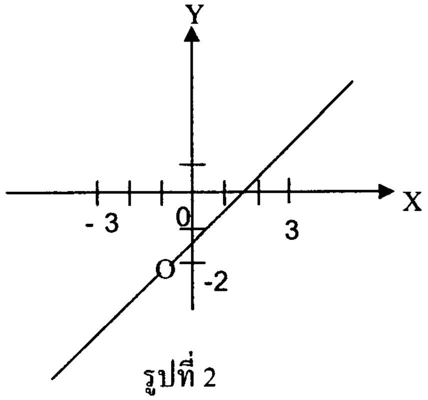
จะได้ ว่า ฟังก์ชัน f ไม่มีลิมิตที่ 2

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่ x = 2

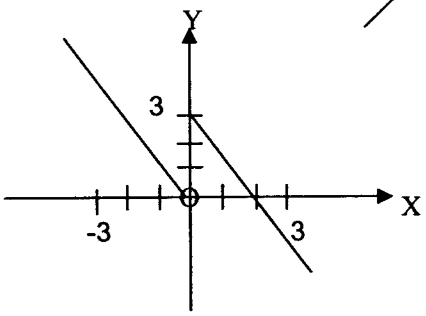
ตัวอย่างที่ 17 กำหนด กราฟฟังก์ชัน f จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องบนช่วง (-3, 3) หรือไม่



รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3

พิจารณารูปที่ 1 ในช่วง (-3, 3)

จากรูปจะพบว่าในช่วง (-3, 3) กราฟของฟังก์ชันดังกล่าวจะมีลักษณะต่อเนื่องกันทุก ๆ จุด แสดงว่า ฟังก์ชัน f มีความต่อเนื่องบนช่วงเปิด (-3, 3)

พิจารณารูปที่ 2 ในช่วง (-3, 3)

ที่ x = -1 ไม่สามารถหาค่า f(-1) ได้ ดังนั้น ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องที่จุด x = -1

แสดงว่า ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (-3, 3)

พิจารณารูปที่ 3 ในช่วง (-3, 3)

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ และ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$

ดังนั้น $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

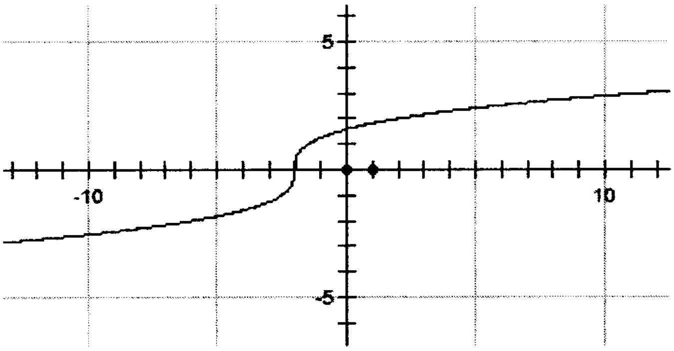
แสดงว่า $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ หาค่าไม่ได้ f จึงไม่ต่อเนื่องที่ x = 0

ฟังก์ชัน f ไม่ต่อเนื่องบนช่วงเปิด (-3, 3)

ตัวอย่างที่ 18 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่

1. f(x) = $\sqrt[3]{2x+4}, x \in (-5,5)$

พิจารณาโดเมนของฟังก์ชัน และกราฟของฟังก์ชัน

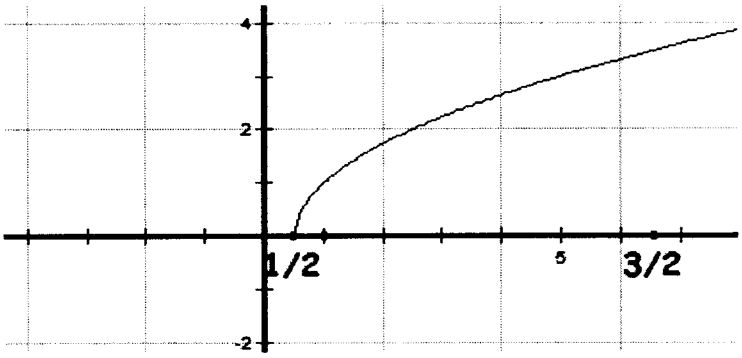


จะได้ว่า $D_f = R$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง (-5, 5)

2. f(x) = $\sqrt{2x-1}, x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$

พิจารณาโดเมนของฟังก์ชัน และกราฟของฟังก์ชัน



จะได้ว่า $D_f = \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$

ดังนั้น ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

แบบฝึกหัด

1. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & ; x \le -1 \\ \dfrac{x-2x-3}{x+1} & ; -1 < x < 0 \\ x-3 & ; x \ge 0 \end{cases}$ พิจารณา f ต่อเนื่องที่ x = -1 และที่ x = 0 หรือไม่

2. ให้ $f(x) = \begin{cases} A\sin x & ; x < \dfrac{\pi}{2} \\ B+5 & ; x = \dfrac{\pi}{2} \\ 1+\sin x & ; x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่อง ณ จุด $x = \frac{\pi}{2}$ แล้ว จงหาค่าของ A + B

3. กำหนดให้ f(x) = $\dfrac{2x^2-x-6}{\sqrt{x+7}-3}$ และ g(x) = $\sqrt{x+7}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 2 แล้ว (gof)(2) มีค่าเท่าใด

4. จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่

4.1 $f(x) = \dfrac{4x^2 - 25}{2x+5}$; $x \in (-3, 3)$

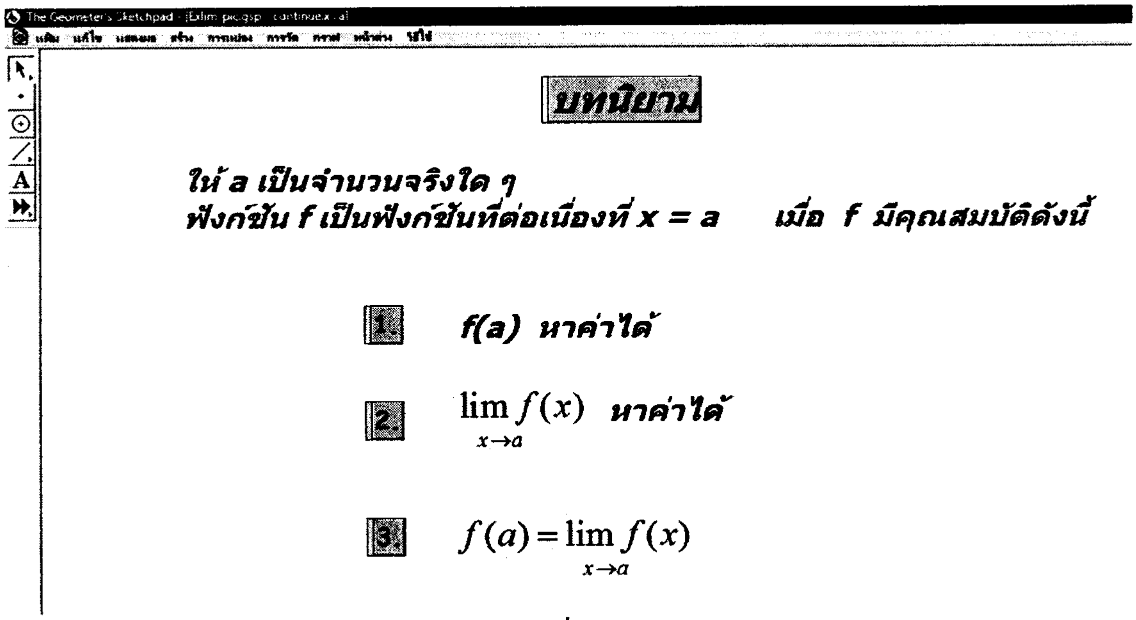
4.2 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$; $x \in (-1, 1)$

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. ให้นักเรียนช่วยกันทบทวนนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ ครูเรียนสุ่มเป็นรายบุคคล โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร "Continue.x=a" ตาม รูปที่ 29 ดังนี้

- ครูกดปุ่ม "บทนิยาม" เพื่อแสดง ข้อตกลงเบื้องต้นของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม "1." เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 1. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม "2." เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 2. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม "3." เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 3. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a



รูปที่ 29

ขั้นสอน

1. ครูแสดงตัวอย่างที่ 16 กำหนด $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x(x-1)}{x^2-3x+2} & ; x \neq 1, 2 \\ -3 & ; x = 1 \\ 4 & ; x = 2 \end{cases}$

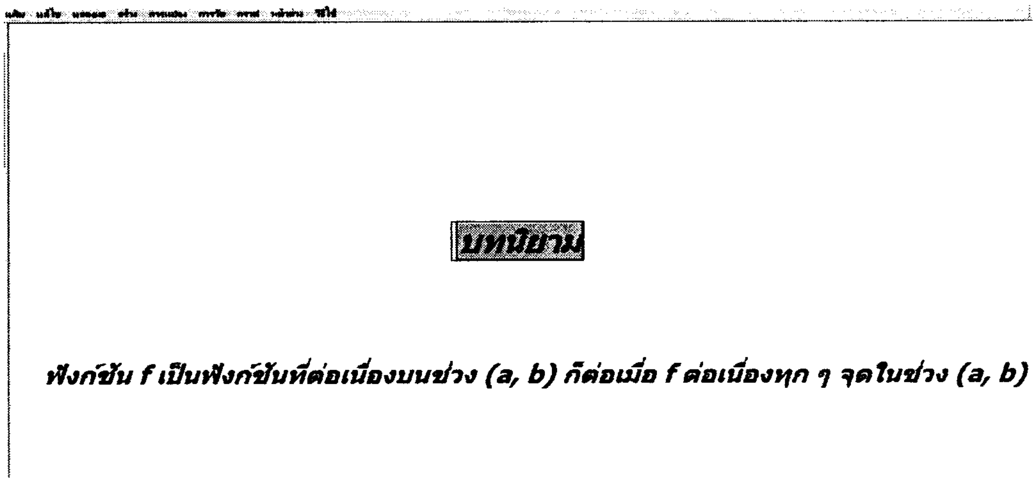
f ต่อเนื่องที่ x = 1 และ x = 2 หรือไม่ ดังนี้

- สุ่มนักเรียนตอบคำถาม f จะต่อเนื่องที่ x = 1 ต้องมีเงื่อนไขใดบ้าง
- ครูเขียนสรุปเงื่อนไขที่ต้องหาบนกระดาน คือ
    1. หาค่า f(1)
    2. หาค่า $\lim_{x\to 1} f(x)$
    3. พิจารณา ค่า f(1) = $\lim_{x\to 1} f(x)$ หรือไม่
- ให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายหาคำตอบแต่ละข้อ โดยครูเขียนวิธีทำบนกระดานทีละขั้นตอน
- สุ่มนักเรียนตอบคำถาม f จะต่อเนื่องที่ x = 2 ต้องมีเงื่อนไขใดบ้าง
- ครูเขียนสรุปเงื่อนไขที่ต้องหาบนกระดาน คือ
    1. หาค่า f(2)
    2. หาค่า $\lim_{x\to 2} f(x)$
    3. พิจารณา ค่า f(2) = $\lim_{x\to 2} f(x)$ หรือไม่
- ให้นักเรียนช่วยกันอภิปรายหาคำตอบแต่ละข้อ โดยครูเขียนวิธีทำบนกระดานทีละขั้นตอน

2. นักเรียนช่วยกันสรุปบทนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ

3. ครูอธิบายบทนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง (a, b) โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต

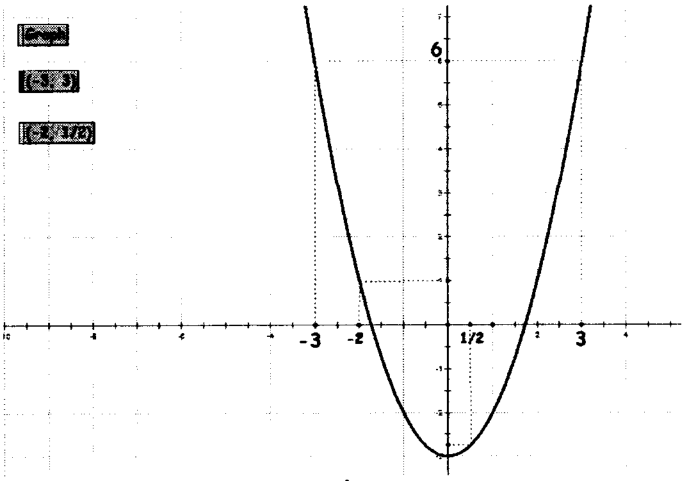
ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร "Continue.x=a" ตาม รูปที่ 30 ดังนี้



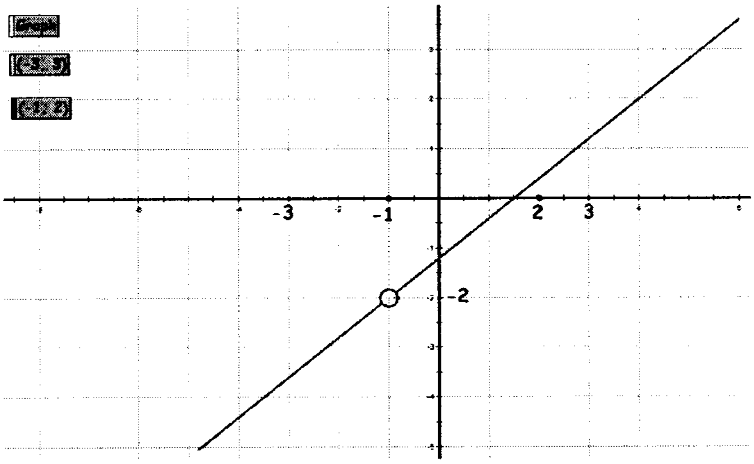
รูปที่ 30

4. ครูแสดงตัวอย่างที่ 17 โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file - Continu1 หน้าเอกสาร "1" ถึง หน้าเอกสาร "3" ตามรูปที่ 31 ถึง 33 ดังนี้

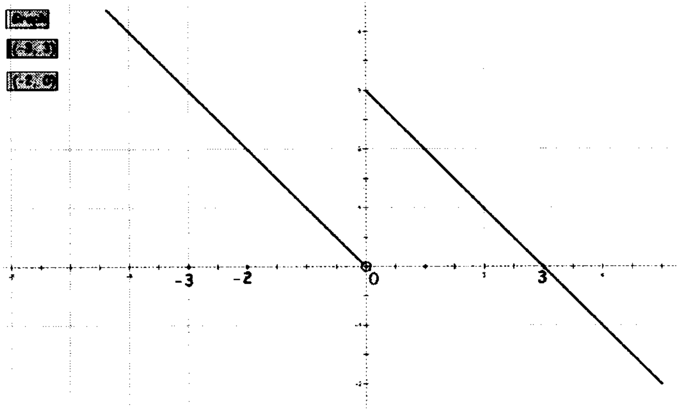
- ครูแสดงกราฟโดยการกดปุ่ม "Graph" และ "(-3, 3)"
- ครูถามนักเรียนว่า กราฟของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่ ซึ่งมีสองช่วงในแต่ละข้อ
- นักเรียนช่วยกันอภิปรายหาคำตอบพร้อมทั้งบอกเหตุผล



รูปที่ 31



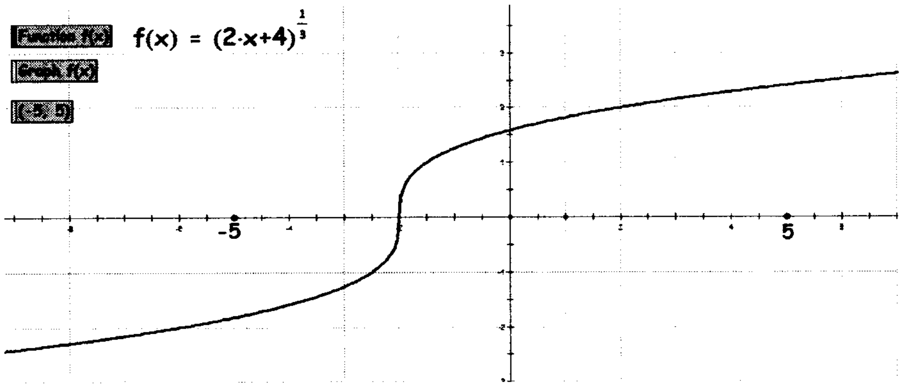
รูปที่ 32



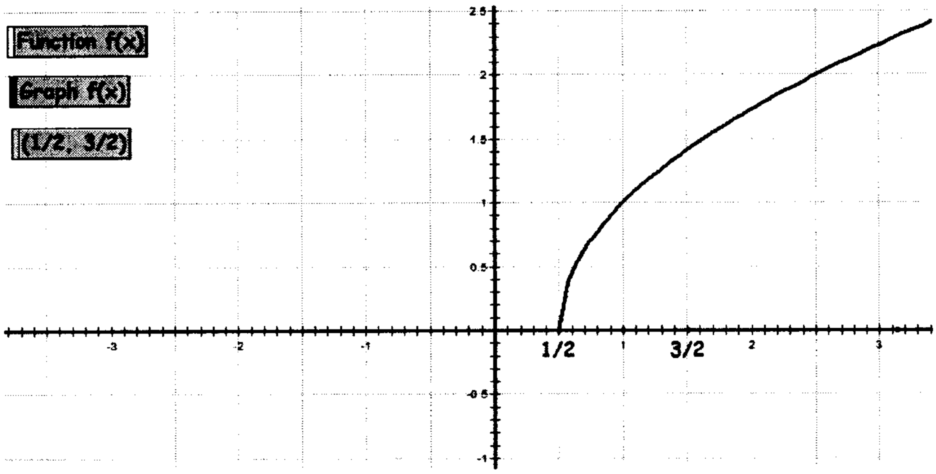
รูปที่ 33

5. ครูแสดงตัวอย่างที่ 18 โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Continu2 หน้าเอกสาร "1" ถึง หน้าเอกสาร "2" ตามรูปที่ 34 ถึง 35 ดังนี้

- ครูแสดงกราฟโดยการกดปุ่ม "Function f(x)"
- ให้นักเรียนพิจารณาโดเมนและกราฟของฟังก์ชัน
- ครูแสดงกราฟของฟังก์ชันและกำหนดช่วงความต่อเนื่อง โดยการกดปุ่ม "Graph" และ "(-5, 5)"
- ครูถามนักเรียนว่า กราฟของฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่
- นักเรียนช่วยกันอภิปรายหาคำตอบพร้อมทั้งบอกเหตุผล



รูปที่ 34



รูปที่ 35

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปทบทวนบทนิยาม ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ จุด x = a โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Continue.x=a” ตาม รูปที่ 29 ดังนี้

- ครูกดปุ่ม “บทนิยาม” เพื่อแสดง ข้อตกลงเบื้องต้นของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “1.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 1. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “2.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 2. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “3.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 3. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a

2. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปทบทวนบทนิยาม ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b) โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Continue.x=a” ตาม รูปที่ 30

สื่อการเรียนรู้

1. สื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต
2. ใบกิจกรรมที่ 6

การวัดและการประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามในชั้นเรียนได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำใบกิจกรรมที่ครูมอบหมายได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรมในห้องเรียน

ใบกิจกรรมที่ 6

1. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & ; x \le -1 \\ \dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & ; -1 < x < 0 \\ x-3 & ; x \ge 0 \end{cases}$ พิจารณา f ต่อเนื่องที่ x = -1

และที่ x = 0 หรือไม่

2. ให้ $f(x) = \begin{cases} A\sin x & ; x < \dfrac{\pi}{2} \\ B+5 & ; x = \dfrac{\pi}{2} \\ 1+\sin x & ; x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่อง ณ จุด $x = \dfrac{\pi}{2}$

แล้ว จงหาค่าของ A + B

3. กำหนดให้ f(x) = $\dfrac{2x^2 - x - 6}{\sqrt{x+7} - 3}$ และ g(x) = $\sqrt{x+7}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 2 แล้ว (gof)(2) มีค่าเท่าใด

4. จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่

4.1 $f(x) = \dfrac{4x^2 - 25}{2x + 5}$; $x \in (-3, 3)$

4.2 $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$; $x \in (-1, 1)$

แผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ 7 **ชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552**

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **คณิตศาสตร์ 6 รหัสวิชา ค 41116**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เรื่อง ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน จำนวน 1 คาบ

สาระสำคัญ

บทนิยาม

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] ก็ต่อเมื่อ

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)
2. $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ และ $f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$

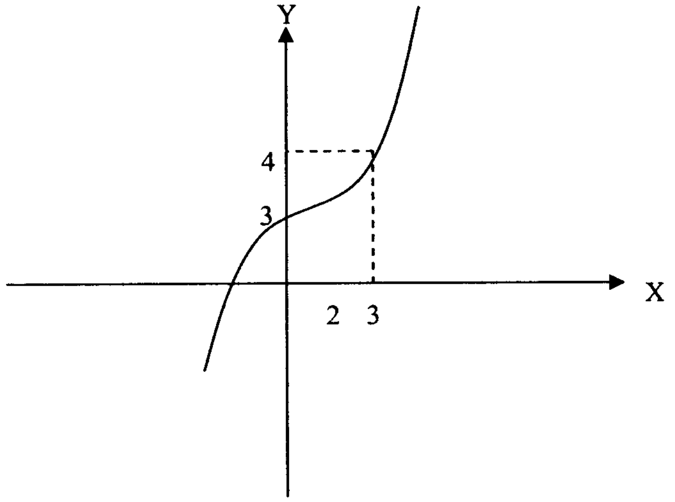
จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. เขียนบทนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน บนช่วง [a, b] ได้
2. อธิบายความต่อเนื่องของฟังก์ชัน บนช่วง [a, b] ได้
3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง บนช่วง [a, b] ที่กำหนดให้หรือไม่

สาระการเรียนรู้

ตัวอย่างที่ 19 กำหนด $f(x) = (x-2)^3 + 3$ จงพิจารณาฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบน [1, 3] หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ

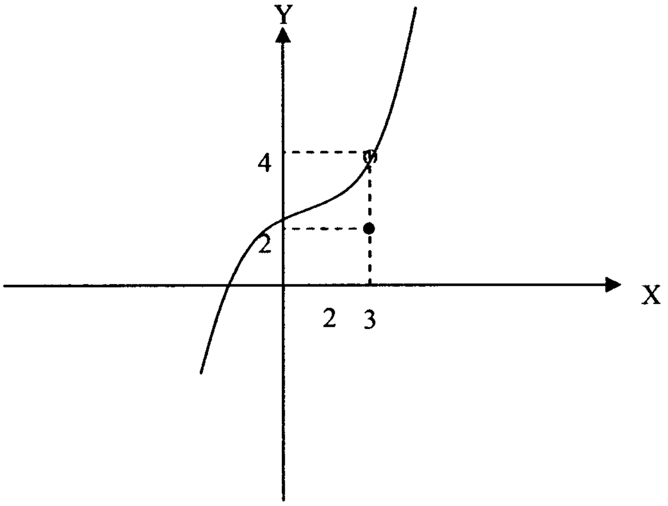


1. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-}[(x-2)^2+3] = 2$
2. $f(1) = 2$
3. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}[(x-2)^2+3] = 4$
4. $f(3) = 4$
5. f ต่อเนื่องบนช่วง(1, 3)

ดังนั้น f ต่อเนื่องบน [1, 3]

ตัวอย่างที่ 20 กำหนด $f(x)=\begin{cases}(x-2)^3+3 & ; \quad x\neq 3\\ 2 & ; \quad x=3\end{cases}$ จงพิจารณาฟังก์ชันมีความต่อเนื่อง บน [1, 3] หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ



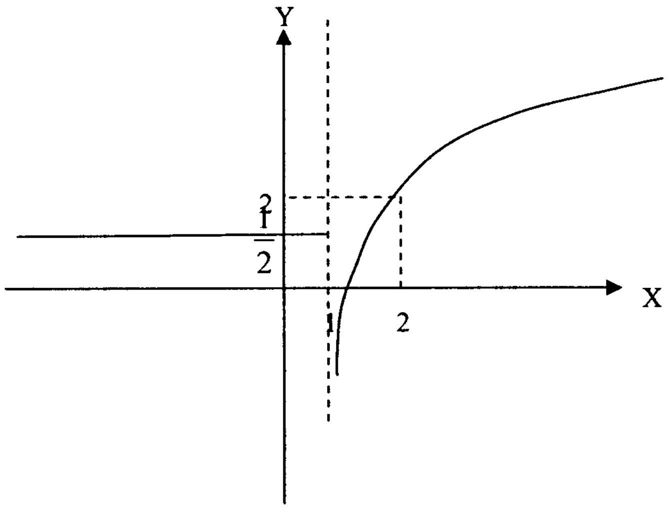
1. $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-}[(x-2)^2+3] = 2$
2. $f(1) = 2$
3. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}[(x-2)^2+3] = 4$
4. $f(3) = 2$

จะได้ว่า $\lim_{x\to 3^-} f(x) \neq f(3)$

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องต่อเนื่องบน [1, 3]

ตัวอย่างที่ 21 กำหนด $f(x)=\begin{cases}\log(x-1)+2 & ; \quad x>1 \\ \frac{1}{2} & ; \quad x\le 1\end{cases}$ จงพิจารณาฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบน [1, 3] หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ

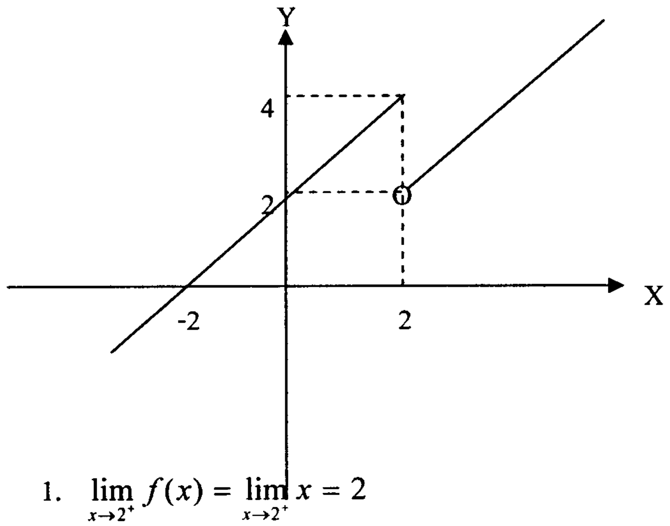


1. $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องต่อเนื่องบน [1, 3]

ตัวอย่างที่ 22 กำหนด $f(x)=\begin{cases}x+2 & ; \quad x\le 2 \\ x & ; \quad x>2\end{cases}$ จงพิจารณาฟังก์ชันมีความต่อเนื่องบน [2, 3] หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาจากกราฟ



1. $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} x = 2$
2. $f(2) = 4$

จะได้ว่า $\lim\limits_{x\to=2^+} f(x) \neq f(2)$

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องต่อเนื่องบน [2, 3]

ตัวอย่างที่ 23 f(x) = $\sqrt{9-x^2}$ บนช่วง [-3, 3]

วิธีทำ $\sqrt{9-x^2}$ จะมีความหมายเมื่อ $9-x^2 \ge 0$

$$x^2 \le 0$$

$$|x| \le 3$$

$$-3 \le x \le 3$$

โดเมนของ f คือ [-3, 3]

ถ้า a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ในช่วง (-3, 3) จะได้ว่า มี $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{9-x^2}$ และ ลิมิตเท่ากับ $\sqrt{9-a^2}$ ดังนั้น f ต่อเนื่องบนช่วง (-3, 3)

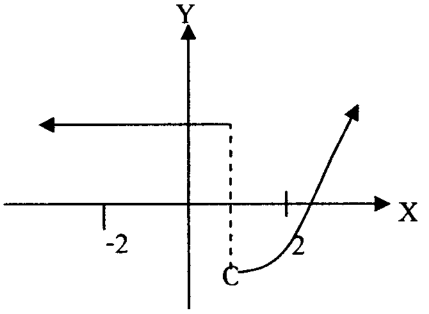
$$\lim_{x\to -3^+} f(x) = f(-3) = 0$$

$$\lim_{x\to -3^-} f(x) = f(3) = 0$$

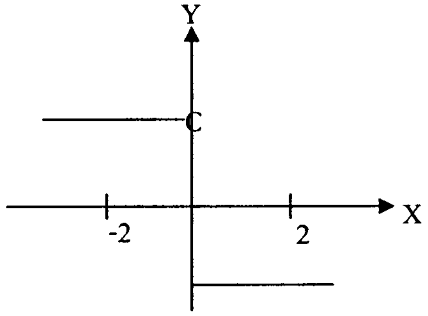
ดังนั้น f ต่อเนื่องบนช่วง [-3, 3]

แบบฝึกหัด

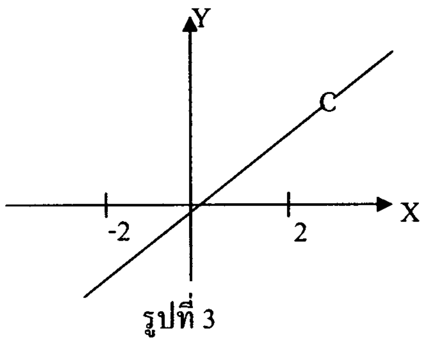
1. จากกราฟที่กำหนดให้ ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบนช่วง [-2, 2] หรือไม่



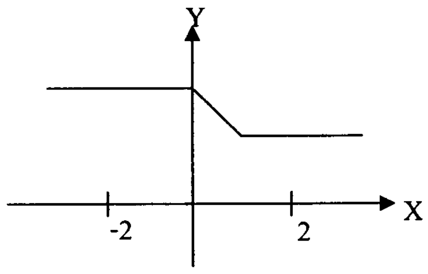
รูปที่ 1



รูปที่ 2



รูปที่ 3



รูปที่ 4

2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x+1} ; 5 < x \le 8 \\ 10 \quad ; \ x = 5 \end{cases}$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [5, 8]

3. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} ; \ x \ne 0 \\ 1 \quad ; \ x = 0 \end{cases}$ จงพิจารราว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [-1, 1] หรือไม่

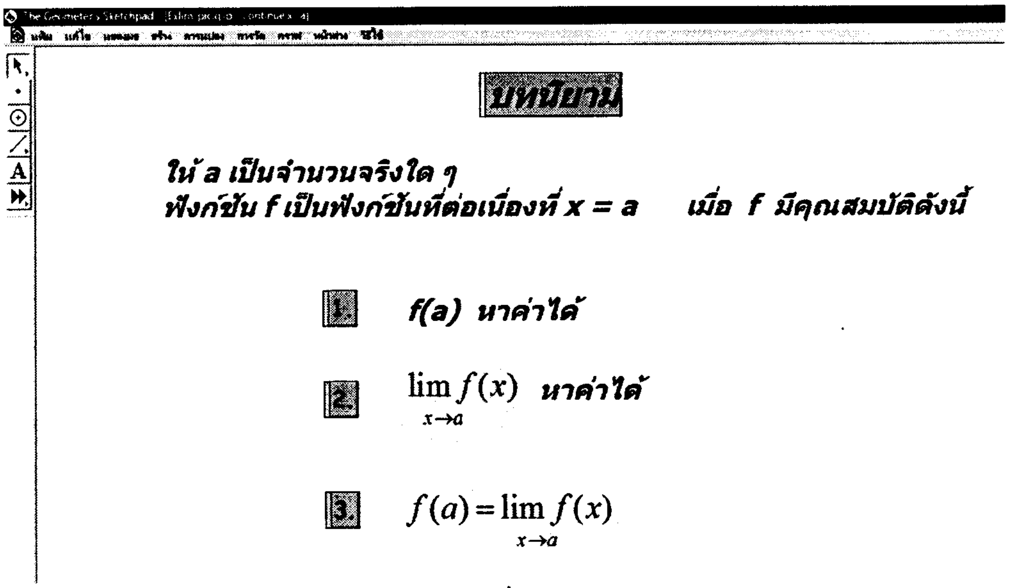
4. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 2; x < 2 \\ x + 4; x \ge 2 \end{cases}$ จงพิจารราว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [2, 3] หรือไม่

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

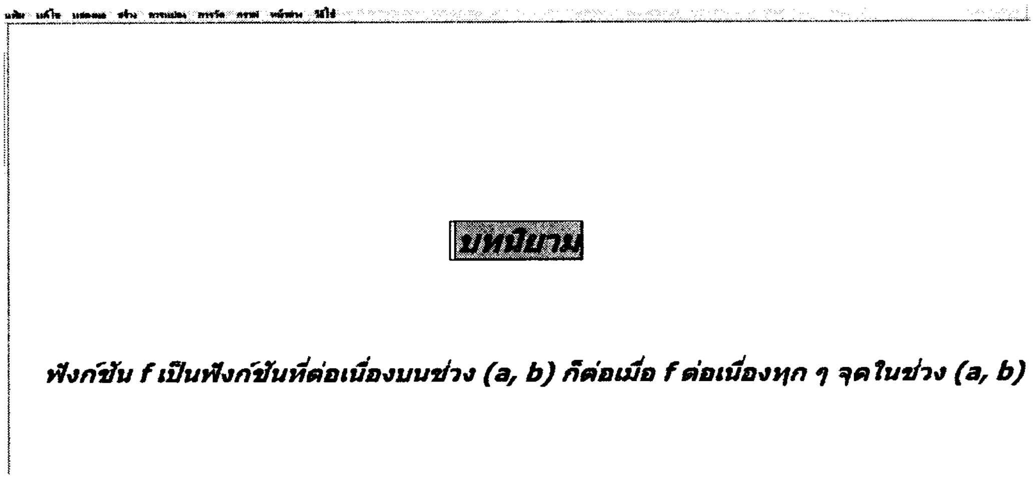
1. ครูและนักเรียนช่วยกันทบทวนนิยาม ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องที่ จุด x = a โดยแสดงสื่อโปรแกรมเราขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Continue.x=a” ตาม รูปที่ 36 ดังนี้

- ครูกดปุ่ม “บทนิยาม” เพื่อแสดง ข้อตกลงเบื้องต้นของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “1.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 1. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “2.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 2. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a
- ครูกดปุ่ม “3.” เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 3. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a



รูปที่ 36

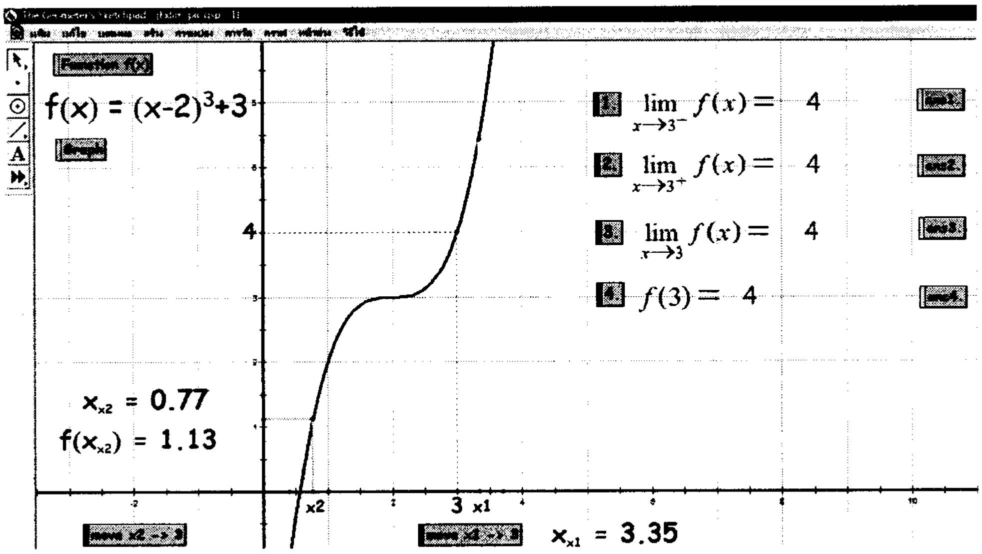
2. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปนิยาม ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนช่วง (a, b) โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Continue.x=a” ตาม รูปที่ 37 ดังนี้



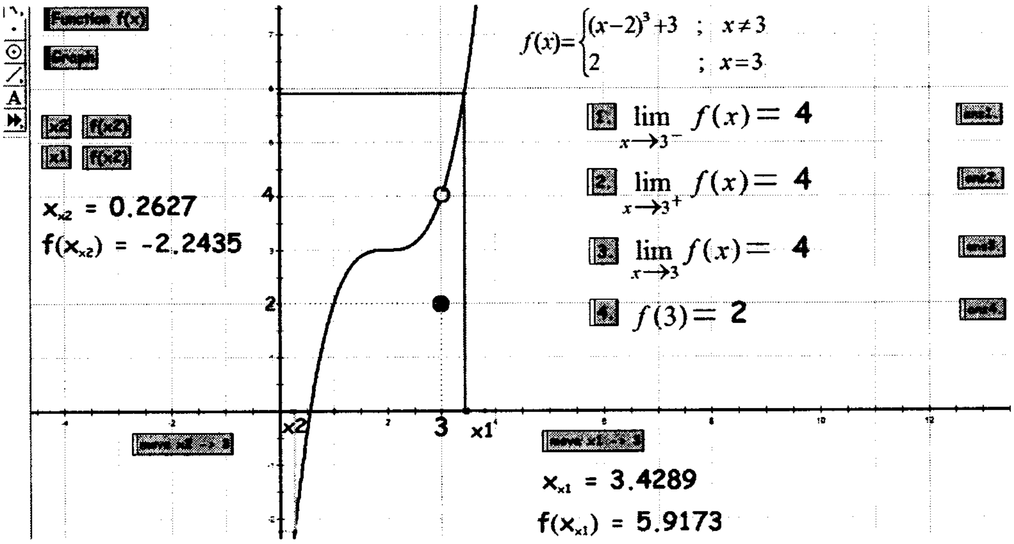
รูปที่ 37

3. ครูทบทวนเรื่องความต่อเนื่องของฟังก์ชันบน (a, b) โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “1”, “Exlim-pic2” และ “Exlim-pic3” ตามรูปที่ 38 - 40 ตามลำดับ ดังนี้

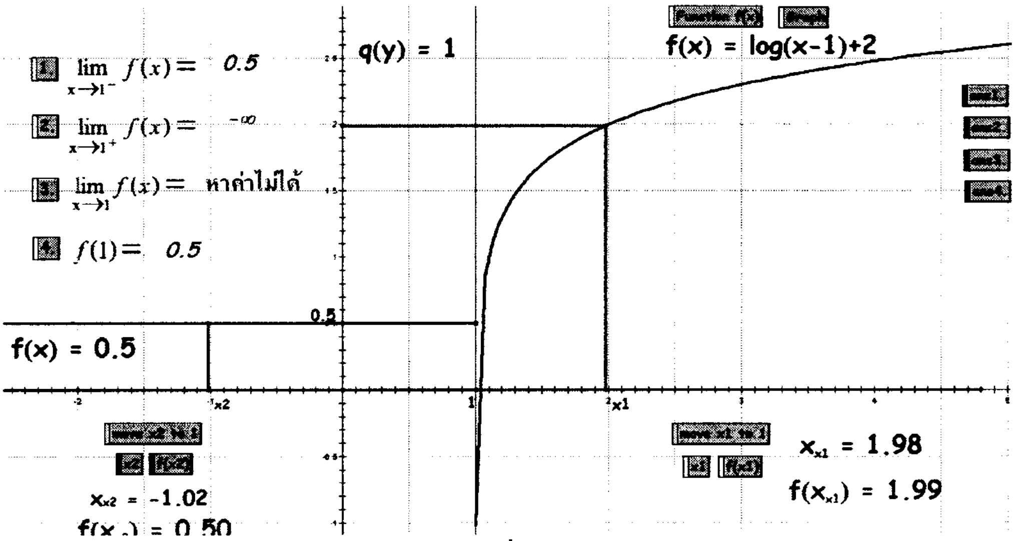
- ครูกำหนดฟังก์ชัน $f(x)=(x-2)^3+3$ โดยกดปุ่ม Function f(x) และแสดงกราฟ โดยกดปุ่ม "Graph"
- ให้นักเรียนพิจารณากราฟของฟังก์ชัน และตอบคำถามว่าฟังก์ชัน f ความต่อเนื่องของฟังก์ชันบน (1, 3) หรือไม่ พร้อมทั้งให้เหตุผล
- ให้นักเรียนตอบค่าของ f(1) และ f(3) มีค่าเป็นเท่าใด



รูปที่ 38



รูปที่ 39



รูปที่ 40

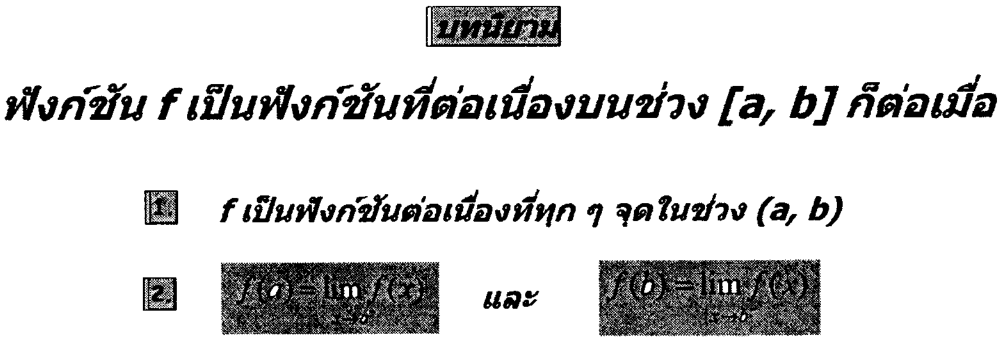
ขั้นสอน

1. ครูตั้งคำถามว่ากราฟจะต่อเนื่องบน [a, b] กราฟความมีลักษณะอย่างไร

2. นักเรียนช่วยกันตามความเข้าใจของตน อาจพบคำตอบเช่น กราฟต้องไม่ขาดในช่วง [a, b] และ สามารถหาค่า f(a) และ f(b) ได้ เป็นต้น

3. ครูอธิบายนิยามฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร "Continue.[a,b]" ตาม รูปที่ 41 ดังนี้

- ครูกดปุ่ม "บทนิยาม" เพื่อแสดงข้อความ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน ช่วง [a, b] ก็ต่อเมื่อ
- ครูกดปุ่ม "1." เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 1. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน ช่วง [a, b]
- ครูกดปุ่ม "2." เพื่อแสดง เงื่อนไขข้อที่ 2. ของฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบน ช่วง [a, b]



รูปที่ 41

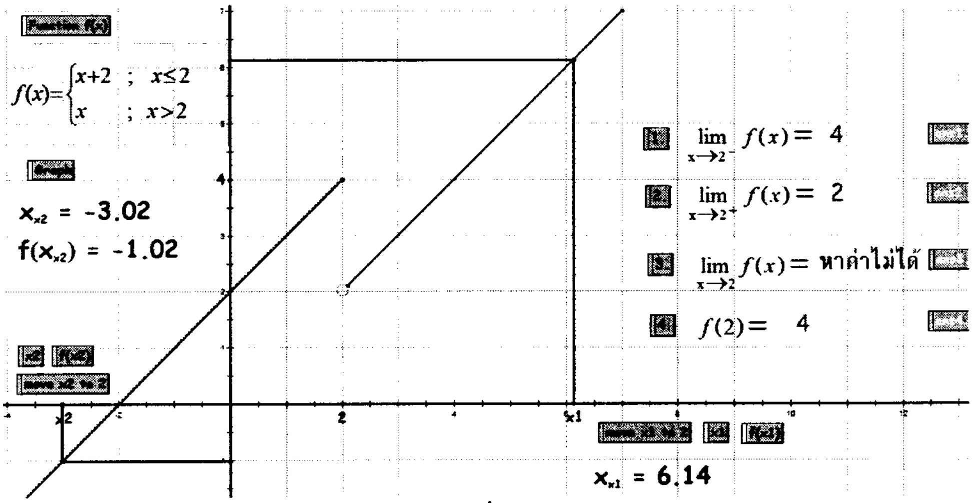
4. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “1” ตามรูปที่ 38

- ครูตั้งคำถามว่า ฟังก์ชันที่กำหนดให้มีความต่อเนื่องบนช่วง [1, 3] หรือไม่
- นักเรียนช่วยกันอภิปรายและแสดงเหตุผลตามที่ตนเข้าใจ
- ให้นักเรียนทุกคนเก็บคำตอบพร้อมทั้งเหตุผลของตนเองไว้
- ครูตั้งคำถาม f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (1, 3) หรือไม่
- สุ่มนักเรียนตอบคำถามพร้อมทั้งแสดงเหตุผล และครูเขียนคำตอบบนกระดาน
- ครูตั้งคำถาม ค่าของ f(1) เป็นเท่าใด
- สุ่มนักเรียนตอบคำถามพร้อมทั้งแสดงเหตุผล และครูเขียนคำตอบบนกระดาน
- ครูตั้งคำถาม ค่าของ $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ เป็นเท่าใด
- สุ่มนักเรียนตอบคำถามพร้อมทั้งแสดงเหตุผล และครูเขียนคำตอบบนกระดาน
- ครูตั้งคำถาม ค่าของ f(3) เป็นเท่าใด
- สุ่มนักเรียนตอบคำถามพร้อมทั้งแสดงเหตุผล และครูเขียนคำตอบบนกระดาน
- ครูตั้งคำถาม ค่าของ $\lim_{x \to 3^-} f(x)$ เป็นเท่าใด
- สุ่มนักเรียนตอบคำถามพร้อมทั้งแสดงเหตุผล และครูเขียนคำตอบบนกระดาน
- ให้นักเรียนพิจารณาคำตอบอีกครั้ง
- ครูสรุปว่า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [1, 3]

5. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Exlim-pic2” ตามรูปที่ 39 และทำกิจกรรมเช่นเดียวกับข้อที่ 4.

6. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Exlim-pic3” ตามรูปที่ 40 และทำกิจกรรมเช่นเดียวกับข้อที่ 4.

7. ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Exlim-pic4” ตามรูปที่ 42 และทำกิจกรรมเช่นเดียวกับข้อที่ 4. แต่เปลี่ยนเป็นช่วง [2, 3]



รูปที่ 42

8. ครูแสดงตัวอย่างที่ 23 $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ บนช่วง [-3, 3] ดังนี้

- สุ่มนักเรียนตอบคำถาม f จะต่อเนื่อง [-3, 3] ต้องมีเงื่อนไขใดบ้าง
- ครูเขียนสรุปเงื่อนไขที่ต้องหาบนกระดาน คือ

1. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (-3, 3)
2. $f(-3) = \lim_{x\to -3^+} f(x)$ และ $f(3) = \lim_{x\to 3^-} f(x)$

- ให้นักเรียนหาคำตอบแต่ละข้อ โดยครูเขียนวิธีทำบนกระดานทีละขั้นตอน

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปทบทวนบทนิยาม ฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบน [a, b] โดยแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file – Exlim-pic หน้าเอกสาร “Continue.[a,b]” ตามรูปที่ 41

สื่อการเรียนรู้

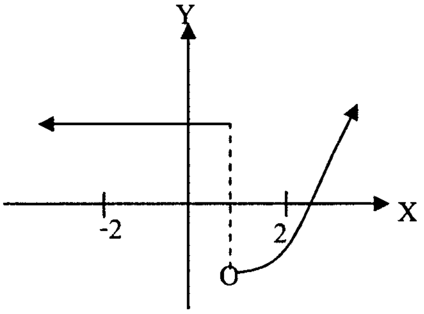
1. สื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต
2. ใบกิจกรรมที่ 7

การวัดและการประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามในชั้นเรียนได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำใบกิจกรรมที่ครูมอบหมายได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรมในห้องเรียน

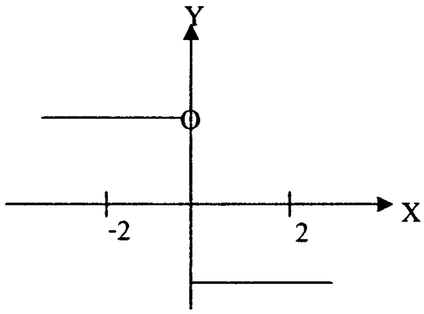
ใบกิจกรรมที่ 7

1. จากกราฟที่กำหนดให้ ฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบนช่วง [-2, 2] หรือไม่



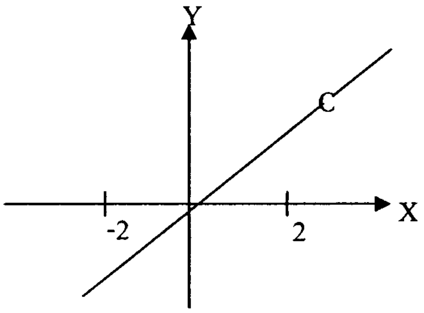
รูปที่ 1

....



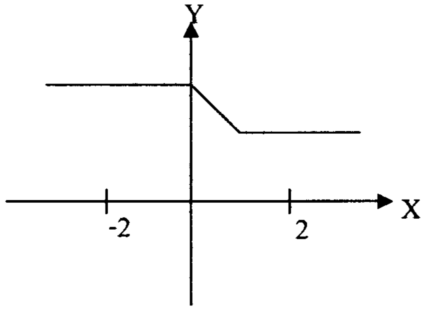
รูปที่ 2

....



รูปที่ 3

....



รูปที่ 4

....

2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & ; 5<x\le 8\\ 10 & ; x=5\end{cases}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [5, 8]

3. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & ; \ x \neq 0 \\ 1 & ; \ x = 0 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [-1, 1] หรือไม่

4. ให้ f เป็นฟังก์ชันที่กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x + 2; x < 2 \\ x + 4; x \geq 2 \end{cases}$ จงพิจารณาว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [2, 3] หรือไม่

แผนการจัดการเรียนรู้รายคาบที่ 8 **ชั้นปีที่ 3 ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2552**

กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ **คณิตศาสตร์ 6 รหัสวิชา ค 41116**

หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน(ทบทวน) จำนวน 1 คาบ

สาระสำคัญ

ลิมิตของฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท $\lim_{x\to a} f(x) = L$ **ก็ต่อเมื่อ** $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$

ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต

เมื่อ $a \in R$ และ f, g เป็นฟังก์ชันภายในเซตของจำนวนจริง

1. $\lim_{x\to a} c = c$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
2. $\lim_{x\to a} x = a$
3. $\lim_{x\to a} x^n = a^n$ เมื่อ $n \in I^+$
4. $\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ
5. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$
6. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$
7. $\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ เมื่อ $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$
8. $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [\lim_{x\to a} f(x)]^n$ เมื่อ $n \in I^+$
9. $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$ เมื่อ $n \in I^+ - \{1\}$ และ $\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} \in R$

บทนิยามความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

1. ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = a เมื่อฟังก์ชัน f มีคุณสมบัติดังนี้
   1.1 $f(a)$ หาค่าได้
   1.2 $\lim_{x\to a} f(x)$ หาค่าได้
   1.3 $f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$
2. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (a, b) ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)

3. ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [a, b] ก็ต่อเมื่อ

   3.1 f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)

   3.2 $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ และ $f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. เขียนบทนิยามลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้
2. อธิบายลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันได้
3. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้มีลิมิตหรือไม่ ถ้ามีสามารถหาลิมิตของฟังก์ชันได้
4. ระบุได้ว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่อง ณ จุด หรือช่วงที่กำหนดให้ หรือไม่

สาระการเรียนรู้

1. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 1 & ; x \le -1 \\ \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x+1} & ; -1 < x < 0 \\ x - 3 & ; x \ge 0 \end{cases}$

พิจารณา f ต่อเนื่องที่ x = -1 และที่ x = 0 หรือไม่

วิธีทำ พิจารณาที่ x = -1

1. f(-1) = 4
2. $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} (3x^2 + 1) = 4$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2 - 2x - 3}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1^+} \frac{(x-3)(x+1)}{x+1}$$
$$= \lim_{x \to -1^+} (x - 3)$$
$$= -4$$

$\lim_{x \to -1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องที่ x = -1

พิจารณาที่ x = 0

1. f(0) = -3
2. $\lim_{x \to -0^+} f(x) = \lim_{x \to -0^+} (x - 3) = -3$

$$\lim_{x\to -0^-} f(x) = \lim_{x\to -0^-} \frac{x^2-2x-3}{x+1}$$

$$= -3$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -3$$

ดังนั้น f ต่อเนื่องที่ x = 0

2. ให้ $f(x) = \begin{cases} A\sin x & ; x < \frac{\pi}{2} \\ B+5 & ; x = \frac{\pi}{2} \\ 1+\sin x & ; x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่อง ณ จุด $x = \frac{\pi}{2}$

แล้ว จงหาค่าของ A + B

วิธีทำ f ต่อเนื่อง ณ จุด $x = \frac{\pi}{2}$

1. $f(\frac{\pi}{2}) = B+5$

2. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (A\sin x)$

$$= (A\sin \frac{\pi}{2})$$

$$= A$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} (1+\sin x)$$

$$= (1+\sin \frac{\pi}{2})$$

$$= 2$$

ดังนั้น $A = 2$

จะได้ว่า $B+5 = 2$

$$B = -3$$

เพราะฉะนั้น $A+B = 2 + (-3) = -1$

3. กำหนดให้ f(x) = $\dfrac{2x^2-x-6}{\sqrt{x+7}-3}$ และ g(x) = $\sqrt{x+7}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่

x = 2 แล้ว (gof)(2) มีค่าเท่าใด

วิธีทำ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 2

$$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x)$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{\sqrt{x+7}-3}$$

$$= \lim_{x\to 2}[\frac{2x^2-x-6}{\sqrt{x+7}-3}\cdot\frac{\sqrt{x+7}+3}{\sqrt{x+7}-3}]$$

$$= \lim_{x\to 2}[\frac{(2x+3)(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x-2}]$$

$$= \lim_{x\to 2}[(2x+3)(\sqrt{x+7}+3)] = 42$$

จะได้ว่า $f(2) = 42$

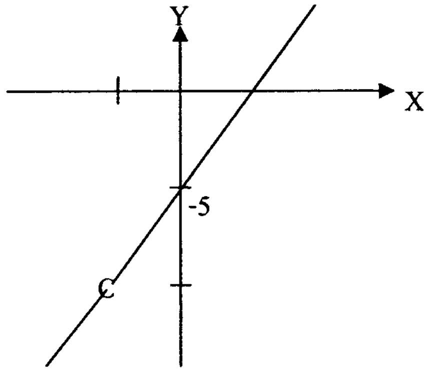
ดังนั้น (gof)(2) = g(f(2)) = g(42)

g(6) = $\sqrt{42+7} = 7$

4. จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่

4.1 $f(x) = \dfrac{4x^2-25}{2x+5}$; $x \in (-3, 3)$

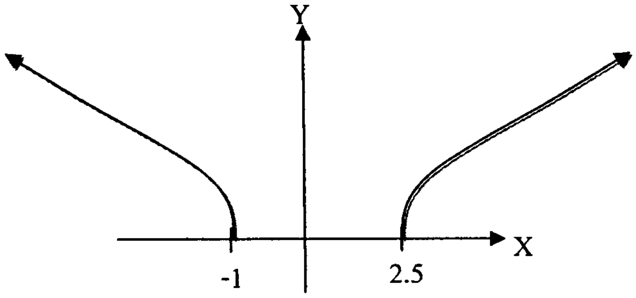
วิธีทำ



$D_f = R - \{-2.5\}$

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องบนช่วง (-3, 3)

4.2 $f(x) = \sqrt{2x^2-3x-5}$; $x \in (-5,-1)$



$D_f = R - (-1, 2.5)$

ดังนั้น f ไม่ต่อเนื่องบนช่วง (-5, -1)

5. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-25}{x-5} & ; 5<x\leq 8\\ 10 & ; x=5\end{cases}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [5, 8]

วิธีทำ 1. $f(5)=10$

2. $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+}(\dfrac{x^2-25}{x-5})$

$= \lim\limits_{x\to 5^+}[\dfrac{(x+5)(x-5)}{x-5}]$

$= 10$

$f(5) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = 10$

3. $f(8)=13$

4. $\lim\limits_{x\to 8^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 8^-}(\dfrac{x^2-25}{x-5})$

$= 13$

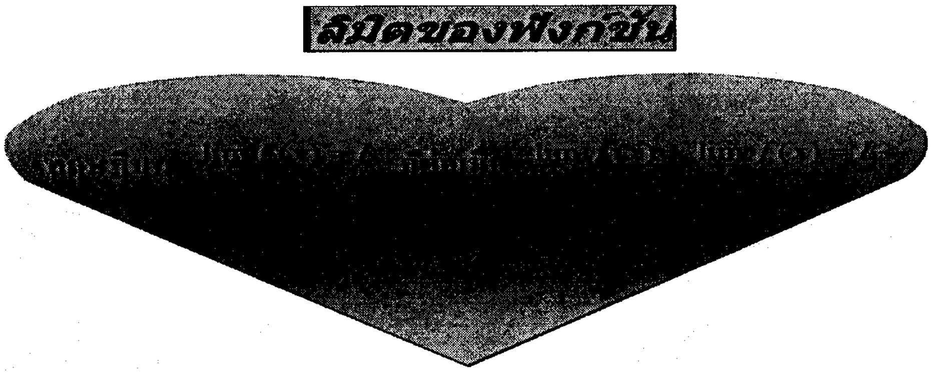
$f(8) = \lim\limits_{x\to 8^-} f(x) = 13$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [5, 8]

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำ

1. นักเรียนช่วยกันทบทวนนิยามนิยามลิมิต ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต และความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยเรียกสุ่มนักเรียนตอบทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต ทีละข้อ ครูแสดงสื่อโปรแกรมเรขาคณิตพลวัต ชื่อ file-Exlim-pic หน้าเอกสาร def.limit, TH.limit1-4, TH.limit5-9, continue.x=a, continue.(a, b) และ comtinue.[a,b] ดังรูปที่ 43-48 ตามลำดับ ดังนี้



รูปที่ 43

ทฤษฎีเกี่ยวกับลิมิต

เมื่อ $a \in R$ และ f, g เป็นฟังก์ชันภายในเซตของจำนวนจริง

1. $\lim\limits_{x \to a} c = c$ *เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใด ๆ*

2. $\lim\limits_{x \to a} x = a$

3. $\lim\limits_{x \to a} x^n = a^n$ *เมื่อ $n \in I^+$*

4. $\lim\limits_{x \to a} cf(x) = c\lim\limits_{x \to a} f(x)$

รูปที่ 44

5. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)$

6. $\lim\limits_{x \to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)$

7. $\lim\limits_{x \to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$ *เมื่อ* $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$

8. $\lim\limits_{x \to a}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x \to a} f(x)]^n$

9. $\lim\limits_{x \to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$

รูปที่ 45

บทนิยาม

ให้ a เป็นจำนวนจริงใด ๆ
ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องที่ x = a เมื่อ f มีคุณสมบัติดังนี้

1. *f(a) หาค่าได้*
2. $\lim_{x \to a} f(x)$ *หาค่าได้*
3. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

รูปที่ 46

บทนิยาม

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง (a, b) ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)

รูปที่ 47

บทนิยาม

ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง [a, b] ก็ต่อเมื่อ

1. *f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (a, b)*
2. $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$ *และ* $f(b) = \lim_{x \to b} f(x)$

รูปที่ 48

ขั้นสอน

1. ครูแสดงวิธีทำ โดยเลือกจากใบกิจกรรมที่ 6 เช่น

ข้อที่ 1. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} 3x^2+1 & ; x \le -1 \\ \dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & ; -1 < x < 0 \\ x-3 & ; x \ge 0 \end{cases}$

พิจารณา f ต่อเนื่องที่ x = -1 และที่ x = 0 หรือไม่

ข้อที่ 2. ให้ $f(x) = \begin{cases} A\sin x & ; x < \dfrac{\pi}{2} \\ B+5 & ; x = \dfrac{\pi}{2} \\ 1+\sin x & ; x > \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ ถ้าฟังก์ชัน f ต่อเนื่อง ณ จุด $x = \dfrac{\pi}{2}$ แล้ว จงหาค่าของ A + B

ข้อที่ 3. กำหนดให้ f(x) = $\dfrac{2x^2-x-6}{\sqrt{x+7}-3}$ และ g(x) = $\sqrt{x+7}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 2 แล้ว (gof)(2) มีค่าเท่าใด

ข้อที่ 4. จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้มีความต่อเนื่องบนช่วงที่กำหนดให้หรือไม่

4.1 $f(x) = \dfrac{4x^2-25}{2x+5} \quad ; \quad x \in (-3, 3)$

4.2 $f(x) = \sqrt{2x^2-3x+5} \quad ; \quad x \in (-1, 1)$

และจากใบกิจกรรมที่ 7 เช่น

ข้อที่ 2. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-25}{x-5} & ; 5 < x \le 8 \\ 10 & ; x = 5 \end{cases}$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [5, 8]

แสดงกิจกรรมดังนี้

- แต่ละข้อจะให้นักเรียนพิจารณาโดยการเรียกถามตอบเป็นรายบุคคล
- ให้นักเรียนช่วยกันพิจารณาถึงเงื่อนไขของความต่อเนื่องของฟังก์ชัน ณ จุดใด ๆ ที่กำหนดให้
- นักเรียนช่วยกันอภิปรายว่าการหาค่าลิมิตบางข้อสามารถนำค่า x = a ไปแทนในฟังก์ชันได้เลย แต่บางข้อเมื่อแทนค่าแล้วพบว่าค่าที่ได้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่ง

รูปแบบที่ยังไม่ได้กำหนด (indeterminate form) ต้องมีการจัดรูปฟังก์ชันใหม่ขึ้นกับลักษณะของฟังก์ชัน อาจใช้การแยกตัวประกอบ, การคูณด้วยสังยุคทั้งเศษและส่วน หรือ การใช้นิยามค่าสัมบูรณ์

- นักเรียนช่วยกันพิจารณาถึงเงื่อนไขของความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง (a, b) ที่กำหนดให้
- นักเรียนช่วยกันพิจารณากราฟและโดเมนของฟังก์ชันที่กำหนดให้
- นักเรียนช่วยกันพิจารณาถึงเงื่อนไขของความต่อเนื่องของฟังก์ชันบนช่วง [a, b] ที่กำหนดให้
- นักเรียนช่วยกันอภิปรายว่าการหาค่าลิมิตบางข้อสามารถนำค่า x = a ไปแทนในฟังก์ชันได้เลย แต่บางข้อเมื่อแทนค่าแล้วพบว่าค่าที่ได้อยู่ในรูป $\frac{0}{0}$ ซึ่งรูปแบบที่ยังไม่ได้กำหนด (indeterminate form) ต้องมีการจัดรูปฟังก์ชันใหม่ขึ้นกับลักษณะของฟังก์ชัน อาจใช้การแยกตัวประกอบ, การคูณด้วยสังยุคทั้งเศษและส่วน หรือ การใช้นิยามค่าสัมบูรณ์

ขั้นสรุป

1. ครูและนักเรียนช่วยกันสรุปทบทวนบทนิยามลิมิตของฟังก์ชัน ทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน โดยเรียกสุ่มนักเรียนตอบทฤษฎีบทเกี่ยวกับลิมิต ทีละข้อ ครูแสดงสื่อโปรแกรมเราขาคณิตพลวัต ชื่อ file-Exlim-pic หน้าเอกสาร def.limit, TH.limit1-4, TH.limit5-9, continue.x=a, continue.(a, b) และ comtinue.[a,b] ดังรูปที่ 43-48 ตามลำดับ
2. ให้นักเรียนย้อนกลับไปพิจารณาใบกิจกรรมที่ 6 และ 7 เพื่อให้เกิดความเข้าใจยิ่งขึ้นและแก้ไขข้อที่ผิดพลาดด้วยตนเอง

สื่อการสอน

1. สื่อโปรแกรมเราขาคณิตพลวัต
2. ใบกิจกรรมที่ 6 และ 7

การวัดและการประเมินผล

1. นักเรียนสามารถตอบคำถามในชั้นเรียนได้อย่างถูกต้อง
2. นักเรียนสามารถทำใบกิจกรรมที่ครูมอบหมายได้อย่างถูกต้อง
3. นักเรียนมีส่วนร่วมกับกิจกรรมในห้องเรียน

ภาคผนวก ค

แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียน – หลังเรียน

แบบทดสอบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (ก่อนเรียน)

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบวัดมโนทัศน์ฉบับนี้มี 2 ส่วน จำนวน 11 หน้า คะแนนสุทธิ 25 คะแนน
   แบ่งเป็น ส่วนที่ 1 : 10 คะแนน และ ส่วนที่ 2 : 15 คะแนน
   ส่วนที่ 1 แบบวัดมโนทัศน์แบบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ รวม 30 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 40
   ส่วนที่ 2 แบบวัดมโนทัศน์แบบปรนัย จำนวน 20 ข้อ รวม 30 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 60
   ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง
2. ก่อนทำแบบทดสอบให้นักเรียนเขียน ชื่อ-สกุล เลขที่ ชั้นเรียนและห้องเรียนให้ชัดเจน ลงในกระดาษคำตอบ
3. ให้นักเรียนทำข้อสอบให้ครบทุกข้อ และส่งแบบทดสอบฉบับนี้คืนกรรมการคุมสอบด้วย
4. ในการทำแบบทดสอบ
   ส่วนที่ 1 ให้นักเรียนทำลงในแบบทดสอบ
   ส่วนที่ 2 ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดจากตัวเลือก ก, ข, ค และ ง เพียงคำตอบเดียวเท่านั้น แล้วทำเครื่องหมาย X ลงกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง

ข้อ. 0 $\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. 2

ค. 3 ง. 4

ถ้าตัวเลือก ข เป็นคำตอบที่ถูกต้อง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ในกระดาษคำตอบ ดังนี้

ข้อที่	ก	ข	ค	ง
0.		X		

ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบให้ทำเครื่องหมาย = ทับคำตอบเดิม แล้วทำเครื่องหมาย X ลงในช่องคำตอบใหม่ เช่น ถ้าต้องการเปลี่ยนคำตอบจากตัวเลือก ข เป็น ค ให้ทำ ดังนี้

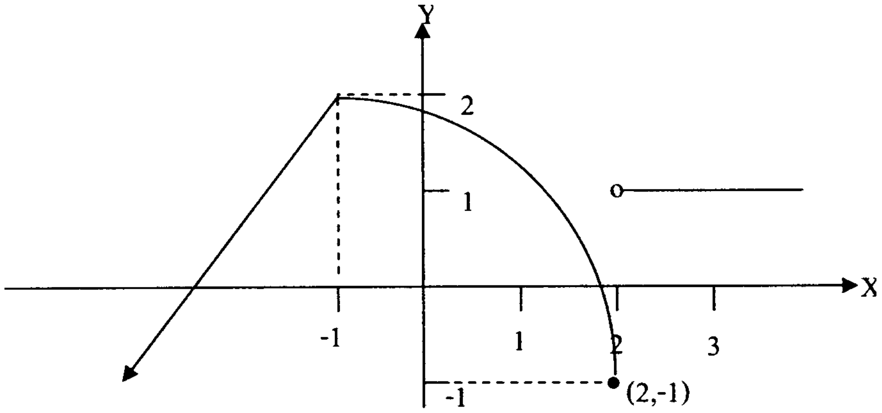
ข้อที่	ก	ข	ค	ง
0.		~~X~~	X	

<u>ส่วนที่ 1</u> แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (อัตนัย)

1. กำหนดให้ $g(x)=\begin{cases} \frac{1}{2}-x & ; \ x<-1 \\ (\frac{1}{2})^{|x|} & ; \ -1\le x\le 1 \\ x-\frac{1}{2} & ; \ x>1 \end{cases}$ จงหา $\lim_{x\to -1} g(x)$ และ $\lim_{x\to 1} g(x)$

(แสดงวิธีทำ) (5 คะแนน)

2. กำหนดให้กราฟของ $y = f(x)$ เป็นดังนี้ (เติมเฉพาะคำตอบ) (9 คะแนน)



จงหาค่าของ

2.1 $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ =.................... 2.2 $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ =.......................

2.3 $\lim_{x\to -1} f(x)$ =.................... 2.4 $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ =.......................

2.5 $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ =.................... 2.6 $\lim_{x\to 2} f(x)$ =.......................

2.7 $f(-1)$ =.................... 2.8 $f(2)$ =.......................

2.9 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้างเพราะเหตุใ

ด...

....

2.10 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่เพราะเหตุใด

1.) [-5,2] ตอบ............................เพราะ..

2.) [0,3] ตอบ..............................เพราะ..

3. ถ้าการเคลื่อนที่ของวัตถุ เป็นไปตามฟังก์ชันสมการการเคลื่อนที่ $S(t) = \dfrac{t^2 - 9}{t - 3}$ เมื่อเวลาผ่านไป t วินาที วัตถุเคลื่อนได้ S เมตร นตท. ฉัตรณรงค์ เกิดข้อสงสัยว่า เมื่อเวลาผ่านไปใกล้ 3 วินาที วัตถุจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางประมาณเท่าใด (แสดงวิธีทำโดยแสดงเหตุผลทางคณิตศาสตร์) (4 คะแนน)

4. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3} & ; x \neq 3 \\ x + 2 & ; x = 3 \end{cases}$

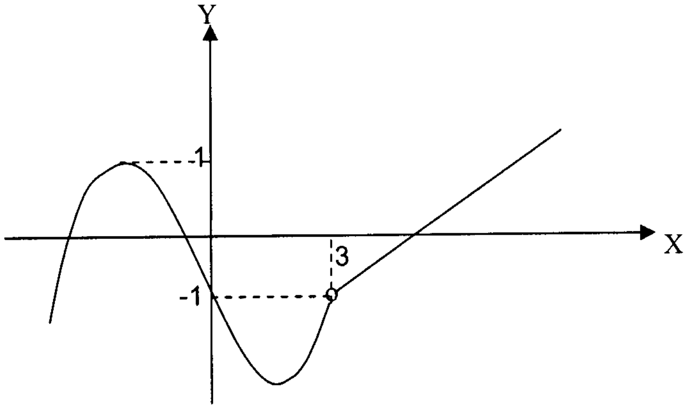
จงพิจารณาว่าฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ $x = 3$ หรือไม่ (5 คะแนน)

5. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & ; x \leq -1 \\ x + a & ; -1 < x < 3 \\ 3x + b & ; x \geq 3 \end{cases}$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง [-1, 3] จงหาค่าของ a + b (7 คะแนน)

<u>ส่วนที่ 2</u> แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (ปรนัย)

1. จากกราฟ ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**



ก. $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 1$ ข. $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$

ค. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -1$ ง. $\lim_{x\to 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้

2. กำหนด $\lim_{x\to 2} f(x) = 3$ และ $\lim_{x\to 2} g(x) = -2$ ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

ก. $\lim_{x\to 2}[f(x)+g(x)] = 1$ ข. $\lim_{x\to 2}[g(x)-f(x)] = -5$

ค. $\lim_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)} = -\dfrac{3}{2}$ ง. $\lim_{x\to 2}[f(x)\cdot g(x)] = 6$

3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{1}{2}\right)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. - 0.25 ข. 0

ค. 0.25 ง. 0.5

4. $\lim_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{8x^3-27}{2x^2+3x-9}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 6 ข. 9

ค. 12 ง. 15

5. $\lim_{x \to 1} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $2 + \sqrt{6}$ ข. $2 - \sqrt{6}$

ค. $3 + \sqrt{6}$ ง. $3 - \sqrt{6}$

6. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 5x - 2 & ; x \geq 1 \\ 2x + 7 & ; x < 1 \end{cases}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 3$

(2) $\lim_{x \to 1^+} f(x) = 3$

ก. (1) ถูก และ (2) ถูก ข. (1) ถูก และ (2) ผิด

ค. (1) ผิด และ (2) ถูก ง. (1) ผิด และ (2) ผิด

7. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 4 \\ 6 & ; x = 4 \\ 3x + 4 & ; x > 4 \end{cases}$ **ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง**

ก. $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 16$ ข. $\lim_{x \to 4^+} f(x) = 16$

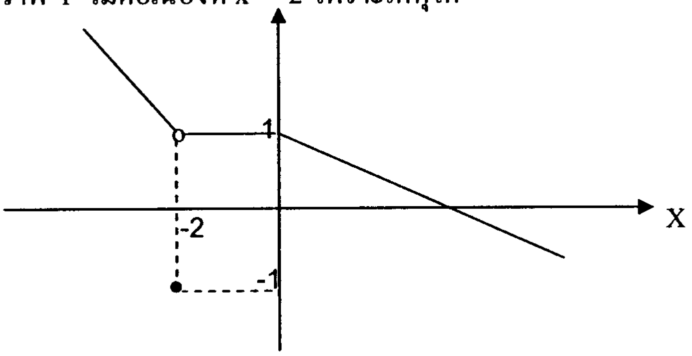
ค. $\lim_{x \to 4} f(x) = 16$ ง. $f(4) = 16$

8. พิจารณา $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x + 5} & ; x \neq 5 \\ 10 & ; x = 5 \end{cases}$ **ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง**

ก. $\lim_{x \to 5^-} f(x) = 10$ ข. $\lim_{x \to 5} f(x) = 0$

ค. $f(-1) = 5$ ง. f ต่อเนื่องที่ $x = 5$

9. จากกราฟ f ไม่ต่อเนื่องที่ $x = -2$ เพราะเหตุใด



ก. $\lim_{x \to -2} f(x)$ หาค่าไม่ได้ ข. $f(-2)$ หาค่าไม่ได้

ค. $\lim_{x \to -2} f(x) \neq f(-2)$ ง. ถูกต้องทั้งข้อ ก. ข. และ ค.

10. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - 2 & ; 0 < x < 2 \\ 2 - \frac{8}{x^2} & ; x > 2 \end{cases}$ f **ไม่ต่อเนื่องบนช่วง** $(0, \infty)$ เพราะเหตุใดต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ข. $\lim_{x \to 1} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ค. $\lim_{x \to 2} f(x) \neq f(2)$

ง. หา f(2) ไม่ได้

11. **ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง**

ก. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & ; x < 2 \\ x^2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ x = 2

ข. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & ; x < -1 \\ x^2 - 3 & ; x \geq -1 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ x = -1

ค. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 5 & ; x < 2 \\ -3 & ; x = 2 \\ x^2 - 1 & ; x > 2 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ x = 2

ง. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & ; x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \\ x^2 - 1 & ; x > 1 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ x = 1

12. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < 1 \\ Ax - 3 & ; x \geq 1 \end{cases}$ ถ้า f ต่อเนื่องที่ x = 1 แล้ว A มีค่าเท่าใด

ก. -3

ข. -2

ค. 3

ง. 4

13. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} Ax - 1 & ; x \leq 1 \\ 3x & ; 1 < x < 2 \\ Bx^2 - A & ; x \geq 2 \end{cases}$ ถ้า f ต่อเนื่องที่ x = 1 และ ไม่ต่อเนื่องที่ x = 2 แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $A - B \neq -\frac{3}{2}$

ข. $A - B \neq -\frac{1}{2}$

ค. $A - B \neq \frac{1}{2}$

ง. $A - B \neq \frac{3}{2}$

14. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} x^2+4 & ; \; x<-1 \\ x+6 & ; \; -1\le x<3 \\ 3x & ; \; x\ge 3 \end{cases}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง[-1, 3] ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

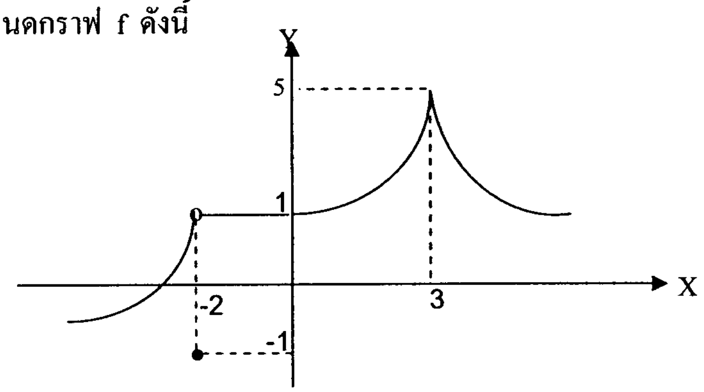
ก. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = 6$

ข. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = f(-1) = 5$

ค. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = f(3) = 7$

ง. $\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to 3^-} f(x) = 3$

15. กำหนดกราฟ f ดังนี้



ข้อใดต่อไปนี้ไม่ถูกต้อง

ก. f ต่อเนื่องบนช่วง (-2, 3)

ข. f ต่อเนื่องบนช่วง (3, ∞)

ค. f ต่อเนื่องบนช่วง [-2, 3]

ง. f ต่อเนื่องบนช่วง (-2, 3]

16. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-x-3}{x+1} & ; \; -2\le x<-1 \\ 4 & ; \; x=-1 \\ 5-3x & ; \; -1<x\le 2 \end{cases}$

แล้ว $\lim_{x\to -1} f(x)$ มีค่าดังข้อใดต่อไปนี้

ก. -1

ข. 2

ค. 4

ง. หาค่าไม่ได้

17. $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^3-4x^2-7x+10}{x-5}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 28

ข. 14

ค. 0

ง. -14

18. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} x^2 & ; x<3 \\ 2x & ; x \geq 3 \end{cases}$ **ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง**

ก. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) < \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

ข. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) > \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

ค. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

ง. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 7.5$

19. กำหนดฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{x^2+5x+6}{x+2}$ เมื่อ $x \in R$ และ $x \neq -2$

ถ้าต้องให้ f ต่อเนื่องที่ x = -2 แล้ว จะต้องนิยาม f(-2) เท่ากับข้อใด

ก. 0

ข. 1

ค. -1

ง. 2

20. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 5-6x & ; x \leq 3 \\ -4-x^2 & ; x>3 \end{cases}$ **ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง**

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ x = 3

ข. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = 3 เพราะ $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ค. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = 3 เพราะ $f(3)$ หาค่าไม่ได้

ง. f เป็นฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่ x = 3 เพราะ $\lim\limits_{x\to 3} f(x) \neq f(3)$

การให้คะแนนส่วนที่ 1 มีเกณฑ์พิจารณา ดังนี้

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนน
1.	แสดงวิธีหาคำตอบ	
	1. หา $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	2. หา $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	3. หา $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	4. หา $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	5. สรุปค่า $\lim_{x\to 1} f(x)$ และ $\lim_{x\to -1} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนน
2.	1. หาคำตอบ ข้อที่ 2.1 – 2.8 ได้ถูกต้อง 2 ข้อให้	1 คะแนน
	2. ข้อ 2.9	
	2.1 ตอบฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุดใด ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	2.2 แสดงเหตุผลได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	3. ข้อ 2.10	
	3.1 ตอบฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงใด ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	3.2 แสดงเหตุผลได้ถูกต้อง	2 คะแนน

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนน
3.	1. แสดงสัญลักษณ์ของ $\lim_{x\to 3} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	2. หา $\lim_{x\to 3} f(x)$ ได้ถูกต้อง	2 คะแนน
	3. สรุปได้ถูกต้อง	1 คะแนน

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนน
4.	1. แสดงสัญลักษณ์ของ $\lim_{x\to 3} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	2. หา $\lim_{x\to 3} f(x)$ ได้ถูกต้อง	2 คะแนน
	3. หา $f(3)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	4. สรุปฟังก์ชันความต่อเนื่องที่ x = 3 ได้ถูกต้อง	1 คะแนน

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนน
5.	1. หา $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	2. หา $f(-1)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	3. หา $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	4. หา $f(3)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	5. หาค่า a ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	6. หาค่า b ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	7. หาค่า a + b ได้ถูกต้อง	1 คะแนน

การให้คะแนนส่วนที่ 2 มีเกณฑ์พิจารณา ดังนี้

- ถ้านักเรียนตอบถูกให้ 1 คะแนน
- ถ้านักเรียนตอบผิดหรือไม่ตอบให้หรือตอบมากกว่า 2 ข้อให้ 0 คะแนน

เฉลย ส่วนที่ 2

1. ค	2. ง	3. ก	4. ก	5. ค
6. ค	7. ง	8. ข	9. ค	10. ง
11. ข	12. ง	13. ง	14. ข	15. ค
16. ง	17. ก	18. ข	19. ข	20. ก

ใบตอบ

ส่วนที่ 2 แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (ปรนัย)

ข้อที่	ก	ข	ค	ง		ข้อที่	ก	ข	ค	ง
1.						11.				
2.						12.				
3.						13.				
4.						14.				
5.						15.				
6.						16.				
7.						17.				
8.						18.				
9.						19.				
10.						20.				

แบบทดสอบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (หลังเรียน)

คำชี้แจง

1. แบบทดสอบวัดมโนทัศน์ฉบับนี้มี 2 ส่วน จำนวน 11 หน้า คะแนนสุทธิ 25 คะแนน
   แบ่งเป็น ส่วนที่ 1 : 10 คะแนน และ ส่วนที่ 2 : 15 คะแนน
   ส่วนที่ 1 แบบวัดมโนทัศน์แบบอัตนัย จำนวน 5 ข้อ รวม 30 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 40
   ส่วนที่ 2 แบบวัดมโนทัศน์แบบปรนัย จำนวน 20 ข้อ รวม 20 คะแนน คิดเป็นร้อยละ 60
   ใช้เวลาในการทดสอบ 1 ชั่วโมง
2. ก่อนทำแบบทดสอบให้นักเรียนเขียน ชื่อ-สกุล เลขที่ ชั้นเรียนและห้องเรียนให้ชัดเจน ลงในกระดาษคำตอบ
3. ให้นักเรียนทำข้อสอบให้ครบทุกข้อ และส่งแบบทดสอบฉบับนี้คืนกรรมการคุมสอบด้วย
4. ในการทำแบบทดสอบ
   ส่วนที่ 1 ให้นักเรียนทำลงในแบบทดสอบ
   ส่วนที่ 2 ให้นักเรียนเลือกคำตอบที่ถูกต้องที่สุดจากตัวเลือก ก, ข, ค และ ง เพียงคำตอบเดียว เท่านั้น แล้วทำเครื่องหมาย X ลงกระดาษคำตอบ

ตัวอย่าง

ข้อ. 0 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 1 ข. 2

ค. 3 ง. 4

ถ้าตัวเลือก ข เป็นคำตอบที่ถูกต้อง ให้นักเรียนทำเครื่องหมาย X ในกระดาษคำตอบ ดังนี้

ข้อที่	ก	ข	ค	ง
0.		X		

ถ้านักเรียนต้องการเปลี่ยนคำตอบให้ทำเครื่องหมาย = ทับคำตอบเดิม แล้วทำเครื่องหมาย X ลงในช่องคำตอบใหม่ เช่น ถ้าต้องการเปลี่ยนคำตอบจากตัวเลือก ข เป็น ค ให้ทำ ดังนี้

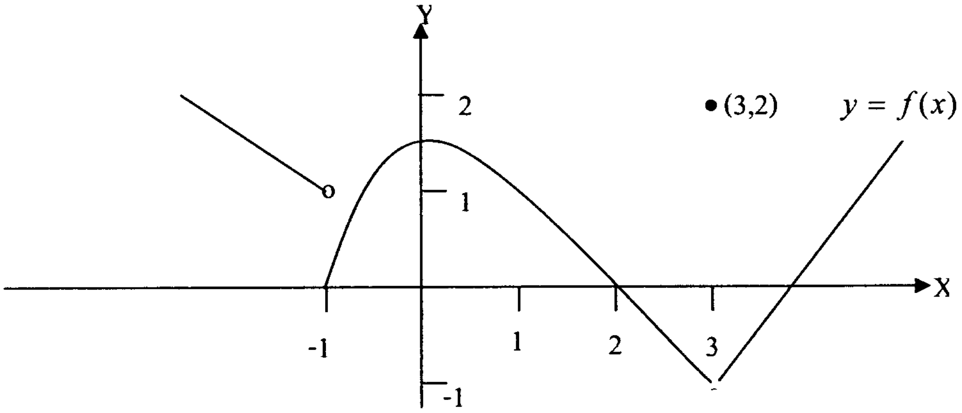
ข้อที่	ก	ข	ค	ง
0.		~~X~~	X	

ส่วนที่ 1 แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (อัตนัย)

1. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x\leq 1 \\ \dfrac{1}{x-1} & ; \ 1<x\leq 2 \\ 3-x & ; \ x>2 \end{cases}$ จงหา $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

(5 คะแนน) (แสดงวิธีทำ)

2. กำหนดให้กราฟของ $y = f(x)$ เป็นดังนี้ (เติมเฉพาะคำตอบ) (9 คะแนน)



จงหาค่าของ

2.1 $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ =........................ 2.2 $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ =........................

2.3 $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ =........................ 2.4 $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$ =........................

2.5 $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ =........................ 2.6 $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ =........................

2.7 $f(-1)$ =........................ 2.8 $f(3)$ =........................

2.9 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ไม่ต่อเนื่องที่จุดใดบ้างเพราะเหตุใ

ด...

2.10 ฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อเนื่องบนช่วงต่อไปนี้หรือไม่เพราะเหตุใด

1.) [-1,2] ตอบ............................เพราะ...

2.) [-1,3] ตอบ............................เพราะ...

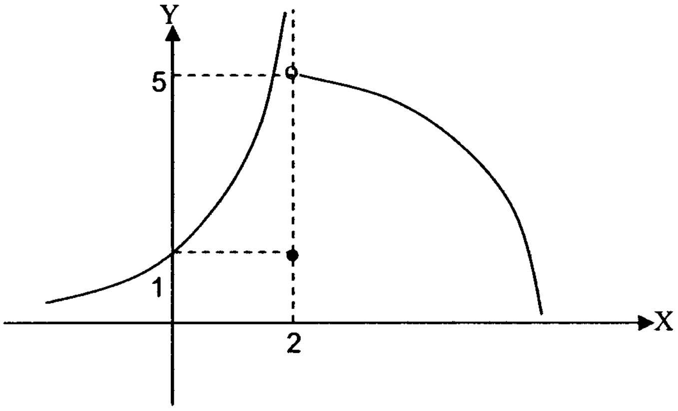
3. ถ้าการเคลื่อนที่ของกระสุนปืนที่ยิงออกไป เป็นไปตามฟังก์ชันสมการการเคลื่อนที่ $S(t) = \frac{t^2 - 4}{t - 2}$ เมื่อ เวลาผ่านไป t วินาที กระสุนปืนเคลื่อนได้ S เมตร นตท. เอกลักษณ์ เกิดข้อสงสัยว่า เมื่อเวลาผ่านไปใกล้ 2 วินาที กระสุนปืนจะเคลื่อนที่ได้ระยะทางประมาณเท่าใด (แสดงวิธีทำโดยแสดงเหตุผลทางคณิตศาสตร์) (4 คะแนน)

4. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & ; x \neq 1 \\ \dfrac{x}{x+1} & ; x = 1 \end{cases}$ จงพิจารณาว่าฟังก์ชันนี้ต่อเนื่องที่ $x = 1$ หรือไม่ (5 คะแนน)

5. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} 1-b & ; x = -3 \\ \dfrac{x+1}{2} & ; -3 < x < 0 \\ 3a+1 & ; x = 0 \end{cases}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง [-3, 0] จงหาค่าของ a + b (7 คะแนน)

ส่วนที่ 2 แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (ปรนัย)

1. จากกราฟ ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**



ก. $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$

ข. $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$

ค. $\lim_{x \to 2} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ง. $f(2) = 1$

2. กำหนด $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$ และ $\lim_{x \to -2} g(x) = -2$ ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

ก. $\lim_{x \to -2} [f(x) + g(x)] = 1$

ข. $\lim_{x \to -2} [g(x) - f(x)] = -5$

ค. $\lim_{x \to -2} \frac{f(x)}{g(x)} = -\frac{3}{2}$

ง. $\lim_{x \to -2} [f(x) \cdot g(x)] = 6$

3. ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

ก. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6$

ข. $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 1}{x + 1} = 3$

ค. $\lim_{x \to 0} \frac{3x^2 - 1}{x - 2} = 0.5$

ง. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3} = 5$

4. $\lim_{x \to \frac{2}{3}} \frac{27x^3 - 8}{3x^2 + 4x - 4}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 9

ข. 6

ค. 5

ง. $\frac{9}{2}$

5. $\lim_{x \to \sqrt{3}} \frac{3 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 + 1}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. 0 ข. 2

ค. 4 ง. 6

6. กำหนด $f(x) = \begin{cases} 8x + 5 & ; x \geq -1 \\ 7 + 4x & ; x < -1 \end{cases}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(3) $\lim_{x \to -1^-} f(x) = 3$

(4) $\lim_{x \to -1^+} f(x) = 3$

ข. (1) ถูก และ (2) ถูก ข. (1) ถูก และ (2) ผิด

ค. (1) ผิด และ (2) ถูก ง. (1) ผิด และ (2) ผิด

7. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < -4 \\ 6 & ; x = -4 \\ 4 - 3x & ; x > -4 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้**ไม่ถูกต้อง**

ก. $\lim_{x \to -4^-} f(x) = 16$ ข. $\lim_{x \to -4^+} f(x) = 16$

ค. $\lim_{x \to -4} f(x) = 16$ ง. f(-4) = 16

8. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \frac{|x - 3|}{x - 3} & ; x \neq 3 \\ 0 & ; x = 3 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

ก. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 1$ ข. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = -1$

ค. $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$ ง. f(3) = 0

9. $\lim_{x \to \frac{3}{2}} \sqrt{\frac{8x^3 - 27}{4x^2 - 9}}$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

ก. $\sqrt{2}$ ข. $\frac{3}{\sqrt{2}}$

ค. $\sqrt{3}$ ง. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

10. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2 & ; 0 < x < 4 \\ 7 - \dfrac{16}{x^2} & ; x > 4 \end{cases}$ f **ไม่ต่อเนื่อง**บนช่วง $(0, \infty)$ เพราะเหตุใดต่อไปนี้

ก. $\lim_{x \to 4^-} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ข. $\lim_{x \to 4^+} f(x)$ หาค่าไม่ได้

ค. $\lim_{x \to 4} f(x) \neq f(4)$

ง. หา f(4) ไม่ได้

11. ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

ก. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 2 & ; x < 2 \\ x^2 & ; x \geq 2 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ x = 2

ข. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 5 & ; x < -2 \\ -13 & ; x = -2 \\ x^2 - 17 & ; x > -2 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ x = -2

ค. $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & ; x < -1 \\ x^2 + 2 & ; x \geq -1 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ x = -1

ง. $f(x) = \begin{cases} x - 1 & ; x < 1 \\ 1 & ; x = 1 \\ x^2 - 1 & ; x > 1 \end{cases}$ ต่อเนื่องที่ x = 1

12. กำหนด $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2 - 3x - 5}{x + 1} & ; -1 < x \leq 5 \\ 6 & ; x = -1 \end{cases}$ พิจารณาข้อความต่อไปนี้

(1) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง (-1, 5) ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องที่ทุก ๆ จุดในช่วง (-1,5)

(2) ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง [-1, 5] ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องทุก ๆ จุดในช่วง (-1, 5) , $\lim_{x \to 1^+} f(x) = f(-1) = 6$ และ $\lim_{x \to 5^-} f(x) = f(5) = 5$

ข้อใดต่อไปนี้สรุปได้ถูกต้อง

ก. (1) ถูก และ (2) ผิด

ข. (1) ผิด และ (2) ถูก

ค. (1) ถูก และ (2) ถูก

ง. (1) ผิด และ (2) ผิด

13. กำหนด $f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x < -1 \\ Ax - 3 & ; x \geq -1 \end{cases}$ ถ้า f ต่อเนื่องที่ x = -1 แล้ว A มีค่าเท่าใด

ก. -1 ข. -2

ค. -3 ง. -4

14. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} Ax - 1 & ; x \leq 1 \\ 3x & ; 1 < x < 2 \\ Bx^2 - A & ; x \geq 2 \end{cases}$ ถ้า f ต่อเนื่องที่ x = 1 และ ไม่ต่อเนื่องที่ x = 2 แล้วข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $A - B \neq -\frac{3}{2}$ ข. $A - B \neq -\frac{1}{2}$

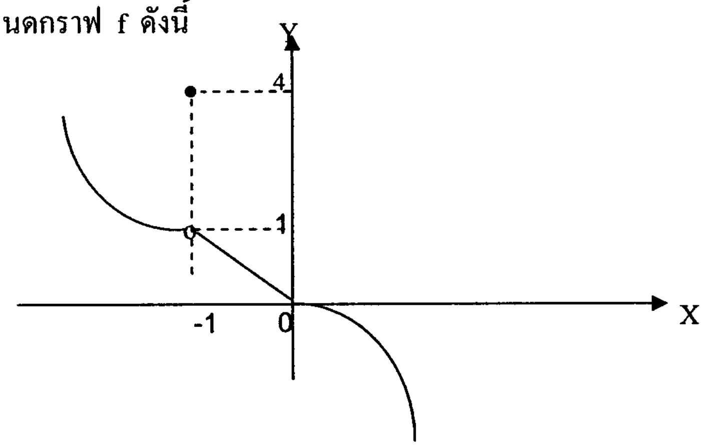
ค. $A - B \neq \frac{1}{2}$ ง. $A - B \neq \frac{3}{2}$

15. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & ; x < -1 \\ x + 6 & ; -1 \leq x < 3 \\ 3x & ; x \geq 3 \end{cases}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วง [-1, 3] ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1) = 5$ ข. $\lim_{x \to 3^+} f(x) = f(3) = 6$

ค. $\lim_{x \to 3^-} f(x) = f(3) = 7$ ง. $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to 3^-} f(x) = 3$

16. กำหนดกราฟ f ดังนี้



ข้อใดต่อไปนี้ถูกต้อง

ก. f ไม่ต่อเนื่องบนช่วง (-1, 0) ข. f ต่อเนื่องบนช่วง [-1, ∞)

ค. f ไม่ต่อเนื่องบนช่วง [-∞, -1) ง. f ต่อเนื่องบนช่วง (-1, 0]

17. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-x-3}{x+1} & ;\ 0\le x<1 \\ 4 & ;\ x=4 \\ 5-3x & ;\ 1<x\le 2 \end{cases}$

แล้ว $\lim_{x\to 1} f(x)$ มีค่าดังข้อใดต่อไปนี้

ก. -1 ข. 2

ค. 4 ง. หาค่าไม่ได้

18. กำหนด $f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|-1}{\sqrt{1-x}} & ;\ x<1 \\ \dfrac{|1-x|}{1-\sqrt{x}} & ;\ x>1 \end{cases}$ แล้ว $\lim_{x\to 1} f(x)$ มีค่าดังข้อใดต่อไปนี้

ก. -2 ข. -1

ค. 0 ง. หาค่าไม่ได้

19. กำหนดฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2}$ เมื่อ $x\in R$ และ $x\neq 2$

ถ้าต้องให้ f ต่อเนื่องที่ x = 2 แล้ว จะต้องนิยาม f(2) เท่ากับข้อใด

ก. 3 ข. 4

ค. 5 ง. 6

20. กำหนดให้ $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & ;\ x<-1 \\ \dfrac{x+1}{2} & ;\ -1\le x\le 3 \\ \dfrac{3}{2} & ;\ x>3 \end{cases}$ ข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

ก. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R ยกเว้นที่จุด x = 3

ข. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R ยกเว้นที่จุด x = -1

ค. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R ยกเว้นที่จุด x = -1 และ x = 3

ง. f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่ทุกจุดใน R

การให้คะแนนส่วนที่ 1 มีเกณฑ์พิจารณา ดังนี้

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนน
1.	แสดงวิธีหาคำตอบ	
	1. หา $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	2. หา $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	3. หา $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	4. หา $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	5. สรุปค่า $\lim_{x\to 1} f(x)$ และ $\lim_{x\to 2} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนน
2.	1. หาคำตอบ ข้อที่ 2.1 – 2.8 ได้ถูกต้อง 2 ข้อให้	1 คะแนน
	2. ข้อ 2.9	
	2.1 ตอบฟังก์ชันไม่ต่อเนื่องที่จุดใด ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	2.2 แสดงเหตุผลได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	3. ข้อ 2.10	
	3.1 ตอบฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วงใด ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	3.2 แสดงเหตุผลได้ถูกต้อง	2 คะแนน

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนน
3.	1. แสดงสัญลักษณ์ของ $\lim_{x\to 2} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	2. หา $\lim_{x\to 2} f(x)$ ได้ถูกต้อง	2 คะแนน
	3. สรุปได้ถูกต้อง	1 คะแนน

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนน
4.	1. แสดงสัญลักษณ์ของ $\lim_{x\to 1} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	2. หา $\lim_{x\to 1} f(x)$ ได้ถูกต้อง	2 คะแนน
	3. หา $f(1)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	4. สรุปฟังก์ชันความต่อเนื่องที่ x = 1 ได้ถูกต้อง	1 คะแนน

ข้อที่	เกณฑ์การให้คะแนน	คะแนน
5.	1. หา $\lim_{x\to -3^+} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	2. หา $f(-3)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	3. หา $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	4. หา $f(0)$ ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	5. หาค่า a ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	6. หาค่า b ได้ถูกต้อง	1 คะแนน
	7. หาค่า a + b ได้ถูกต้อง	1 คะแนน

การให้คะแนนส่วนที่ 2 มีเกณฑ์พิจารณา ดังนี้

- ถ้านักเรียนตอบถูกให้ 1 คะแนน
- ถ้านักเรียนตอบผิดหรือไม่ตอบให้หรือตอบมากกว่า 2 ข้อให้ 0 คะแนน

เฉลย ส่วนที่ 2

1. ก	2. ง	3. ข	4. ง	5. ค
6. ข	7. ง	8. ง	9. ข	10. ง
11. ข	12. ก	13. ง	14. ง	15. ก
16. ง	17. ง	18. ง	19. ค	20. ค

ใบตอบ

ส่วนที่ 2 แบบวัดมโนทัศน์ทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (ปรนัย)

ข้อที่	ก	ข	ค	ง		ข้อที่	ก	ข	ค	ง
1.						11.				
2.						12.				
3.						13.				
4.						14.				
5.						15.				
6.						16.				
7.						17.				
8.						18.				
9.						19.				
10.						20.				

ประวัติผู้ศึกษา

ชื่อ	เรืออากาศเอกหญิง พัชรภรณ์ ภูวรกิจ
วัน เดือน ปีเกิด	22 สิงหาคม 2520
สถานที่เกิด	อำเภอ เมือง จังหวัด นครศรีธรรมราช
ประวัติการศึกษา	วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์ประยุกต์) มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ 2541
สถานที่ทำงาน	โรงเรียนเตรียมทหาร อำเภอ บ้านนา จังหวัด นครนายก
ตำแหน่ง	รักษาราชการ อาจารย์กองวิชาคณิตศาสตร์ โรงเรียนเตรียมทหาร