ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง

นางสาวศุภารัตน์ นิลพันธ์

วิทยานิพนธ์นี้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต
แขนงวิชาหลักสูตรและการสอน สาขาวิชาศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช
พ.ศ. 2565

The Effects of Cooperative Learning Activities Management with STAD Technique and Open Ended Problems on Mathematical Communication Ability and Attitude Towards Mathematics in the Topic of Conic Section of Grade 10 Students at Srinagarindra the Princess Mother School, Rayong in Rayong Province

Miss Suparat Ninlapan

A Thesis Submitted in Partial Fulfillment of the Requirements for
the Degree of Master of Education in Curriculum and Instruction
School of Educational Studies
Sukhothai Thammathirat Open University
2022

หัวข้อวิทยานิพนธ์ ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง

ชื่อและนามสกุล นางสาวศุภารัตน์ นิลพันธ์

แขนงวิชา หลักสูตรและการสอน

สาขาวิชา ศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช

อาจารย์ที่ปรึกษา 1. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรีรัตน์ อารีรักษ์สกุล ก้องโลก

2. ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วินิจ เทือกทอง

วิทยานิพนธ์นี้ ได้รับความเห็นชอบให้เป็นส่วนหนึ่งของการศึกษาตามหลักสูตรระดับปริญญาโท เมื่อวันที่ 22 กุมภาพันธ์ 2566

คณะกรรมการสอบวิทยานิพนธ์

.... ประธานกรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ชนิศวรา เลิศอมรพงษ์)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรีรัตน์ อารีรักษ์สกุล ก้องโลก)

.... กรรมการ

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วินิจ เทือกทอง)

.... ประธานกรรมการบัณฑิตศึกษา

(รองศาสตราจารย์ ดร.นราธิป ศรีราม)

ชื่อวิทยานิพนธ์ ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง

ผู้วิจัย นางสาวศุภารัตน์ นิลพันธ์ **รหัสนักศึกษา** 2622101851 **ปริญญา** ศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต (หลักสูตรและการสอน) **อาจารย์ที่ปรึกษา** (1) ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.สุรีรัตน์ อารีรักษ์สกุล ก้องโลก (2) ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.วินิจ เทือกทอง **ปีการศึกษา** 2565

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้วัตถุประสงค์เพื่อ 1) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ กับเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด 2) เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดกับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

กลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565 จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 28 คน ได้มาโดยการสุ่มแบบกลุ่ม เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย 1) แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด เรื่อง ภาคตัดกรวย 2) แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ เรื่อง ภาคตัดกรวย 3) แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย และ 4) แบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล คือ ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของเพียร์สัน และการวิเคราะห์ความแปรปรวนพหุคูณ

ผลการวิจัยปรากฏว่า 1) ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ กับเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด มีความสัมพันธ์ทางบวก ในระดับสูงมาก โดยมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยมีความแปรปรวนร่วมกันร้อยละ 53.88 และ 2) ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

คำสำคัญ การเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD คำถามปลายเปิด ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เจตคติต่อคณิตศาสตร์ มัธยมศึกษา

Thesis title: The Effects of Cooperative Learning Activities Management with STAD Technique and Open Ended Problems on Mathematical Communication Ability and Attitude Towards Mathematics in the Topic of Conic Section of Grade 10 Students at Srinagarindra the Princess Mother School, Rayong in Rayong Province
Researcher: Miss Suparat Ninlapan; **ID:** 2622101851;
Degree: Master of Education (Curriculum and Instruction);
Thesis advisors: (1) Dr. Sureerat Areeraksakul Konglok, Assistant Professor; (2) Dr. Vinit Thueakthong, Assistant Professor; **Academic year:** 2022

Abstract

The objectives of this research were to (1) study the relationship between communication ability and attitude towards mathematics of grade 10 students in the group that learned under cooperative learning activities management with STAD technique and open ended problems and (2) compare communication ability and attitude towards mathematics of grade 10 students between the group learning with cooperative learning activities management with STAD technique and open ended problems and the group learning with conventional mathematics learning activities.

The research sample consisted of 56 grade 10 students of Srinagarindra the Princess Mother School, Rayong in Rayong Province during the second semester of the academic year 2022 selected by cluster random sampling and separated into 2 groups with 28 students in each group. The employed research instruments consisted of (1) mathematics learning management plans on conic section using cooperative learning activities management plans with STAD technique and open ended problems; (2) mathematics learning management plans on conic section using conventional mathematics learning activities, (3) a mathematics communication ability test in the topic of conic section; and (4) a mathematical attitude assessment. Statistics employed for data analysis were the mean, standard deviation, Pearson's correlation coefficient, and MANOVA test.

The research findings showed that (1) the relationship between communication ability and attitude towards mathematics of grade 10 students in the group that learned under cooperative learning activities management with STAD technique and open ended problems was positive with very high correlation counterpart ability at the .05 level and the percentage of covariation was 53.88; and (2) communication ability and attitude towards mathematics of grade 10 students learning with cooperative learning activities management with STAD technique and open ended problems was significantly higher than the control group learning with conventional mathematics learning activities counterpart ability at the .05 level.

Keywords: Cooperative Learning Activities Management, STAD Technique, Open Ended Problems, Mathematical Communication Ability, Attitude Towards Mathematics, Secondary Education

กิตติกรรมประกาศ

วิทยานิพนธ์ฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี เนื่องจากได้รับความอนุเคราะห์เป็นอย่างดียิ่งจากอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. สุรีรัตน์ อารีรักษ์สกุล ก้องโลก และผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร. วินิจ เทือกทอง ที่กรุณาช่วยตรวจ ให้คำแนะนำ คำปรึกษา และให้ความช่วยเหลือในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนแล้วเสร็จ ผู้วิจัยรู้สึกซาบซึ้งในความกรุณาเป็นอย่างยิ่ง

ขอขอบพระคุณคุณครูบุรินทร์ บำรุงรักษ์ คุณครูปริภัทร บำรุงรักษ์ และคุณครูกุลธวัช ทิพสอน ที่ได้กรุณาเป็นผู้เชี่ยวชาญ ตรวจเครื่องมือวิจัย และให้คำแนะนำที่เป็นประโยชน์ต่อการทำวิจัยในครั้งนี้ ขอขอบพระคุณผู้อำนวยการ และคณะครูโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง ทุกท่าน ที่ให้ความร่วมมือในการทดลองเป็นอย่างดี ทำให้งานวิจัยสำเร็จลุล่วงตามวัตถุประสงค์ นอกจากนี้ผู้วิจัยขอขอบพระคุณทุกท่านที่ให้ข้อเสนอแนะและเป็นกำลังใจในการทำวิทยานิพนธ์ฉบับนี้จนสำเร็จลุล่วงด้วยดี

สุดท้ายนี้ขอขอบพระคุณ คุณครู อาจารย์ ตลอดจนผู้มีพระคุณทุกท่านที่ได้อบรมสั่งสอน ชี้แนะแนวทางการศึกษาแก่ผู้วิจัย และขอขอบพระคุณครอบครัวของผู้วิจัย ที่ได้ให้ความช่วยเหลือ สนับสนุน และเป็นกำลังใจให้กับผู้วิจัยเสมอมา

ศุภารัตน์ นิลพันธ์

มกราคม 2566

สารบัญ

หน้า

บทคัดย่อภาษาไทย .... ง
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ .... จ
กิตติกรรมประกาศ .... ฉ
สารบัญตาราง .... ฌ
สารบัญภาพ .... ญ
บทที่ 1 บทนำ 1
  ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา 1
  วัตถุประสงค์การวิจัย 6
  สมมติฐานการวิจัย 6
  กรอบแนวคิดการวิจัย 7
  ขอบเขตการวิจัย 7
  นิยามศัพท์เฉพาะ 8
  ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ 9
บทที่ 2 วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง 10
  การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD 11
  การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 15
  การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ 23
  ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ 23
  เจตคติต่อคณิตศาสตร์ 30
  งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง 32
บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย 37
  ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง 37
  เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย 37
  การเก็บรวบรวมข้อมูล 50
  การวิเคราะห์ข้อมูล 50
บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล 52

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

ตอนที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด 53
ตอนที่ 2 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดกับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ 54
บทที่ 5 สรุปการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ 57
สรุปการวิจัย 57
อภิปรายผล 59
ข้อเสนอแนะ 64
บรรณานุกรม 65
ภาคผนวก 73
ก รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิพิจารณาเครื่องมือ 74
ข ตัวอย่างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด 76
ค ตัวอย่างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ เรื่อง ภาคตัดกรวย 226
ง แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย 236
จ แบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ 266
ฉ คะแนนพัฒนาการจากผลการทดสอบย่อยรายบุคคล 273
ประวัติผู้วิจัย 308

สารบัญตาราง

หน้า

ตารางที่ 2.1 ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด 18

ตารางที่ 2.2 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ 28

ตารางที่ 3.1 วิเคราะห์เนื้อหา เรื่อง ภาคตัดกรวย 38

ตารางที่ 3.2 วิเคราะห์เนื้อหา จำนวนข้อสอบ จุดประสงค์ เวลาที่ใช้ ตามตัวบ่งชี้จากนิยามตัวแปร 42

ตารางที่ 3.3 วิเคราะห์จำนวนข้อคำถามตามตัวบ่งชี้จากนิยามของตัวแปรเจตคติต่อคณิตศาสตร์ 48

ตารางที่ 4.1 ผลการวิเคราะห์ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด 53

ตารางที่ 4.2 ความแตกต่างระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด กับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ 55

ตารางที่ 4.3 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด กับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ 56

สารบัญภาพ

หน้า

ภาพที่ 4.1 กรอบแนวคิดของการวิจัย 7

บทที่ 1
บทนำ

1. ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การเรียนรู้ในปัจจุบันนั้นเป็นสิ่งสำคัญอย่างยิ่ง ผู้เรียนจะเกิดการเรียนรู้ได้อย่างคงทนถาวรนั้นจะต้องอาศัยทักษะกระบวนการในการเรียนรู้ที่หลากหลาย อันจะนำไปสู่การสร้างองค์ความรู้และเกิดกระบวนการเรียนรู้ที่เหมาะสมของแต่ละบุคคล ซึ่งประกอบไปด้วยทักษะการสื่อสาร การคิดขั้นสูง และการแก้ปัญหา อันจะเป็นพื้นฐานในการเรียนรู้และการดำเนินชีวิต ซึ่งสอดคล้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2560, น. 4) ได้กล่าวว่า ปัจจุบันประเทศต่าง ๆ ทั่วโลกได้ให้ความสำคัญกับทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรม (Learning and Innovation Skills) ที่จำเป็นสำหรับคริสต์ศตวรรษที่ 21 ซึ่งได้แก่ การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา การสื่อสาร การร่วมมือ และการคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม ควบคู่ไปกับความสามารถในการใช้เทคโนโลยีได้อย่างเหมาะสม

ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 มีเป้าหมายที่ต้องการให้เกิดกับนักเรียนเมื่อจบหลักสูตร คือ ต้องการให้นักเรียนมีความสามารถในการแก้ปัญหา สื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ เชื่อมโยง ให้เหตุผล มีความคิดสร้างสรรค์ มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ เห็นคุณค่าและตระหนักถึงความสำคัญของคณิตศาสตร์ จะเห็นได้ว่า ความสามารถในการสื่อสารเป็นความสามารถหนึ่งที่มีความสำคัญและจำเป็นต่อนักเรียน ปัจจุบันการเรียนการสอนจำเป็นต้องจัดกิจกรรมต่าง ๆ เพื่อให้นักเรียนเกิดพื้นฐานการสร้างความสามารถ และสมรรถนะเพื่อจะนำไปสู่ทักษะและความสามารถในอนาคต โดยสมรรถนะการสื่อสารเป็นสมรรถนะที่สำคัญในสังคมที่ขับเคลื่อนด้วยข้อมูล ทุกคนต้องใช้ในการทำความเข้าใจ ตัดสินใจ และสรุปความเป็นไปได้จากสถานการณ์ในชีวิตประจำวัน

การสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์เป็นทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ที่ช่วยให้ผู้เรียนนั้นสามารถถ่ายทอดความรู้ ความเข้าใจ แนวคิด หรือกระบวนการคิดของตนเองเพื่อให้ผู้อื่นสามารถรับรู้ได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน และมีประสิทธิภาพ โดยผู้เรียนนั้นจะต้องมีส่วนร่วมในการอภิปรายหรือการเขียนแลกเปลี่ยนความรู้ และยอมรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น จึงจะทำให้ผู้เรียนเรียนรู้คณิตศาสตร์ได้อย่างมีความหมายและจดจำได้มากขึ้น สอดคล้องกับณัฐสุดา เพ็งสร้อย,

จุรีรัตน์ อาจหาญ, วรุฒ หล้าบือ, วริญญา พงษ์ไพบูลย์, และวนินทร พูนไพบูลย์พิพัฒน์ (2565, น. 20 – 21) ได้กล่าวว่า สมรรถนะการสื่อสารเป็นสมรรถนะที่สำคัญที่ส่งผลให้นักเรียนเกิดการแบ่งปันแนวคิดและสร้างความเข้าใจให้ชัดเจนขึ้น นำไปสู่การสร้างแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความหมายและสามารถถ่ายทอดแนวคิดนั้นไปยังผู้อื่นให้มีความเข้าใจที่ตรงกันได้ ซึ่งสอดคล้องกับสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี (2560, น. 44) ได้กล่าวว่า การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์เป็นกระบวนการสื่อสารที่นอกจากนำเสนอผ่านช่องทางการสื่อสาร การฟัง การพูด การอ่าน การเขียน การสังเกต และการแสดงท่าทางตามปกติแล้วยังเป็นการสื่อสารที่มีลักษณะพิเศษ โดยมีการใช้สัญลักษณ์ ตัวแปร ตาราง กราฟ สมการ อสมการ ฟังก์ชัน หรือแบบจำลอง มาช่วยในการสื่อความหมายด้วย การสื่อสารและสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ จึงเป็นความสามารถในการใช้รูปภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อสารสื่อความหมาย สรุปผล และนำเสนอได้อย่างถูกต้อง ชัดเจน

นอกจากนี้เจตคติเชิงลบต่อคณิตศาสตร์อาจทำให้นักเรียนเกิดความวิตกกังวลต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ส่งผลให้นักเรียนขาดความมั่นใจ และกระทบต่อการพัฒนาทักษะกระบวนการของนักเรียน สอดคล้องกับ Akinsola & Olowojaiye (2008, pp. 60 – 73) ได้กล่าวว่า เจตคติเชิงบวกของนักเรียนมีส่วนช่วยในการปรับปรุง พัฒนาการเรียนรู้ให้ดีขึ้นได้ ส่วนเจตคติคติเชิงลบส่งผลต่อประสิทธิภาพในการเรียนรู้ของนักเรียน สอดคล้องกับงานวิจัยของ Kiwanuka, Van Damme, Van den Noortgate, and Reynolds (2020, pp. 1 – 25) ที่พบว่า นักเรียนที่มีเจตคติเชิงบวกต่อคณิตศาสตร์จะสนุกกับการเรียน เข้าใจและเห็นคุณค่าของการเรียนคณิตศาสตร์ มีความมั่นใจในการเรียนและให้ความสำคัญกับการเรียนคณิตศาสตร์

จากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ในรายวิชาคณิตศาสตร์ของผู้วิจัย พบว่า นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง นักเรียน เพื่อนร่วมชั้นเรียน และครูผู้สอนไม่ค่อยมีปฏิสัมพันธ์กัน ไม่ค่อยมีส่วนร่วมในการตอบคำถาม หรือแสดงความคิดเห็น โดยส่วนใหญ่นักเรียนที่ตอบคำถามนั้นจะเป็นนักเรียนที่เรียนคณิตศาสตร์ค่อนข้างเก่ง และจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย พบว่า นักเรียนไม่สามารถเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของภาคตัดกรวยจากเงื่อนไขในข้อความที่กำหนดให้ได้ เมื่อสุ่มให้นักเรียนตอบคำถามหรือแสดงความคิดเห็น นักเรียนบางคนไม่สามารถอธิบายแนวคิดของตนเองให้ผู้อื่นเข้าใจได้ จากการตรวจแบบฝึกหัดของนักเรียนเป็นรายบุคคล พบว่า นักเรียนเขียนแสดงวิธีทำไม่ชัดเจน ไม่ครบถ้วนสมบูรณ์ ไม่สามารถแปลงข้อความให้อยู่ในรูปสมการรูปมาตรฐานของภาคตัดกรวยได้ ไม่สามารถเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานแทนกราฟของภาคตัดกรวยที่กำหนดให้ได้ และไม่สามารถเขียนกราฟของภาคตัดกรวยเพื่อแสดงส่วนประกอบต่าง ๆ ของภาคตัดกรวยได้อย่างถูกต้องครบถ้วน

อีกทั้งจากการให้นักเรียนเขียนความรู้สึกของนักเรียนที่มีต่อการเรียนคณิตศาสตร์ พบว่านักเรียนบางส่วนไม่มีความสุขในการเรียน รู้สึกเบื่อหน่ายกับการเรียน บางคนเรียนไม่ทันเพื่อน บางคนคิดว่าคณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยากไม่จำเป็นต้องเรียนคณิตศาสตร์ และเมื่อนักเรียนไม่เข้าใจเนื้อหาจะไม่กล้าถามครูผู้สอน หรือถามเพื่อนที่เข้าใจ ซึ่งอาจเป็นเพราะกลัวจะทำให้เพื่อนเสียเวลา

จากปัญหาที่กล่าวมาข้างต้นนั้นมีสาเหตุมาจากการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนของผู้วิจัยที่เน้นการบรรยายเป็นหลัก เมื่อผู้วิจัยจัดกิจกรรมการเรียนสอนเสร็จได้มีการมอบหมายแบบฝึกหัดให้นักเรียนทำเป็นรายบุคคล ในระหว่างทำกิจกรรมนั้นไม่ค่อยมีกิจกรรมให้นักเรียนได้ทำร่วมกัน คำถามที่ใช้ถามนักเรียนส่วนใหญ่จะเป็นคำถามที่มีคำตอบที่ถูกต้องเพียงคำตอบเดียว มีวิธีการหาคำตอบเพียงวิธีเดียวโดยใช้วิธีเดิม ๆ และค่อนข้างจำกัดวิธีคิดของนักเรียน ไม่ค่อยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการหาคำตอบ แสดงความคิดเห็น หรือแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่หลากหลาย ทั้งนี้อาจเป็นเพราะโจทย์หรือคำถามในแบบฝึกหัดที่เน้นให้นักเรียนเขียนตอบ และแสดงวิธีทำเพียงอย่างเดียวเป็นส่วนใหญ่ โดยไม่ได้ให้นักเรียนฝึกเขียนแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์และอธิบายความเข้าใจของนักเรียน จึงทำให้นักเรียนมีปัญหาด้านการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และมีเจตคติที่ไม่ดีต่อคณิตศาสตร์

การทำงานกลุ่มเป็นการแสดงออกของนักเรียนในการทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกันเพื่อให้งานหรือเป้าหมายของกลุ่มประสบความสำเร็จ ซึ่งประกอบด้วยพฤติกรรมด้านความรับผิดชอบในการทำงานกลุ่ม ด้านการแสดงความคิดเห็นขณะทำงานกลุ่ม และด้านการช่วยเหลือเพื่อนในกลุ่ม ซึ่งสอดคล้องกับ ดำริ บุญชู (2543, น. 69) ได้กล่าวว่า การทำงานกลุ่มจะทำให้นักเรียนเกิดการพัฒนาทักษะทางสังคม ทักษะการทำงานร่วมกัน และสร้างความสัมพันธ์ที่ดีระหว่างบุคคลให้รู้จักการช่วยเหลือกันและเกิดการแลกเปลี่ยนความรู้กัน สอดคล้องกับ Kuh (2009, pp. 141) Al – Qaisi (2010, pp. 3392 – 3403) ได้กล่าวว่า การส่งเสริมพฤติกรรมการมีส่วนร่วมในชั้นเรียนจะช่วยให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในกิจกรรมการเรียนรู้ มีปฏิสัมพันธ์กับครูผู้สอนมากขึ้น สอดคล้องกับ Johnson, D. & Johnson, R. (1944, pp. 31 – 34) Slavin (1995, pp. 12 – 20) ได้กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือจะช่วยส่งเสริมให้นักเรียนช่วยเหลือกันพึ่งพาและเกื้อกูลกัน ช่วยทำให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีต่อกัน

คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่ครูผู้สอนนั้นสร้างขึ้นเพื่อเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความสามารถทางคณิตศาสตร์ เช่น ความสามารถในการคิด การให้เหตุผล และการสื่อสาร โดยการใช้คำถามปลายเปิดนั้นจะทำให้นักเรียนสามารถหาคำตอบที่ถูกต้องได้หลายคำตอบ ด้วยวิธีการที่หลากหลาย ซึ่งสอดคล้องกับรพีพัฒน์ แก้วอ่ำ (2559, น. 206) ได้กล่าวว่า การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดการเรียนรู้จะช่วยดึงดูดความสนใจของนักเรียน ช่วยกระตุ้นและเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดวิเคราะห์หาคำตอบ และแก้ปัญหาได้อย่างหลากหลาย นักเรียนสามารถแสดงความคิดของตนเองได้

อย่างอิสระ ทำให้นักเรียนกล้าคิดกล้าแสดงออกเพราะคำถามปลายเปิดที่ครูถามสามารถหาคำตอบได้หลายวิธี และมีคำตอบหลายคำตอบ พัฒนานักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกัน ช่วยตรวจสอบความเข้าใจของนักเรียน ทำให้เกิดบรรยากาศในการจัดการเรียนรู้ ส่งเสริมการคิดวิเคราะห์ ให้เหตุผลเปรียบเทียบ การคิดเชิงคณิตศาสตร์ ส่งเสริมการสื่อสารของนักเรียนในการแสดงออกถึงความรู้และความเข้าใจ การแลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน ช่วยให้ครูสามารถสืบค้นความคิดและวิเคราะห์ความคิดของนักเรียนว่านักเรียนมีความรู้ความเข้าใจในระดับใด ตรงตามเป้าหมายหรือไม่ สอดคล้องกับ Foong (2000, pp. 50 – 52) ได้กล่าวว่า การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ยังช่วยพัฒนาทักษะด้านการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เปิดโอกาสให้นักเรียนได้เรียนรู้ด้วยตนเองได้ทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม มีการพูดคุยแลกเปลี่ยนความรู้ทางคณิตศาสตร์ ทำให้นักเรียนเกิดความเข้าใจที่มากขึ้น สอดคล้องกับ Wendy and Nicole (2004) ได้กล่าวว่า การใช้คำถามปลายเปิดเป็นการเปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดทางคณิตศาสตร์ ช่วยให้ครูได้ทราบถึงระดับความเข้าใจคณิตศาสตร์ของนักเรียน และสอดคล้องกับไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ (2548, น.150 – 163) ที่กล่าวว่าการใช้คำถามปลายเปิดช่วยให้นักเรียนได้มีโอกาสในการแก้ปัญหาตามศักยภาพของตนเองได้อย่างเต็มศักยภาพทำให้นักเรียนเกิดความเชื่อมั่นว่าสามารถเรียนคณิตศาสตร์ได้

ผู้วิจัยจึงได้ศึกษาวิธีการและเทคนิคในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือที่จะนำมาใช้ร่วมกับคำถามปลายเปิด เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนเกิดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ สามารถทำงานร่วมกัน ช่วยเหลือกัน มีส่วนร่วมในการตอบคำถาม แสดงความคิดเห็น และมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งพบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD เป็นรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ ที่จัดกิจกรรมการเรียนรู้เป็นกลุ่ม เน้นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียน และการช่วยเหลือกัน สอดคล้องกับสุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2546, น. 175) และศศิธร เวียงวะลัย (2556, น. 145 – 146) ได้กล่าวว่า แนวคิดหลักของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD คือ การสร้างแรงจูงใจให้นักเรียนตั้งใจเรียนและช่วยเหลือเพื่อนสมาชิกในกลุ่มให้เรียนรู้และเข้าใจในสิ่งที่ครูสอน เนื่องจากคะแนนของนักเรียนแต่ละคนจะมีผลต่อคะแนนของกลุ่มและส่งผลต่อความสำเร็จของกลุ่ม ดังนั้นถ้านักเรียนต้องการให้กลุ่มของตนเองประสบความสำเร็จก็ต้องช่วยเหลือกัน ช่วยทบทวนเนื้อหาให้กับเพื่อนที่ยังไม่เข้าใจ เพื่อให้สมาชิกทุกคนเข้าใจในบทเรียนสามารถทำแบบทดสอบได้ และทำคะแนนให้กับกลุ่มของตนเองได้ นอกจากนี้การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ยังช่วยสร้างความสัมพันธ์ที่ดีระหว่างสมาชิกในกลุ่ม เพราะสมาชิกทุกคนร่วมมือกันในการทำงานกลุ่ม ทำให้นักเรียนเกิดเจตคติที่ดีต่อการเรียน สมาชิกทุกคนในกลุ่มมีโอกาสได้คิด และแสดงความคิดเห็นอย่างเท่าเทียมกัน ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักช่วยเหลือซึ่งกันและกัน นักเรียนที่เรียนเก่งเกิดความรู้สึกภาคภูมิใจที่ได้ช่วยเหลือเพื่อน ส่วนนักเรียนที่เรียนอ่อนก็จะเกิดความรู้สึกซาบซึ้งน้ำใจของเพื่อน ทำให้เกิดความรักความสามัคคีและความผูกพันกัน รู้จักรับฟังความ

คิดเห็นของผู้อื่น นักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันได้เรียนรู้ร่วมกัน ส่งเสริมทักษะการสื่อสาร ทักษะการทำงานเป็นกลุ่ม ให้ผู้เรียนสามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ และส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทาง กาเรียนสูงขึ้น ส่งเสริมให้นักเรียนได้เรียนรู้ทักษะทางสังคม ทำให้นักเรียนมีความตื่นเต้น และสนุกสนานกับการเรียนรู้มากขึ้น สอดคล้องกับวัฒนาพร ระงับทุกข์ (2542, น. 37) สุวิทย์ มูลคำและอรทัย มูลคำ (2545, น. 170) และ Slavin (1995, pp. 71 – 74) ได้กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD นั้นจะมีขั้นตอน คือ ครูจะแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 – 5 คน โดยจัดให้นักเรียนที่มีระดับความสามารถแตกต่างกันอยู่ในกลุ่มเดียวกัน ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ครูจะเป็นผู้สอนเนื้อหาในบทเรียนและความรู้ต่าง ๆ ให้กับนักเรียนก่อน แล้วให้นักเรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม เพื่อให้นักเรียนได้ทบทวนความรู้ในสิ่งที่ครูสอน ได้แลกเปลี่ยนความคิดเห็นซึ่งกันและกัน นักเรียนที่เรียนเก่งจะต้องช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนอ่อนให้เข้าใจในเนื้อหา โดยสมาชิกทุกคนในกลุ่มจะต้องเข้าใจในบทเรียน เพราะสุดท้ายจะมีการประเมินผลการเรียนรู้เป็นรายบุคคล โดยไม่มีการช่วยเหลือกัน และคะแนนของสมาชิกแต่ละคนจะถูกนำไปคิดเป็นคะแนนของกลุ่ม

จากการศึกษางานวิจัยของณัฏฐ์ชญา อินพูลวงษ์ (2559) ที่ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เจตคติต่อคณิตศาสตร์ และพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD พบว่านักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น มีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ และมีพฤติกรรมการทำงานกลุ่มอยู่ในระดับดี สอดคล้องกับงานวิจัยของอัจฉราพรรณ อาโน (2555) และงานวิจัยของอมราวดี เพชรรักษ์ (2561) ที่ศึกษาเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD เพื่อพัฒนาความสามารถในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ พบว่า นักเรียนมีความสามารถในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น อีกทั้งสอดคล้องกับงานวิจัยของ Hery Setiyawan (2019) ที่ได้ศึกษาเจตคติของนักเรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์ โดยจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD พบว่า นักเรียนมีเจตคติในเชิงสร้างสรรค์ต่อคณิตศาสตร์ และงานวิจัยของ Van Dat Tran (2013) ที่ศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งผลการวิจัยพบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้น และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ช่วยส่งเสริมเจตคติด้านบวกของนักเรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์ และจากการศึกษางานวิจัยที่เกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้คำถามปลายเปิดของพีชาณิกา เพชรสังข์ (2556) นฤพันธุ์ เพ่งพิศ (2561) บัวเหรียญ ดาโรจน์ (2555) สุดารัตน์ อะช่วยรัมย์ (2556) กันตาธรณ์ ฆ้องย่ำ (2560) และปิยะรัตน์ เงาผ่อง (2551) พบว่า การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ช่วยทำให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนสูงขึ้น ส่งเสริมให้นักเรียนมีความสามารถในการให้เหตุผล การคิดอย่างมีวิจารณญาณ การแก้ปัญหา มีความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ ช่วยพัฒนาทักษะ

การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน และทำให้นักเรียนทุกคนมีความกระตือรือร้นในการคิดหาคำตอบ และยังพบว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้คำถามปลายเปิด ร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือจะช่วยลดความกดดันของนักเรียนที่เรียนอ่อนลงได้

ดังนั้นผู้วิจัยจึงเลือกรูปแบบการจัดกิจกรรมเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด นำมาทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียน ส่งผลให้นักเรียนมีความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์และมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์มากขึ้น ซึ่งผู้วิจัยได้กำหนดวัตถุประสงค์การวิจัย ดังนี้

2. วัตถุประสงค์การวิจัย

2.1 เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด

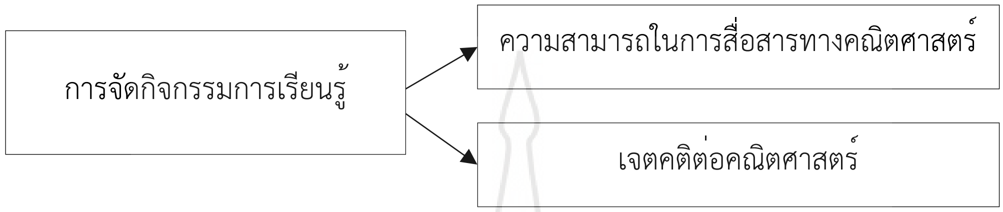
2.2 เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดกับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

3. สมมติฐานการวิจัย

3.1 ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดมีความสัมพันธ์กัน

3.2 สามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

4. กรอบแนวคิดการวิจัย



ภาพที่ 1.1 กรอบแนวคิดของการวิจัย

5. ขอบเขตการวิจัย

5.1 ประชากร คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง อำเภอเมืองระยอง จังหวัดระยอง จำนวน 3 ห้องเรียน มีนักเรียน 85 คน

5.2 เนื้อหา เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ คือ เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ตามหลักสูตรสถานศึกษาโรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง

5.3 ตัวแปรที่ศึกษา ประกอบด้วย

5.3.1 ตัวแปรอิสระ คือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้

5.3.2 ตัวแปรตาม คือ ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์

5.4 ระยะเวลาในการทดลอง

ระยะเวลาในการทดลองครั้งนี้ ดำเนินการภายในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

6. นิยามศัพท์เฉพาะ

6.1 คำถามปลายเปิด หมายถึง คำถามทางคณิตศาสตร์ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยใช้คำถามที่มีแนวทางการหาคำตอบได้อย่างหลากหลาย และมีคำตอบที่ถูกต้องได้หลายคำตอบ

6.2 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด หมายถึง การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือที่จัดกิจกรรมเป็นกลุ่มเน้นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างนักเรียน และการช่วยเหลือกันในการทำความเข้าใจเนื้อหา โดยใช้คำถามปลายเปิดในขั้นนำเสนอบทเรียนเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการตอบคำถาม และแสดงความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ซึ่งแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 – 5 คน โดยคละความสามารถ สมาชิกทุกคนในกลุ่มมีเป้าหมายในการทำคะแนนร่วมกัน ซึ่งมีขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 4 ขั้นตอน คือ ขั้นที่ 1 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน ขั้นที่ 2 ขั้นการทำงานกลุ่มร่วมกัน ขั้นที่ 3 ขั้นการทดสอบย่อยรายบุคคล และขั้นที่ 4 ขั้นการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มและให้รางวัลกลุ่ม

6.3 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ.2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งมีขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 3 ขั้นตอน คือ ขั้นที่ 1 ขั้นนำ ขั้นที่ 2 ขั้นสอน และขั้นที่ 3 ขั้นสรุป

6.4 ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการใช้ภาษา และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการถ่ายทอดและอธิบายความรู้ ความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ กระบวนการคิด และความคิดเห็น ให้ผู้อื่นเข้าใจได้อย่างถูกต้องชัดเจน สามารถวัดได้โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ซึ่งพิจารณาจากพฤติกรรมที่แสดงออก 3 ด้าน ตามแนวคิดของ Kennedy and Tipps (1994, p. 112) คือ ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ

6.5 เจตคติต่อคณิตศาสตร์ หมายถึง ความรู้สึก ความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์ทั้งด้านบวกและด้านลบ ความชอบ ไม่ชอบ การมีส่วนร่วม การหลีกเลี่ยงในการทำกิจกรรมที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ และความเชื่อเกี่ยวกับประโยชน์ของคณิตศาสตร์ ซึ่งวัดได้จากแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ มีองค์ประกอบ 3 ด้าน ตามแนวคิดของ Ajzen (1993, p. 42) คือ ด้านความรู้ความเข้าใจ ด้านอารมณ์ความรู้สึก และด้านพฤติกรรม

7. ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

7.1 เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์นำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้ โดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดในเนื้อหาอื่น ๆ

7.2 เป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้สำหรับครูที่สอนวิชาคณิตศาสตร์นำไปใช้ในการจัดการเรียนรู้เพื่อส่งเสริมความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ให้กับนักเรียน

บทที่ 2
วรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

การวิจัยเรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดที่มีต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง ผู้วิจัยได้ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ดังนี้

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD
   - 1.1 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ
   - 1.2 ความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD
   - 1.3 องค์ประกอบของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD
   - 1.4 ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD
   - 1.5 ข้อดีของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD
2. การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้
   - 2.1 ความหมายของคำถามปลายเปิด
   - 2.2 ความสำคัญของคำถามปลายเปิด
   - 2.3 ประเภทของคำถามปลายเปิด
   - 2.4 การสร้างคำถามปลายเปิด
3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ
4. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 4.1 ความหมายของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 4.2 ความสำคัญของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 4.3 แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
   - 4.4 การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์
5. เจตคติต่อคณิตศาสตร์
   - 5.1 ความหมายของเจตคติต่อคณิตศาสตร์
   - 5.2 องค์ประกอบของเจตคติต่อคณิตศาสตร์
   - 5.3 การวัดเจตคติต่อคณิตศาสตร์
6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

1. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ในหัวข้อเกี่ยวกับความหมายของการเรียนรู้แบบร่วมมือ องค์ประกอบของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ ความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD องค์ประกอบของการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD และข้อดีของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

1.1 การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ

นักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือและกล่าวถึงองค์ประกอบของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้ (ทิศนา แขมมณี, 2552, น. 66 – 67; สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ, 2545, น. 170 – 175; วัฒนาพร ระงับทุกข์, 2542, น. 34; สิริพร ทิพย์คง, 2545, น. 153 – 154; จันทรา ตันติพงศานุรักษ์, 2543, น. 36; ไสว ฟักขาว, 2544, น. 193; Slavin, 1987, p. 8; Johnson, D. & Johnson, R., 1944, pp. 31 – 34)

1.1.1 ความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ

การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ หมายถึง การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ฝึกการทำงานร่วมกันกับผู้อื่น โดยมีการแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่มเล็ก ๆ โดยที่สมาชิกแต่ละคนในกลุ่มมีความสามารถที่แตกต่างกัน แล้วให้นักเรียนทำกิจกรรมร่วมกัน โดยที่สมาชิกทุกคนในกลุ่มมีเป้าหมายในการทำงานร่วมกัน สมาชิกทุกคนในกลุ่มมีความรับผิดชอบร่วมกัน มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน มีการช่วยเหลือซึ่งกันและกันในการเรียนรู้ นักเรียนที่เรียนเก่งช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนอ่อน เพื่อให้บรรลุเป้าหมายของกลุ่มร่วมกัน

1.1.2 องค์ประกอบของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือ

1) การพึ่งพาและเกื้อกูลกัน ทุกคนจะต้องตระหนักว่าสมาชิกทุกคนในกลุ่มมีความสำคัญ และความสำเร็จของกลุ่มขึ้นอยู่กับสมาชิกทุกคนในกลุ่ม สมาชิกทุกคนในกลุ่มจะประสบความสำเร็จได้ ก็ต่อเมื่อ สมาชิกทุกคนช่วยเหลือกัน ความสำเร็จของสมาชิกแต่ละคนคือความสำเร็จของกลุ่ม

2) การปรึกษาหารือกัน การที่สมาชิกในกลุ่มมีการพึ่งพาช่วยเหลือเกื้อกูลกัน ช่วยเหลือกันในการทำงานต่างๆ จะทำให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์ที่ดีต่อกัน

3) การเรียนรู้แบบร่วมมือจะมีการแบ่งงานและหน้าที่กัน สมาชิกทุกคนในกลุ่มมีความรับผิดชอบต่อหน้าที่ที่ได้รับมอบหมาย และพยายามทำงานที่ได้รับมอบหมายอย่างเต็มความสามารถ

4) การเรียนรู้แบบร่วมมือจะต้องมีการใช้ทักษะการปฏิสัมพันธ์ระหว่างบุคคล ทักษะในการทำงานเป็นกลุ่ม ทักษะการสื่อสาร ทักษะการแก้ปัญหา

5) การเรียนรู้แบบร่วมมือจะมีการวิเคราะห์กระบวนการทำงานกลุ่ม เพื่อปรับปรุงการทำงานให้ดีขึ้น

6) ในการเรียนรู้แบบร่วมมือ ทุกคนในกลุ่มจะมีเป้าหมายในการทำงานร่วมกัน

7) สมาชิกทุกคนในกลุ่มมีโอกาส และส่วนร่วมในการทำคะแนนให้กับกลุ่มเท่าเทียมกัน

8) ในการเรียนรู้แบบร่วมมือ จะมีการแข่งขันระหว่างกลุ่ม ซึ่งเป็นการสร้างแรงจูงใจภายในกลุ่ม

9) การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือแต่ละรูปแบบจะมีการดัดแปลงกิจกรรมการเรียนการสอนให้เหมาะสมกับความต้องการของนักเรียนแต่ละคน

1.2 ความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD

จากการศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง มีนักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ซึ่งสามารถสังเคราะห์และสรุปได้ดังนี้ (วัฒนาพร ระงับทุกข์, 2542, น. 37; สุวิทย์ มูลคำและอรทัย มูลคำ, 2545, น. 170; Slavin, 1995, pp. 71 – 74) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD เป็นรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือรูปแบบหนึ่ง ที่จัดการเรียนรู้เป็นกลุ่มเน้นการสร้างความสัมพันธ์ระหว่างผู้เรียน และการช่วยเหลือกันในการทำความเข้าใจเนื้อหา โดยในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ครูจะแบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 – 5 คน โดยคละความสามารถ โดยที่สมาชิกทุกคนในกลุ่มมีเป้าหมายร่วมกัน จากนั้นครูสอนบทเรียนให้กับนักเรียน แล้วให้นักเรียนทำงานและทบทวนความรู้ที่ครูสอนร่วมกันเป็นกลุ่ม สมาชิกในกลุ่มที่เข้าใจเนื้อหาแล้วช่วยอธิบายและทบทวนให้กับสมาชิกในกลุ่มที่ยังไม่เข้าใจเนื้อหาเพื่อให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มเข้าใจเนื้อหา สุดท้ายจะมีการทดสอบเพื่อประเมินผลการเรียนรู้เป็นรายบุคคล โดยไม่มีการช่วยเหลือกัน และคะแนนของสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มจะถูกนำไปเปรียบเทียบกับคะแนนพื้นฐาน แล้วคิดเป็นคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม กลุ่มที่มีคะแนนพัฒนาการถึงเกณฑ์ก็จะได้รับรางวัล

1.3 องค์ประกอบของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD

จากการศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงองค์ประกอบของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ซึ่งสรุปได้ดังนี้ (James, 2014, pp. 302 – 306; สิริพร ทิพย์คง, 2545, น. 155 – 161)

1.3.1 เป็นรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบกลุ่มที่สมาชิกในกลุ่มมีความแตกต่างกัน โดยมีการใช้ข้อมูลผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ความสามารถ เพศ และคุณลักษณะอื่น ๆ มาเป็นข้อมูลในการแบ่งกลุ่ม

1.3.2 การนำเสนอเนื้อหา ครูผู้สอนจะเป็นผู้นำเสนอเนื้อหาสาระของบทเรียน การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ไม่ได้เป็นรูปแบบของการเรียนรู้ด้วยตนเอง แต่เป็นรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่นักเรียนช่วยกันเรียนรู้เนื้อหา โดยครูผู้สอนเป็นผู้เตรียมวัสดุอุปกรณ์ สื่อการเรียนรู้ และประสบการณ์ที่นักเรียนต้องใช้ในการทำความเข้าใจกับเนื้อหาของบทเรียนให้กับนักเรียน

1.3.3 สมาชิกในกลุ่มต้องทำงานร่วมกัน มีการช่วยเหลือซึ่งกันและกัน ช่วยทบทวนเนื้อหาให้กับเพื่อนที่ยังไม่เข้าใจ

1.3.4 มีการประเมินผลการเรียนรู้ของผู้เรียนแต่ละคนเป็นรายบุคคล โดยไม่มีการช่วยเหลือจากสมาชิกคนอื่นในกลุ่ม

1.3.5 ผลงานและคะแนนของกลุ่ม ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD จะมีการคำนวณคะแนนพัฒนาการ ซึ่งได้มาจากการคิดคำนวณคะแนนของสมาชิกในกลุ่มทุกคน ดังนั้นสมาชิกทุกคนในกลุ่มจะมีส่วนร่วมในคะแนนของกลุ่ม กลุ่มที่มีคะแนนพัฒนาการผ่านเกณฑ์ที่กำหนดจะได้รับรางวัล

1.4 ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD

จากการศึกษาเอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงขั้นตอนของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ซึ่งสามารถสังเคราะห์และสรุปได้ดังนี้ (วิมลรัตน์ สุนทรโรจน์, 2545, น. 47; ทิศนา แขมมณี, 2552, น. 66 – 67; สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ, 2545, น. 170 – 175; Slavin, 1995, pp. 71 – 73) การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD มี 4 ขั้นตอน ดังนี้

1.4.1 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน ประกอบด้วยการชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน และสอนเนื้อหาใหม่ให้กับนักเรียน

1.4.2 ขั้นการทำงานกลุ่มร่วมกัน เป็นขั้นที่แบ่งนักเรียนออกเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4 – 5 คน โดยคละความสามารถ แล้วให้นักเรียนทำงานร่วมกันเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ สมาชิกในกลุ่มที่เข้าใจเนื้อหาแล้วช่วยอธิบายและทบทวนให้กับสมาชิกในกลุ่มที่ยังไม่เข้าใจเนื้อหา

1.4.3 ขั้นการทดสอบย่อยรายบุคคล เป็นขั้นที่นักเรียนทำการสอบเป็นรายบุคคลในแต่ละเรื่องย่อย หลังจากที่ได้ทบทวนความรู้เป็นกลุ่มแล้ว เพื่อเก็บเป็นคะแนนพื้นฐานนำไปใช้ในการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม

1.4.4 ขั้นการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มและให้รางวัลกลุ่มในแต่ละเรื่องย่อยเมื่อนักเรียนทดสอบย่อยรายบุคคลแล้ว ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจคำตอบ แล้วเก็บคะแนนที่ได้ไว้เป็นคะแนนพื้นฐาน เมื่อจบเรื่องย่อยถัดไปให้นักเรียนทำการทดสอบ และนำคะแนนที่ได้ไปเปรียบเทียบกับคะแนนพื้นฐานเพื่อหาคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม กลุ่มที่ได้คะแนนผ่านเกณฑ์ จะได้รับรางวัล ซึ่งคะแนนพัฒนาการหาได้ดังนี้ (Slavin, 1995, pp. 71 – 73)

คะแนนพื้นฐาน หาได้จากคะแนนทดสอบย่อยในแต่ละครั้งที่ผู้เรียนแต่ละคนทำได้

คะแนนที่ได้ หาได้จากการนำคะแนนทดสอบครั้งล่าสุดลบคะแนนพื้นฐาน

คะแนนพัฒนาการ พิจารณาจากคะแนนที่ได้ ดังนี้

1) ได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนพื้นฐาน 10 คะแนนลงไป จะได้คะแนนพัฒนาการ 0 คะแนน

2) ได้คะแนนต่ำกว่าคะแนนพื้นฐาน 1 – 10 คะแนน จะได้คะแนนพัฒนาการ 10 คะแนน

3) ได้คะแนนเกินกว่าคะแนนพื้นฐาน 1 – 10 คะแนน จะได้คะแนนพัฒนาการ 20 คะแนน

4) ได้คะแนนเกินกว่าคะแนนพื้นฐาน 10 คะแนนขึ้นไป จะได้คะแนนพัฒนาการ 30 คะแนน

5) ทำถูกต้องทุกข้อ ไม่ต้องดูคะแนนพื้นฐาน จะได้คะแนนพัฒนาการ 30 คะแนน

จากเกณฑ์การพิจารณาคะแนนพัฒนาการ ผู้วิจัยได้กำหนดเกณฑ์การพิจารณาคะแนนพัฒนาการเพื่อให้สอดคล้องกับคะแนนเต็มของแบบทดสอบย่อยของผู้วิจัย ดังนี้

1) ได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนพื้นฐาน 5 คะแนนลงไป จะได้คะแนนพัฒนาการ 0 คะแนน

2) ได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนพื้นฐาน 1 – 5 คะแนน จะได้คะแนนพัฒนาการ 10 คะแนน

3) ได้คะแนนเท่ากับคะแนนพื้นฐานหรือมากกว่าคะแนนพื้นฐาน 1 – 4 คะแนน จะได้คะแนนพัฒนาการ 20 คะแนน

4) ได้คะแนนเต็ม หรือมากกว่ากว่าคะแนนพื้นฐาน 5 คะแนนขึ้นไป จะได้คะแนนพัฒนาการ 30 คะแนน

1.5 ข้อดีของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวกับข้อดีของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงข้อดีของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD

ซึ่งสามารถสรุปและสังเคราะห์ (สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ, 2546, น. 175; ศศิธร เวียงวะลัย, 2556, น. 145 – 146) ได้ดังนี้

1.5.1 สร้างความสัมพันธ์ที่ดีระหว่างสมาชิกในกลุ่ม เพราะสมาชิกทุกคนร่วมมือกันในการทำงานกลุ่ม สมาชิกทุกคนมีส่วนร่วมอย่างเท่าเทียมกัน ทำให้นักเรียนเกิดเจตคติที่ดีต่อการเรียน

1.5.2 ส่งเสริมให้สมาชิกทุกคนมีโอกาสได้คิด พูด แสดงออก แสดงความคิดเห็น ลงมือทำอย่างเท่าเทียมกัน

1.5.3 ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักช่วยเหลือซึ่งกันและกัน นักเรียนที่เรียนเก่งได้ช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนอ่อน ทำให้นักเรียนที่เรียนเก่งรู้สึกภูมิใจ ยอมเสียสละเวลาช่วยเหลือเพื่อนนักเรียนที่เรียนอ่อนก็จะเกิดความซาบซึ้งในน้ำใจของเพื่อนสมาชิกด้วยกัน ทำให้เกิดความรัก สามัคคีและผูกพันกัน

1.5.4 ทำให้นักเรียนรู้จักรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น ร่วมกันคิด ร่วมกันระดมความคิด นำข้อมูลที่ได้จากการคิดมาพิจารณาร่วมกันเพื่อหาคำตอบที่เหมาะสมที่สุด ทำให้เกิดการคิดวิเคราะห์และการตัดสินใจ

1.5.5 ส่งเสริมทักษะการสื่อสาร ทักษะการทำงานเป็นกลุ่ม ให้ผู้เรียนสามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้ และส่งผลให้ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนสูงขึ้น

1.5.6 นักเรียนมีความเอาใจใส่มากขึ้น มีความรับผิดชอบต่อตนเอง และกลุ่มร่วมกับสมาชิกคนอื่น ๆ

1.5.7 ส่งเสริมให้นักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันได้เรียนรู้ร่วมกัน

1.5.8 ส่งเสริมให้นักเรียนได้ผลัดเปลี่ยนกันเป็นผู้นำ

1.5.9 ส่งเสริมให้นักเรียนได้ฝึกทักษะทางสังคม และเรียนรู้ทักษะทางสังคมโดยตรง

1.5.10 นักเรียนมีความตื่นเต้น และสนุกสนานกับการเรียนรู้มากขึ้น

2. การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับการใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ในหัวข้อเกี่ยวกับความหมายของคำถามปลายเปิด ความสำคัญของคำถามปลายเปิด ประเภทของคำถามปลายเปิด และการสร้างคำถามปลายเปิด ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

2.1 ความหมายของคำถามปลายเปิด

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวกับความหมายของคำถามปลายเปิด ได้มีนักการศึกษาหลายท่านได้กล่าวถึงความหมายของคำถามปลายเปิด (Becker & Shimada, 1997, p. 1; Stenmark, 1991, p. 20; ปรีชา เนาว์เย็นผล, 2544, น. 27; Cai, 1996, p. 137) ซึ่งสามารถสรุปได้

ว่าคำถามปลายเปิด หมายถึง คำถามที่มีคำตอบมากกว่าหนึ่งคำตอบ และมีวิธีการในการหาคำตอบได้มากกว่าหนึ่งวิธี เป็นคำถามที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความสามารถในการคิด การให้เหตุผล การสื่อสารและการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์ ถึงแม้ว่าจะมีผู้หาคำตอบได้แล้ว แต่นักเรียนคนอื่นก็ยังมีโอกาสหาคำตอบอื่น ๆ ได้อีก ทำให้นักเรียนตอบคำถามได้ตามระดับความสามารถของตนเอง ซึ่งคำตอบที่ได้จะสะท้อนถึงระดับความเข้าใจของนักเรียนแต่ละคน

2.2 ความสำคัญของคำถามปลายเปิด

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวกับความสำคัญของคำถามปลายเปิด ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความสำคัญของคำถามปลายเปิด (Foong, 2000, pp. 50 – 52; ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2548, น. 156 – 163) ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า คำถามปลายเปิดเป็นคำถามที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดหาคำตอบได้หลากหลายคำตอบ และมีวิธีการในการหาคำตอบหลายวิธี ทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียน เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดทางคณิตศาสตร์ ใช้กระบวนการที่มีเหตุผล และได้ใช้ทักษะการสื่อสารและการแก้ปัญหาตามแนวทางของตนเอง ช่วยให้ครูทราบถึงระดับความเข้าใจของนักเรียน และช่วยเพิ่มความเชื่อมั่นให้กับนักเรียนในการหาคำตอบ และส่งผลให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อวิชาคณิตศาสตร์

2.3 ประเภทของคำถามปลายเปิด

ในการวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้เลือกใช้คำถามปลายเปิดที่มีแนวทางการหาคำตอบได้อย่างหลากหลาย และคำถามที่มีคำตอบที่ถูกต้องได้หลายคำตอบ (Nohda, 1983 อ้างถึงใน ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2547, น. 6 – 8)

2.4 การสร้างคำถามปลายเปิด

Becker and Shimada (1997, pp. 28 – 31) มีวิธีการสร้างคำถามปลายเปิด ดังนี้

2.4.1 เตรียมสถานการณ์เชิงกายภาพที่เกี่ยวข้องกับตัวแปรเชิงปริมาณที่สามารถสังเกตความสัมพันธ์ได้

2.4.2 เปลี่ยนคำถามจากเดิมที่ให้พิสูจน์ทฤษฎีบทในรูป "ถ้า P แล้ว Q" เปลี่ยนเป็น "ถ้า P แล้วความสัมพันธ์ของสิ่งต่าง ๆ ที่นักเรียนพบมีอะไรบ้าง" โดยจะต้องมีการกำหนดขอบเขตของสิ่งต่าง ๆ ให้เฉพาะเจาะจงมากขึ้น

2.4.3 ในการสอนเกี่ยวกับทฤษฎีบท ควรเริ่มด้วยการยกตัวอย่างหลาย ๆ ตัวอย่างก่อน เพื่อให้นักเรียนได้สร้างข้อสรุปด้วยตนเอง

2.4.4 แสดงรายการที่เป็นลำดับหรือตารางของข้อมูลต่าง ๆ เพื่อให้นักเรียนได้ค้นหาความสัมพันธ์หรือกฎทางคณิตศาสตร์

2.4.5 ใช้ตัวอย่างจริงเพื่อให้นักเรียนได้เห็นภาพ

2.4.6 แสดงคำถามที่มีลักษณะคล้ายกันหลาย ๆ คำถามเพื่อให้นักเรียนได้หาคำตอบและหาสมบัติที่คำถามเหล่านั้นมีร่วมกัน

2.4.7 จัดสถานการณ์กึ่งคณิตศาสตร์ (Quasi – Mathematics) ซึ่งเป็นสถานการณ์ที่นักเรียนสามารถนำคณิตศาสตร์ไปใช้ในการช่วยอธิบายได้

2.4.8 แสดงตัวอย่างที่ชัดเจนของโครงสร้างทางพีชคณิต โดยแสดงตัวอย่างที่เป็นข้อมูลเชิงตัวเลขที่ง่ายในการพิจารณาเพื่อให้นักเรียนได้ค้นหากฎทางคณิตศาสตร์

ในการนำคำถามปลายเปิดไปใช้ในการเรียนการสอน ควรพิจารณาสิ่งต่อไปนี้

1) คำถามนั้นมีคุณค่าทางคณิตศาสตร์หรือไม่ โดยคำถามนอกจากจะกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดจากมุมมองที่แตกต่างกันแล้วควรจะมีคุณค่าในเชิงเนื้อหาคณิตศาสตร์ คือ นักเรียนที่มีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนทั้งสูงและต่ำสามารถแก้ปัญหาได้โดยใช้ความรู้ทางคณิตศาสตร์ที่ตนเองมีอยู่ ซึ่งแต่ละคนอาจใช้วิธีการที่แตกต่างกัน และในวิธีการนั้นยังคงมีคุณค่าทางคณิตศาสตร์

2) ระดับของความรู้คณิตศาสตร์ที่ต้องใช้ในการตอบคำถามเหมาะกับระดับความรู้ของนักเรียนหรือไม่ เพราะเมื่อนักเรียนต้องตอบคำถามปลายเปิดนักเรียนจะต้องใช้ความรู้และทักษะทางคณิตศาสตร์ที่เรียนมาแล้ว ดังนั้นครูควรเลือกใช้คำถามที่เหมาะสมกับพื้นฐานความรู้ของนักเรียน

3) คำถามนั้นเมื่อใช้แล้วสามารถนำไปสู่การพัฒนาเชิงคณิตศาสตร์ได้หรือไม่ คือ คำตอบที่เป็นไปได้ของคำถามปลายเปิดนั้นควรจะมีบางคำตอบที่สามารถเชื่อมโยงหรือสัมพันธ์กับมโนมติทางคณิตศาสตร์ในระดับที่สูงขึ้น หรือสามารถพัฒนาระดับการคิดเชิงคณิตศาสตร์ที่สูงขึ้นได้

4) นักเรียนสามารถตอบได้อย่างหลากหลายทั้งวิธีการและคำตอบ เพราะนักเรียนแต่ละคนย่อมมีความคิดไม่เหมือนกัน และที่สำคัญควรเปิดโอกาสให้นักเรียนได้สื่อสารความเข้าใจในเรื่องนั้น ๆ ได้อย่างอิสระและเต็มความสามารถ

5) เป็นคำถามที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้สื่อสารความคิดของตนเอง เพราะเมื่อใดที่นักเรียนได้สื่อสารความคิดหรือเหตุผลของตนเองแล้ว ครูก็จะสามารถรับรู้ได้ว่านักเรียนมีความรู้ความเข้าใจและสามารถประยุกต์ใช้ความรู้ได้อย่างไรบ้าง

6) คำถามที่ใช้ควรมีความชัดเจนว่าต้องการให้นักเรียนทำหรือแสดงอะไรเมื่อนักเรียนได้อ่านคำถามแล้วควรจะคาดเดาได้ว่าคำตอบลักษณะใดที่เป็นคำตอบที่เหมาะสมและตรงกับความต้องการของครู

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD และการใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ผู้วิจัยได้สรุปขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ดังนี้

ตารางที่ 2.1 ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด

ขั้นตอน	วิธีดำเนินการ	ลักษณะกิจกรรม	บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
1. ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน	1. ครูชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ให้กับนักเรียน 2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน และสอนเนื้อหาใหม่ให้กับนักเรียนโดยใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการตอบคำถามและการแสดงความคิดเห็น 3. ในการสรุปบทเรียนครูใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนสรุปบทเรียนด้วยตนเอง	1. ครูชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ 2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนโดยใช้คำถามปลายเปิดเพื่อเชื่อมโยงความรู้เดิมที่เป็นความรู้พื้นฐานของนักเรียนกับเนื้อหาใหม่ที่กำลังจะสอน 3. ครูสอนเนื้อหาใหม่ให้กับนักเรียนโดยใช้การบรรยาย ร่วมกับใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการตอบคำถาม 4. หลังจากที่สอนเนื้อหาเสร็จแล้วครูและนักเรียนจะร่วมกันสรุปบทเรียนโดยครูใช้คำถามปลายเปิดเพื่อให้นักเรียนสรุปบทเรียนด้วยตนเองก่อนและครูจะคอยช่วยเสริมให้ชัดเจนขึ้น	1. ครูเป็นผู้ชี้แจงจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ 2. ในขณะที่ครูทบทวนความรู้เดิมและสอนเนื้อหาใหม่ให้กับนักเรียนครูจะใช้คำถามปลายเปิดร่วมกับการบรรยายเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการตอบคำถามและการแสดงความคิดเห็น 3. ในการสรุปบทเรียนครูจะต้องใช้คำถามเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนสรุปบทเรียนด้วยตนเองก่อนแล้วครูจึงช่วยเสริมให้ชัดเจนและครบถ้วน	1. นักเรียนทำความเข้าใจกับจุดประสงค์การเรียนรู้ที่ครูแจ้ง 2. เมื่อครูถามคำถาม นักเรียนจะต้องมีส่วนร่วมในการตอบคำถาม การแสดงความคิดเห็นและแสดงความสามารถในการสื่อสารและการสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์เพื่อให้ครูและเพื่อนในชั้นเรียนเข้าใจสิ่งที่นักเรียนสื่อสารออกมา 3. นักเรียนทุกคนจะต้องช่วยกันสรุปบทเรียนด้วยตนเองก่อน

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

ขั้นตอน	วิธีดำเนินการ	ลักษณะกิจกรรม	บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
2. ขั้นการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม	ให้นักเรียนแต่ละกลุ่มที่ครูแบ่งกลุ่มโดยคละความสามารถไว้แล้ว กลุ่มละ 4 – 5 คน ทำกิจกรรมกลุ่มร่วมกันเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ โดยนักเรียนที่เข้าใจเนื้อหาแล้วช่วยอธิบายและทบทวนให้กับสมาชิกในกลุ่มที่ยังไม่เข้าใจเนื้อหา	1. ครูแจกใบความรู้ให้กับนักเรียนแต่ละกลุ่ม แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มศึกษาใบความรู้ร่วมกันเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ 2. ครูแจกใบกิจกรรมที่มีการแทรกคำถามปลายเปิดไว้ให้กับนักเรียน แล้วให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทำกิจกรรมร่วมกัน โดยให้นักเรียนที่เรียนเก่งหรือเข้าใจเนื้อหาแล้วช่วยสอนและทบทวนความรู้ให้กับนักเรียนที่เรียนอ่อนหรือนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจเนื้อหา เพื่อเตรียมตัวทดสอบย่อยรายบุคคล 3. หลังจากที่นักเรียนแต่ละกลุ่มทำใบกิจกรรมเสร็จแล้ว ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบกิจกรรม	1. ครูแจกใบความรู้และใบงานให้กับนักเรียน 2. ครูกระตุ้นให้สมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือกัน โดยให้นักเรียนที่เข้าใจเนื้อหาแล้ว ช่วยสอนและทบทวนให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจเนื้อหา 3. ครูคอยดูแลและให้คำแนะนำเพิ่มเติมกับนักเรียน เมื่อนักเรียนมีข้อสงสัยหรือต้องการความช่วยเหลือ 4. เมื่อนักเรียนทำใบกิจกรรมเสร็จ ครูเฉลยใบกิจกรรม โดยให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเฉลยคำตอบ	1. นักเรียนมีการทบทวนความรู้ร่วมกัน 2. นักเรียนพูดคุยแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันภายในกลุ่ม 3. นักเรียนช่วยเหลือกัน โดยนักเรียนที่เข้าใจเนื้อหาแล้ว ช่วยสอนและทบทวนให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจ ส่วนนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจในเนื้อหาจะต้องพยายามทำความเข้าใจในเนื้อหา 4. นักเรียนมีส่วนร่วมในการเฉลย และถ้ามีข้อที่ผิดนักเรียนต้องแก้ไขให้ถูกต้อง และช่วยกันทบทวนอีกครั้งภายในกลุ่มของตนเอง

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

ขั้นตอน	วิธีดำเนินการ	ลักษณะกิจกรรม	บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
3. ขั้นการทดสอบย่อยรายบุคคล	หลังจากที่ได้ทบทวนความรู้เป็นกลุ่มแล้ว ให้นักเรียนทำการสอบย่อยเป็นรายบุคคล โดยไม่มีการช่วยเหลือกัน เพื่อเก็บคะแนนพื้นฐานนำไปคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม	ครูอธิบายวิธีการทดสอบย่อยรายบุคคล โดยนักเรียนทุกคนจะต้องทำแบบทดสอบโดยไม่มีการช่วยเหลือกัน และคะแนนของนักเรียนทุกคนจะถูกนำมาคิดเป็นคะแนนของกลุ่ม จากนั้นครูแจกแบบทดสอบย่อยรายบุคคลให้นักเรียนแต่ละคน แล้วให้นักเรียนลงมือทำแบบทดสอยย่อยพร้อมกัน หลังจากที่นักเรียนทำแบบทดสอบเสร็จแล้วให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ โดยครูและนักเรียนร่วมกันเฉลย และอธิบายที่มาของคำตอบ	1. ครูอธิบายวิธีการทดสอบย่อยรายบุคคล ซึ่งนักเรียนจะไม่มีการช่วยเหลือกัน และคะแนนของนักเรียนจะถูกนำมาคิดเป็นคะแนนของกลุ่ม 2. ครูแจกแบบทดสอบย่อย 3. ครูย้ำให้นักเรียนตั้งใจทำแบบทดสอบอย่างเต็มความสามารถเพราะคะแนนของนักเรียนมีผลต่อคะแนนพัฒนาของกลุ่ม 4.ครูเฉลยร่วมกับนักเรียน โดยให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจในขณะที่เฉลยแต่ละข้อ ครูมีการอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้กับนักเรียน	1. นักเรียนจะต้องตั้งใจทำแบบทดสอบ เพราะคะแนนของนักเรียนมีผลต่อคะแนนกลุ่ม 2. นักเรียนมีความซื่อสัตย์สุจริตในการทำแบบทดสอบ 3. หลังจากที่สอบเสร็จนักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ 4. นักเรียนเฉลยไปพร้อมกับครู หากมีข้อสงสัยสามารถสอบถามครูได้ 5. เมื่อตรวจเสร็จนักเรียนตรวจสอบความถูกต้องก่อนรวมคะแนน แล้วส่งกระดาษคำตอบคืนให้กับเพื่อน นักเรียนแต่ละกลุ่มช่วยกันทบทวน และทำความเข้าใจกับข้อที่ผิดอีกครั้ง

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

ขั้นตอน	วิธีดำเนินการ	ลักษณะกิจกรรม	บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
4. ขั้นการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มและให้รางวัลกลุ่ม	เมื่อนักเรียนทดสอบย่อยรายบุคคลแล้ว ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจคำตอบ แล้วเก็บคะแนนที่ได้ไว้เป็นคะแนนพื้นฐาน เมื่อจบเรื่องย่อยถัดไป ให้นักเรียนทำการทดสอบย่อย และนำคะแนนไปเปรียบเทียบกับคะแนนพื้นฐานเพื่อหาคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม โดยกลุ่มที่ได้คะแนนสูงสุด 5 อันดับแรกจะได้รับรางวัล	1. ในการทดสอบครั้งแรกจะยังไม่มีการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการ ทุกคนจะเก็บคะแนนทดสอบย่อยครั้งแรกไว้เป็นคะแนนพื้นฐานก่อน เมื่อมีการทดสอบย่อยในครั้งถัดไปจึงจะนำคะแนนในครั้งแรกไปคำนวณหาคะแนนพัฒนาการและมอบรางวัลให้กับกลุ่มที่ได้คะแนนผ่านเกณฑ์ 2. ในการทดสอบย่อยครั้งถัดไปจะมีการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม โดยครูอธิบายวิธีการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการให้กับนักเรียน 3. เมื่อนักเรียนได้รับแบบทดสอบที่ตรวจเสร็จแล้วคืนมา ให้นักเรียนบอกคะแนนที่ได้กับครูทีละคน แล้วครูกรอกคะแนนของนักเรียนเพื่อเปรียบเทียบ	1. ครูอธิบายวิธีการคำนวณคะแนนพัฒนาการให้กับนักเรียนทราบ 2. ครูให้นักเรียนแต่ละคนบอกคะแนนสอบในครั้งถัดไปกับครูทีละคน โดยครูจะเป็นผู้บันทึกคะแนน เปรียบเทียบคะแนนและคำนวณคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม แล้วแจ้งคะแนนพัฒนาการให้กับนักเรียนทราบและให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องของคะแนนที่ครูคำนวณได้กับคะแนนของนักเรียน 3. ครูกล่าวชื่นชมแสดงความยินดีกับนักเรียนกลุ่มที่ได้รับรางวัล และกล่าวให้กำลังใจกับ	1. นักเรียนจดบันทึกคะแนนพัฒนาการของตนเองในแต่ละครั้ง 2. เมื่อนักเรียนบอกคะแนนที่ได้จากการทดสอบในครั้งถัดไปกับครูแล้ว ให้นักเรียนคำนวณคะแนนพัฒนาการของตนเองด้วย เพื่อตรวจความถูกต้องของคะแนนอีกครั้งหนึ่ง 3. นักเรียนมีการแสดงความยินดีกับกลุ่มที่ได้รับรางวัล และมีการให้กำลังใจกับสมาชิกในกลุ่มให้พยายามใหม่ในครั้งถัดไป

ตารางที่ 2.1 (ต่อ)

ขั้นตอน	วิธีดำเนินการ	ลักษณะกิจกรรม	บทบาทครู	บทบาทนักเรียน
		กับคะแนนสอบในครั้งที่แล้ว และคำนวณหาคะแนนพัฒนาการของแต่ละกลุ่ม 4. ครูแจ้งคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มให้นักเรียนแต่ละกลุ่มทราบ และมอบรางวัลให้กับกลุ่มที่มีคะแนนพัฒนาการผ่านเกณฑ์ พร้อมทั้งกล่าวให้กำลังใจกับนักเรียนที่ไม่ได้รับรางวัลให้พยายามใหม่ในครั้งถัดไป	นักเรียนกลุ่มที่ยังไม่ได้รับรางวัล เพื่อให้นักเรียนมีการพัฒนาตนเองและพยายามทำให้ดีขึ้นในครั้งถัดไป เพื่อให้นักเรียนมีการพัฒนาตนเองและพยายามทำให้ดีขึ้นในครั้งถัดไป	

3. การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

ผู้วิจัยได้ศึกษาและนำรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติจากคู่มือครูที่จัดทำโดยสถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ตามตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 ซึ่งประกอบด้วยกิจกรรมนำเข้าสู่บทเรียน ที่ใช้เพื่อตรวจสอบความรู้ก่อนหน้าที่จำเป็นสำหรับเนื้อหาใหม่ที่ครูจะสอน และกิจกรรมที่ใช้สำหรับสร้างความคิดรวบยอดในเนื้อหา โดยหลังจากทำกิจกรรมแล้วครูควรเชื่อมโยงความคิดรวบยอดที่ต้องการเน้นกับผลที่ได้จากการทำกิจกรรม และควรส่งเสริมให้นักเรียนได้ลงมือปฏิบัติด้วยตนเอง สามารถศึกษาเพิ่มเติมได้ด้วยตนเอง เพื่อช่วยพัฒนาทักษะการเรียนรู้และนวัตกรรมที่จำเป็นสำหรับศตวรรษที่ 21 ซึ่งได้แก่ การคิดสร้างสรรค์และนวัตกรรม การคิดแบบมีวิจารณญาณและการแก้ปัญหา การสื่อสาร และการร่วมมือ และมีขั้นตอนในการดำเนินกิจกรรมที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้ใช้และพัฒนาทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษาข้างต้นผู้วิจัยได้สรุปขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ ซึ่งประกอบด้วยขั้นตอนในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 3 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำ เป็นขั้นที่ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียน

ขั้นที่ 2 ขั้นสอน เป็นขั้นที่ครูสอนเนื้อหาใหม่ให้กับนักเรียน โดยใช้วิธีการบรรยาย การยกตัวอย่าง และการถามตอบ

ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป เป็นขั้นที่ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปองค์ความรู้ที่ได้เรียน และหลังจากที่สรุปครูจะให้นักเรียนแต่ละคนทำใบงาน

4. ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาความหมาย ความสำคัญ แนวทางในการพัฒนาและการประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

4.1 ความหมายของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษาความหมายของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ได้มีหน่วยงานและนักการศึกษาหลายท่านได้ให้ความหมายของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2560, น. 61; สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา, 2000, น. 4 – 5; อัมพร ม้าคนอง, 2554, น. 56; เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร, 2555, น. 20; Thurber, 1976, p. 513) ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการใช้ภาษา และสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการถ่ายทอด

และอธิบายความรู้ ความเข้าใจ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ กระบวนการคิด และความคิดเห็นให้ผู้อื่นเข้าใจได้อย่างถูกต้องชัดเจน

4.2 ความสำคัญของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องกับความสำคัญของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ได้มีหน่วยงานและนักการศึกษาได้กล่าวถึงความสำคัญและประโยชน์ของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (อัมพร ม้าคนอง, 2553, น. 37; สภาครูคณิตศาสตร์แห่งชาติสหรัฐอเมริกา, 1989, น. 26; Mumme, Judith, & Shepherd, 1993, pp. 7 – 11; Lappan & Schram, 1989, p. 6) ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

4.2.1 การสื่อสารทางคณิตศาสตร์มีบทบาทสำคัญที่จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจภาษาของคณิตศาสตร์ ช่วยเชื่อมโยงสาระหรือความคิดที่ไม่เป็นทางการไปสู่ภาษาที่เป็นนามธรรมและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

4.2.2 มีบทบาทสำคัญในการช่วยให้นักเรียนสร้างความเชื่อมโยงระหว่างแนวคิดทางคณิตศาสตร์กับสื่อที่เป็นวัตถุ รูปภาพ กราฟ สัญลักษณ์ต่าง ๆ

4.2.3 การใช้คณิตศาสตร์ในการสื่อสารช่วยให้นักเรียนมีความชัดเจนในแนวคิดและเกิดความเข้าใจที่ลึกซึ้งมากขึ้นในสิ่งที่เรียน การฟังความคิดของนักเรียนคนอื่น ๆ จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ได้ลึกซึ้งขึ้น และเข้าใจความคิดของคนอื่นที่แตกต่างกันในสถานการณ์เดียวกัน

4.2.4 การสื่อสารเป็นวิธีการแลกเปลี่ยนความเข้าใจในคณิตศาสตร์ซึ่งกันและกัน ซึ่งการให้นักเรียนได้สื่อสารตอบโต้กัน จะทำให้เกิดการช่วยเหลือแลกเปลี่ยนความคิดเห็น เกิดการเรียนรู้จากเพื่อนในกลุ่มมากกว่าการเรียนรู้จากครู เพราะในกลุ่มนักเรียนด้วยกันจะใช้ภาษาระดับเดียวกันทำให้พูดกันรู้เรื่องและไม่เกิดความอายในการซักถามเรื่องที่ตนไม่เข้าใจ ช่วยส่งเสริมให้นักเรียนที่อธิบายให้เพื่อนฟังเกิดความเข้าใจในเนื้อหาที่ลึกซึ้งมากขึ้น

4.2.5 การสื่อสารเป็นการเสริมสร้างให้นักเรียนเป็นเกิดการเรียนรู้ คือ เมื่อครูเป็นผู้ตั้งคำถามและนักเรียนเป็นผู้ตอบโดยการพูดหรือการเขียนในสิ่งที่นักเรียนคิด หรือนักเรียนถามตอบกันเองจะทำให้นักเรียนเชื่อมั่นในความสามารถทางคณิตศาสตร์ของตนเอง ส่งเสริมให้เกิดการศึกษาค้นคว้าเพิ่มเติม และนักเรียนจะเปลี่ยนเป็นผู้เสริมสร้างความรู้ด้วยตนเอง

4.2.6 การสื่อสารเป็นการส่งเสริมสภาพแวดล้อมที่เหมาะสมในการเรียนรู้ โดยการพูดและการฟังจากกลุ่มเพื่อนเป็นการเรียนรู้กลุ่มย่อย เป็นวิธีการที่ช่วยให้นักเรียนไม่วิตกกังวลในการแสดงความคิดเห็นใหม่ ๆ เพราะการมีปฏิสัมพันธ์กับเพื่อน จะทำให้นักเรียนเกิดความสนุกสนานในการเรียนรู้ และเกิดการร่วมมือกันในการเรียนรู้

4.2.7 การสื่อสารช่วยให้ครูได้รู้ความคิดของนักเรียน โดยครูจะเรียนรู้สิ่งที่นักเรียนเรียนรู้ โดยการฟังจากสิ่งที่นักเรียนอธิบายผ่านกระบวนการให้เหตุผล ซึ่งความสามารถในการอธิบาย

เป็นทักษะที่ได้จากการฝึกฝนทักษะการสื่อสารในกลุ่มเพื่อนที่มีการใช้ภาษาอย่างง่าย ๆ และเหมาะสมกับระดับความสามารถของนักเรียน

4.2.8 การสื่อสารทางคณิตศาสตร์ทำให้เกิดความเข้าใจที่ตรงกันระหว่างนักเรียน ทำให้เข้าใจงานที่ทำตรงกัน เนื่องจากเป็นบริบทของการพูดจากันจึงส่งเสริมบริบทของการเรียนรู้ที่เหมาะสม เพิ่มการเข้าใจทางคณิตศาสตร์ให้กับทั้งผู้สื่อสารและผู้รับสาร และช่วยให้ครูมองเห็นความเข้าใจของนักเรียน ทำให้เกิดการวางแผนจัดการเรียนรู้ได้อย่างเหมาะสม

4.2.9 ในการเรียนคณิตศาสตร์การเขียนจะช่วยให้นักเรียนเกิดความชัดเจนในแนวคิดเกี่ยวกับเรื่องราว หรือปัญหาที่กล่าวถึง และช่วยพัฒนาการรับรู้คณิตศาสตร์ให้ดีขึ้น การให้นักเรียนเขียนวิธีการจัดการกับปัญหา และสมาชิกในกลุ่มร่วมกันคิดวิธีการจัดการกับปัญหา จะช่วยให้นักเรียนชัดเจนในแนวคิด และทำให้ครูทราบแนวคิดและเหตุผลในการแก้ปัญหาของนักเรียน

4.2.10 การสื่อสารช่วยส่งเสริมการทำความเข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์ของนักเรียน ซึ่งการแสดงออกทางความคิด การร่วมอภิปราย การฟังนักเรียนคนอื่น ๆ จะช่วยให้นักเรียนเข้าใจคณิตศาสตร์ได้ลึกซึ้งขึ้น การฟังความคิดของคนอื่นจะช่วยให้นักเรียนเข้าใจความคิดของคนอื่นที่แตกต่างกันในสถานการณ์เดียวกัน นักเรียนจะสามารถสร้างความเข้าใจบนพื้นฐานของประสบการณ์ตรง และส่งเสริมการเสริมสร้างความรู้

4.3 แนวทางในการพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวกับแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เพื่อนำไปประยุกต์ใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ได้มีหน่วยงานและนักการศึกษาได้กล่าวถึงแนวทางในการพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร, 2555, น. 122 – 124; รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์, 2559, น. 9 – 25; สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี, 2560 น. 61; Rowan and Morrow, 1993, pp. 9 – 11; Gredler, 1997, p. 3) ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้

4.3.1 การจัดการเรียนรู้ให้เกิดทักษะการสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ สามารถทำได้โดยการกำหนดโจทย์ปัญหาที่น่าสนใจและเหมาะสมกับความสามารถของผู้เรียน และให้ผู้เรียนได้ลงมือปฏิบัติและแสดงความคิดเห็นด้วยตนเอง โดยผู้สอนช่วยชี้แนะแนวทางในการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ มีการสอดแทรกการสื่อสารในทุกขั้นตอนของการจัดการเรียนรู้คณิตศาสตร์ เพื่อให้ผู้เรียนคิดตลอดเวลาที่เห็นปัญหาว่าทำไมจึงเป็นเช่นนั้น จะมีวิธีการแก้ปัญหาอย่างไร เขียนรูปแบบความสัมพันธ์ของตัวแปรอย่างไร จะใช้ภาพตารางหรือกราฟใด ช่วยในการสื่อสารความหมาย

4.3.2 การใช้ความสนใจและความสัมพันธ์ของหัวข้อที่เรียน โดยให้นักเรียนทำกิจกรรมที่เกี่ยวข้องกับความสนใจของนักเรียน ใช้สื่อที่เป็นรูปธรรมส่งเสริมให้นักเรียนได้สื่อสาร

โดยตรง และเป็นกิจกรรมที่ส่งเสริมให้นักเรียนได้เห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ว่าเป็นประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต และเป็นเรื่องราวที่ใกล้ตัวของนักเรียน และมีการใช้คณิตศาสตร์ในการสื่อสาร

4.3.3 การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อเป็นตัวกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและแสดงการตอบสนองออกมา เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดอย่างหลากหลายและสร้างสรรค์ ส่งเสริมการใช้คณิตศาสตร์ในการสื่อสาร และทำให้นักเรียนได้ตั้งคำถามกับตนเองนำไปสู่การค้นพบในสิ่งที่สนใจ

4.3.4 ให้นักเรียนได้ฝึกฝนการเขียนสื่อสารแนวความคิด เพื่อให้นักเรียนเห็นว่าการเขียนมีส่วนสำคัญต่อการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ และต้องให้นักเรียนเข้าใจเป้าหมายที่ชัดเจนของการเขียน

4.3.5 จัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้กลุ่มแบบร่วมมือและช่วยเหลือกัน ซึ่งการจัดกลุ่มให้ผู้เรียนร่วมมือช่วยเหลือกันในการเรียนรู้ จะเป็นการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้สำรวจความคิด อธิบายแนวคิดกันภายในกลุ่ม ซึ่งเป็นการส่งเสริมการสื่อสารโดยตรง

4.3.6 จัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เปิดโอกาสให้นักเรียนได้สำรวจ และอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ผ่านกระบวนการอ่าน การพูด และการเขียน

4.3.7 จัดบรรยากาศหรือสภาพห้องเรียนที่เอื้อ และส่งเสริมให้นักเรียนได้อธิบาย ถกเถียง หรืออภิปราย และแสดงเหตุผลร่วมกับเพื่อนในชั้นเรียน ซึ่งทำให้นักเรียนได้มีปฏิสัมพันธ์กัน มีการแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกัน ค้นหาปัญหาร่วมกัน และครูต้องลดบทบาทของตนเองลงเพื่อให้นักเรียนได้สื่อสารกันมากขึ้น

4.3.8 ครูควรใช้เนื้อหาหรือเรื่องราวที่ใกล้ตัวนักเรียน เพื่อให้นักเรียนได้เห็นคุณค่าของคณิตศาสตร์ที่มีประโยชน์ต่อการดำเนินชีวิต ซึ่งช่วยส่งเสริมการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

4.3.9 ครูควรจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมและใช้คำถามอย่างต่อเนื่อง เพื่อส่งเสริมให้นักเรียนได้คิดอย่างหลากหลาย และสามารถนำแนวคิดมาสื่อสาร และแลกเปลี่ยนความรู้กับผู้อื่น หรือให้นักเรียนอธิบายกระบวนการหรือวิธีการในการหาคำตอบ โดยใช้วิธีการเขียนอธิบายสั้น ๆ

4.3.10 จัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารมีโอกาสได้ซักถามหลังจากฟังคำอธิบาย มีโอกาสได้เสนอแนวคิดหรือเหตุผลที่แตกต่างออกไป หรือได้ลองลงมือปฏิบัติ

4.3.11 ให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้ส่งสารได้รับคำติชมวิพากษ์วิจารณ์ในทันทีที่เป็นไปได้ เพื่อจะได้ทราบว่าผู้รับสารสามารถรับสารที่ผู้ส่งสารส่งมาได้ดีเพียงใด

4.3.12 มีกิจกรรมการเรียนรู้ที่ท้าทายให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารได้คิดหรือได้ทำ เพราะเมื่อนักเรียนทำได้สำเร็จก็จะเกิดความภาคภูมิใจ

4.3.13 เปิดโอกาสให้นักเรียนซึ่งเป็นผู้รับสารได้ใคร่ครวญตามทีละน้อยจากง่ายไปยาก จนเข้าใจในเนื้อหาของสารที่จะได้รับ

4.3.14 จัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่เสริมสร้างการสื่อสาร สื่อความหมายทางคณิตศาสตร์และการนำเสนอ ซึ่งมีดังนี้

1) การสืบสวนสอบสวน (inquiry) เป็นกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการให้นักเรียนได้สร้างข้อคำถาม ทดลอง สำรวจ สังเกตผลที่ได้ และสร้างความรู้ใหม่หรือข้อความคาดการณ์ทางคณิตศาสตร์ด้วยตนเอง แล้วอภิปรายสิ่งที่ค้นพบ ตรวจสอบความถูกต้อง ความสมเหตุสมผลของคำตอบที่เป็นองค์ความรู้ใหม่

2) การเขียนอนุทิน เป็นกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการให้นักเรียนเป็นรายบุคคลได้อธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ สะท้อนความรู้สึก ความคิดเห็น ความสนใจของผู้เรียนที่มีต่อแนวคิดหรือการดำเนินกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ โดยการบันทึกแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ความรู้สึก ความคิดเห็น ความสนใจอย่างไม่เป็นทางการ ซึ่งนักเรียนจะต้องมีความซื่อสัตย์ในการเขียนอนุทิน เขียนตามความเป็นจริง และควรบันทึกทันทีหลังจากดำเนินกิจกรรมทางคณิตศาสตร์นั้น ๆ โดยครูเริ่มจากการให้นักเรียนเขียนอนุทินจากหัวข้อที่ง่ายไปสู่หัวข้อที่ยาก

3) การเขียนรายงาน เป็นกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่ต้องการให้นักเรียนหรือกลุ่มนักเรียนได้นำเสนอแนวคิดหรือความคิดเห็น หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ โดยการบันทึกแนวคิด ความคิดเห็น หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์อย่างเป็นทางการ เช่น การให้เหตุผลในขั้นตอนต่าง ๆ อย่างสมเหตุสมผล

4) การทำป้ายนิเทศ เป็นกิจกรรมทางคณิตศาสตร์ที่เน้นให้นักเรียนหรือกลุ่มนักเรียนได้นำเสนอแนวคิด ความคิดเห็น หรือกระบวนการทางคณิตศาสตร์ เช่น การให้เหตุผลบนแผ่นกระดาษ วัสดุ หรือสื่อ การทำป้ายนิเทศที่ดีจะต้องมีจุดมุ่งหมายเดียว ให้ความหมายที่ชัดเจน มีสีสันสวยงาม เข้าใจได้ง่าย โดยไม่ต้องเสียเวลาอ่านนาน

4.4 การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาเกณฑ์การประเมินความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เพื่อนำมาปรับประยุกต์ให้สอดคล้องกับแบบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของผู้วิจัย ซึ่งผู้วิจัยวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์โดยใช้แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และพิจารณาจากพฤติกรรมที่แสดงออก 3 ด้าน ตามแนวคิดของ (Kennedy and Tipps, 1994, p. 112) คือ

4.4.1 ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ในการสื่อความหมายของข้อความและแทนข้อความ

4.4.2 ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ หมายถึง ความสามารถในการวางแผน การอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และวิธีการในการหาคำตอบ

4.4.3 ด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ หมายถึง ความสามารถในการเขียนแสดงวิธีทำ ตามแนวคิด และวิธีการในการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างถูกต้องชัดเจน

โดยผู้วิจัยได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์โดยปรับประยุกต์มาจากเกณฑ์การให้คะแนนของ Kennedy and Tipp (1994, p. 112) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี (2555, น. 94) กรมวิชาการ (2546, น. 121 – 124 อ้างถึงในสุดารัตน์ ภิรมย์ราช, 2555, น. 48 – 49) และ Cai Jakabsin and Lane Suzanne (1996, pp. 16 – 23) ดังนี้

ตารางที่ 2.2 เกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ระดับคะแนน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์	
3	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ตัวแปร กราฟ สมการ ในการสื่อความหมายของข้อความ แสดงข้อความและแทนข้อความได้อย่างถูกต้อง และครบถ้วน
2	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ตัวแปร กราฟ สมการ ในการสื่อความหมายของข้อความ แสดงข้อความและแทนข้อความได้อย่างถูกต้องเกินครึ่งหนึ่ง และมีข้อบกพร่องเพียงเล็กน้อย
1	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ตัวแปร กราฟ สมการ ในการสื่อความหมายของข้อความ แสดงข้อความและแทนข้อความได้ถูกต้องบางส่วน แต่ถูกต้องไม่ถึงครึ่งหนึ่ง
0	ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ตัวแปร กราฟ สมการ ในการสื่อความหมายของข้อความ แสดงข้อความและแทนข้อความไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนเลย

ตารางที่ 2.2 (ต่อ)

ระดับคะแนน	เกณฑ์การประเมิน
ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์	
3	วางแผน เขียนอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบได้อย่างถูกต้อง และครบถ้วน
2	วางแผน เขียนอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบได้อย่างถูกต้องเกินครึ่งหนึ่ง และมีข้อบกพร่องเพียงเล็กน้อย
1	วางแผน เขียนอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบได้อย่างถูกต้องบางส่วน แต่ถูกต้องไม่ถึงครึ่งหนึ่ง
0	วางแผน เขียนอธิบายแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และวิธีการที่ใช้ในการหาคำตอบไม่ถูกต้อง หรือไม่เขียนเลย
ด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ	
3	เขียนแสดงแนวคิด แสดงวิธีทำ และอธิบายวิธีการในการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด ถูกต้อง และครบถ้วน
2	เขียนแสดงแนวคิด แสดงวิธีทำ และอธิบายวิธีการในการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างถูกต้องเกินครึ่งหนึ่ง และมีข้อบกพร่องเพียงเล็กน้อย
1	เขียนแสดงแนวคิด แสดงวิธีทำ และอธิบายวิธีการในการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนถูกต้องบางส่วน แต่ถูกต้องไม่ถึงครึ่งหนึ่ง
0	เขียนแสดงแนวคิด แสดงวิธีทำ และวิธีการในการหาคำตอบไม่ถูกต้องตามลำดับขั้นตอนหรือไม่เขียนเลย

5. เจตคติต่อคณิตศาสตร์

ผู้วิจัยได้ศึกษาเอกสารเกี่ยวกับเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ในหัวข้อเกี่ยวกับความหมายของเจตคติต่อคณิตศาสตร์ องค์ประกอบของเจตคติต่อคณิตศาสตร์ และแนวทางการวัดเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

5.1 ความหมายของเจตคติต่อคณิตศาสตร์

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวกับความหมายของเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงความหมายของเจตคติต่อคณิตศาสตร์ (Fishbein and Ajzen, 1975; Kibrislioglu, 2015, pp. 64 – 69; Tahar, Ismail, Zamani, & Adnan, 2010, pp. 476 – 481) ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า เจตคติต่อคณิตศาสตร์ หมายถึง ความรู้สึก ความคิดเห็นของนักเรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์ทั้งด้านบวกและด้านลบ ความชอบ ไม่ชอบ การมีส่วนร่วม การหลีกเลี่ยงในการทำกิจกรรมที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ความเชื่อเกี่ยวกับประโยชน์ของคณิตศาสตร์

5.2 องค์ประกอบของเจตคติต่อคณิตศาสตร์

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวกับองค์ประกอบของเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ได้มีนักการศึกษาได้กล่าวถึงองค์ประกอบของเจตคติต่อคณิตศาสตร์ (Syyeda, 2016, pp. 32 – 62; Mzomwe Yahya Mazana, Calkin Suero Montero & Respickius Olifage Casmir, 2019, pp. 207 – 231; Han & Carpenter, 2014, pp. 27 – 41; Bandura, 1997, pp. 261 – 271, Adelson & McCouch, 2011, pp. 225 – 247; Ajzen, 1993, p. 42; Neuman, 2005) ซึ่งสามารถสรุปได้ดังนี้ เจตคติต่อคณิตศาสตร์ ประกอบด้วยองค์ประกอบ 3 ด้าน คือ

5.2.1 ด้านความรู้ความเข้าใจ (Cognition) เป็นการแสดงถึงความเชื่อ ความคิด ความเข้าใจของนักเรียน การรับรู้ของนักเรียนถึงประโยชน์และความสำคัญของคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน และในอนาคต ถ้านักเรียนรับรู้ถึงประโยชน์ของคณิตศาสตร์จะทำให้นักเรียนเกิดแรงบันดาลใจที่อยากจะเรียน และมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์

5.2.2 ด้านอารมณ์ความรู้สึก (Affect) เป็นความรู้สึก อารมณ์ ความเชื่อ มุมมองของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ทั้งความรู้สึกสนุกสนานเพลิดเพลินกับการเรียน ความรู้สึกว่าสิ่งที่เรียนยาก น่าเบื่อหน่าย ความเชื่อเกี่ยวกับความมั่นใจ หรือความสามารถในการเรียนของนักเรียน และมุมมองที่แสดงถึงการรับรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

5.2.3 ด้านพฤติกรรม (Behavior) เป็นพฤติกรรมของนักเรียน หรือความโน้มเอียงที่นักเรียนจะแสดงพฤติกรรมตอบโต้ออกมาในขณะที่ทำกิจกรรมเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ซึ่งพฤติกรรมที่แสดงออกมาเกิดจากความรู้ ความเชื่อ ความรู้สึกของนักเรียน แรงจูงใจ ความสนใจ ความต้องการที่จะเรียนรู้คณิตศาสตร์ของนักเรียน ที่สะท้อนพฤติกรรม การกระทำ ความมุ่งมั่น และ

ประสิทธิภาพของนักเรียนในห้องเรียน ซึ่งนักเรียนจะมีแรงจูงใจที่จะเรียนเมื่อพบว่าคณิตศาสตร์น่าสนใจ

5.3 การวัดเจตคติต่อคณิตศาสตร์

จากการศึกษาเอกสารที่เกี่ยวข้องเกี่ยวกับการวัดเจตคติ โดยมีนักการศึกษากล่าวถึงการวัดเจตคติ (Thurstone, 1967; Likert, 1970, pp. 150 – 151) ซึ่งสามารถสรุปได้ว่า เจตคติไม่สามารถวัดได้โดยตรง แต่สามารถอนุมานได้จากการแสดงความคิดเห็น และพฤติกรรมที่บุคคลแสดงออกมา ผู้วิจัยจึงสร้างมาตรวัดเจตคติตามวิธีของลิเคิร์ท โดยสร้างเป็นแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ที่ข้อคำถามทุกข้อมีความสำคัญเท่ากัน และคะแนนของผู้ตอบแต่ละคนในแบบสอบถามเจตคติ คือ ผลรวมของคะแนนจากทุกข้อคำถามในแบบสอบถามเจตคติ ซึ่งลิเคิร์ทถือว่าผู้ที่มีเจตคติที่ดีต่อสิ่งใด จะมีโอกาสมากที่จะตอบเห็นด้วยกับข้อความที่สนับสนุนสิ่งนั้น และโอกาสน้อยที่จะตอบเห็นด้วยกับข้อความที่ต่อต้านสิ่งนั้น ในทำนองเดียวกัน ผู้ที่มีเจตคติที่ไม่ดีต่อสิ่งใด ก็มีโอกาสน้อยที่จะเห็นด้วยกับข้อความที่สนับสนุนสิ่งนั้น และโอกาสมากที่จะตอบเห็นด้วยกับข้อความที่ต่อต้านสิ่งนั้น คะแนนรวมของทุกข้อจะเป็นเครื่องชี้ให้เห็นถึงเจตคติของผู้ตอบในแบบวัดเจตคติของแต่ละคน วิธีสร้างแบบสอบถามเจตคติของลิเคิร์ทขั้นแรกต้องรวบรวมข้อความที่เกี่ยวข้องในเรื่องที่จะศึกษาให้ได้มากที่สุด แล้วให้ผู้ตอบเลือกตอบว่าเห็นด้วยอย่างยิ่ง เห็นด้วย ไม่แน่ใจ ไม่เห็นด้วย หรือไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง เพียงอย่างใดอย่างหนึ่ง โดยกำหนดคะแนน ดังนี้

ข้อความที่แสดงเจตคติที่ดีหรือทางข้อความในทางบวก กำหนดคะแนน ดังนี้

เห็นด้วยอย่างยิ่ง	5 คะแนน
เห็นด้วย	4 คะแนน
ไม่แน่ใจ	3 คะแนน
ไม่เห็นด้วย	2 คะแนน
ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง	1 คะแนน

ข้อความแสดงเจตคติที่ไม่ดีหรือข้อความในทางลบ กำหนดคะแนน ดังนี้

เห็นด้วยอย่างยิ่ง	1 คะแนน
เห็นด้วย	2 คะแนน
ไม่แน่ใจ	3 คะแนน
ไม่เห็นด้วย	4 คะแนน
ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง	5 คะแนน

6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD จำนวน 5 เรื่อง (ณัฏฐ์ชญา อินพูลวงษ์, 2559; อัจฉราพรรณ อาโน, 2555; อมราวดี เพชรรักษ์, 2561; Hery Setiyawan, 2019; Van Dat Tran, 2013) โดยงานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ที่มีต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ มีจำนวน 4 เรื่อง ได้แก่ งานวิจัยของอัจฉราพรรณ อาโน (2555) ได้ศึกษาการจัดการเรียนรู้แบบกลุ่มร่วมมือเทคนิค STAD เพื่อพัฒนาทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนก่อนเรียน และหลังเรียนกับเกณฑ์ของโรงเรียนที่กำหนด 2) เพื่อศึกษาทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD 3) เพื่อศึกษาความพึงพอใจของนักเรียนที่มีต่อการเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ประชากรที่ใช้ในการวิจัย คือ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5 กลุ่มตัวอย่างเป็นนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5/1 โรงเรียนเทพนารี สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษาประถมศึกษาแพร่ จำนวน 32 คน ได้จากการสุ่มแบบกลุ่ม (Cluster Random Sampling) เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย คือ เนื้อหาเรื่องรูปเรขาคณิตสามมิติและปริมาตรของทรงสี่เหลี่ยมมุมฉาก รูปแบบการวิจัยเป็นแบบ One Group Pretest – Posttest Design เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้แบบกลุ่มร่วมมือเทคนิค STAD แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ แบบวัดทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบวัดความพึงพอใจของนักเรียนต่อการเรียนคณิตศาสตร์ ผลการวิจัยพบว่า 1) ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์โดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน และสูงกว่าเกณฑ์ที่โรงเรียนกำหนดร้อยละ 75 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 2) นักเรียนมีทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ไม่ต่ำกว่าระดับดี อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และ 3) ความพึงพอใจของนักเรียนต่อการเรียนคณิตศาสตร์ โดยใช้การจัดการเรียนรู้แบบกลุ่มร่วมมือเทคนิค STAD อยู่ในระดับไม่ต่ำกว่าระดับพึงพอใจมาก อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และงานวิจัยของอมราวดี เพชรรักษ์ (2561) ได้ศึกษาการพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างวิธีสอนแบบปกติ กับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือกันเทคนิคกลุ่มผลสัมฤทธิ์ (STAD) มีวัตถุประสงค์เพื่อ 1) เปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD 2) เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD 3) เปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาคณิตศาสตร์ หลังการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD กับวิธีสอนแบบปกติ 4) เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลัง

การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD กับวิธีสอนแบบปกติ และ 5) เปรียบเทียบความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ประชากรที่ใช้ในการวิจัย คือ นักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยได้จากการสุ่มแบบแบ่งกลุ่ม โดยใช้ห้องเรียนเป็นหน่วยในการสุ่ม จำนวน 2 ห้องเรียน คือนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/3 จำนวน 37 คน ใช้เป็นกลุ่มทดลอง และนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4/2 จำนวน 35 คน ใช้เป็นกลุ่มควบคุม เนื้อหาที่ใช้ในการวิจัย คือ เนื้อหาเรื่อง การแก้โจทย์ปัญหาการบวก ลบ คูณ หารละคน แบบแผนการวิจัย เป็นการวิจัยกึ่งทดลอง (Quasi – Experimental Design) โดยใช้แบบแผน Randomized Control – Group Pretest – Posttest Design เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ได้แก่ แผนการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD แบบประเมินคุณภาพแผน แบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน แบบทดสอบวัดความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหาและการสื่อสาร และแบบสอบถามความพึงพอใจเกี่ยวกับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ผลการวิจัย สรุปว่า 1) คะแนนเฉลี่ยหลังการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD สูงกว่าคะแนนก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 2) คะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD สูงกว่าคะแนนทดสอบก่อนเรียนแบบร่วมมือเทคนิค STAD อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 3) เปรียบเทียบความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา คะแนนเฉลี่ยก่อนเรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD กับการจัดการเรียนรู้แบบปกติไม่แตกต่างกัน แต่คะแนนเฉลี่ยหลังเรียนของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD สูงกว่าของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 4) การเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ คะแนนเฉลี่ยก่อนเรียนของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD กับนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติไม่แตกต่างกัน แต่คะแนนเฉลี่ยหลังเรียนของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 5) ความพึงพอใจของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD โดยภาพรวมอยู่ในระดับมาก

งานวิจัยที่ศึกษาเกี่ยวกับผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ที่มีต่อเจตคติต่อคณิตศาสตร์ มีจำนวน 3 เรื่อง ได้แก่ งานวิจัยของณัฏฐ์ชญา อินพูลวงษ์ (2559) ศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เจตคติต่อคณิตศาสตร์ และพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง บทประยุกต์ ก่อนและหลังการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD เปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ที่เรียนด้วยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD เรื่อง บทประยุกต์ กับเกณฑ์ร้อยละ 70 และศึกษาเจตคติของนักเรียนต่อคณิตศาสตร์และพฤติกรรมการทำงานกลุ่ม ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

คณิตศาสตร์เรื่องบทประยุกต์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และสูงกว่าเกณฑ์ที่กำหนดร้อยละ 70 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่เรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD เรื่อง บทประยุกต์ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โดยรวมอยู่ในระดับเห็นด้วย และพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD เรื่อง บทประยุกต์ โดยรวมอยู่ในระดับดี งานวิจัยของ Hery Setiyawan (2019) ได้ศึกษาปฏิสัมพันธ์ของนักเรียนในการเรียนคณิตศาสตร์ และเจตคติเชิงสร้างสรรค์ของนักเรียนที่เรียนด้วยรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD เครื่องมือที่ใช้ ได้แก่ แบบสังเกตปฏิสัมพันธ์ของนักเรียน และแบบสอบถามเจตคติเชิงสร้างสรรค์ของนักเรียน ซึ่งจากการศึกษาพบว่า นักเรียนที่เรียนเก่งมีปฏิสัมพันธ์ในการให้ความช่วยเหลือนักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียน และนักเรียนมีเจตคติเชิงสร้างสรรค์อยู่ในเกณฑ์ที่ค่อนข้างดี และงานวิจัยของ Van Dat Tran (2013) ได้ศึกษาผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และเจตคติที่มีต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาตอนปลาย ในประเทศเวียดนาม ซึ่งจากการศึกษาพบว่า นักเรียนมีผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนที่สูงขึ้น และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ช่วยส่งเสริมเจตคติเชิงบวกของนักเรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ จำนวน 6 เรื่อง (พีชาณิกา เพชรสังข์, 2556; นฤพันธุ์ เพ่งพิศ, 2561; บัวเหรียญ ดาโรจน์, 2555; สุดารัตน์ อะช่วยรัมย์, 2556; กันตาธรณ์ ฆ้องย่ำ, 2560; ปิยะรัตน์ เงาผ่อง, 2551) โดยผู้วิจัยได้ศึกษาเกี่ยวกับรูปแบบและวิธีการในการใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ ดังนี้ งานวิจัยของพีชาณิกา เพชรสังข์ (2556) ศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2 โดยในขั้นที่ 1 ขั้นสร้างความสนใจครูใช้คำถามปลายเปิดที่ทำให้นักเรียนระลึกความรู้เดิมหรือเชื่อมโยงความรู้เดิมกับความรู้ใหม่ ในขั้นที่ 2 ขั้นสำรวจค้นหา ครูใช้คำถามปลายเปิดให้นักเรียนสำรวจข้อมูลและสังเกตลักษณะของปัญหา ขั้นที่ 3 ขั้นอธิบายและลงข้อสรุป เป็นขั้นที่ครูใช้คำถามปลายเปิดให้นักเรียนได้อธิบายความคิดรวบยอดและวิธีการแก้ปัญหาที่ได้จากการสืบค้น ขั้นที่ 4 ขั้นขยายความรู้ ครูใช้คำถามปลายเปิดให้นักเรียนประยุกต์ใช้ความรู้ในสถานการณ์ปัญหาใหม่ และขั้นที่ 5 ขั้นประเมินผล ครูใช้คำถามปลายเปิดให้นักเรียนตรวจสอบลักษณะสำคัญของความคิดรวบยอดหรือนำความรู้ไปใช้ในการแก้ปัญหาในสถานการณ์อื่นเพื่อประเมินความเข้าใจของนักเรียน ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดมีความสามารถใน

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และมีความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดมีความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณหลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และมีความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณสูงกว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดมีพัฒนาการดีขึ้น งานวิจัยของนฤพันธุ์ เพ่งพิศ (2561) ศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โดยใช้คำถามปลายเปิดในขั้นจัดกิจกรรม ซึ่งเป็นขั้นที่นำเสนอบทเรียนใหม่และตัวอย่างสถานการณ์ทางคณิตศาสตร์ โดยในขั้นทำความเข้าใจเพื่อตั้งปัญหา ครูจะใช้คำถามปลายเปิดเพื่อช่วยให้นักเรียนทำความเข้าใจสถานการณ์และเชื่อมโยงข้อมูล ซึ่งผลการวิจัยพบว่า นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 นักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิดมีความสามารถในการแก้ปัญหาทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์หลังเรียนสูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 งานวิจัยของบัวเหรียญ ดาโรจน์ (2555) ศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบแก้ปัญหาโดยใช้คำถามปลายเปิด เรื่อง ร้อยละ ที่มีผลต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนม่วงสามสิบ (อำนวยปัญญา) จังหวัดอุบลราชธานี โดยครูใช้คำถามปลายเปิดในขั้นนำเสนอปัญหาในชั้นเรียน ขั้นนำเสนอปัญหาในกลุ่มย่อย ขั้นนำเสนอผลการปฏิบัติกิจกรรมต่อกลุ่มใหญ่ และขั้นนักเรียนฝึกแก้ปัญหาเพิ่มเติมเป็นรายบุคคล ในการกระตุ้นให้เกิดการคิด มีการอภิปรายร่วมกัน ภายใต้การแนะนำการขยายความคิดและการอำนวยความสะดวกจากครู เน้นการทำงานเป็นกลุ่มให้นักเรียนมีปฏิสัมพันธ์กับครูและเพื่อน ผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ร้อยละ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 หลังจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบแก้ปัญหาโดยใช้คำถามปลายเปิดสูงกว่าก่อนเรียน อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เรื่อง ร้อยละ ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 หลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบแก้ปัญหาโดยใช้คำถามปลายเปิด สูงกว่าเกณฑ์ร้อยละ 60 อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 งานวิจัยของ

สุดารัตน์ อะช่วยรัมย์ (2556) ศึกษาผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบแก้ปัญหา โดยใช้คำถามปลายเปิด เรื่อง เศษส่วน ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนบ้านโคกปราสาท จังหวัดบุรีรัมย์ โดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เน้นการใช้คำถามปลายเปิดให้นักเรียนได้สะท้อนความคิดในการนำความรู้ทางคณิตศาสตร์ไปใช้ในการหาคำตอบของปัญหา ซึ่งผลการวิจัยพบว่า ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนหลังเรียนโดยการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบแก้ปัญหา โดยใช้คำถามปลายเปิด เรื่อง เศษส่วน สูงกว่าก่อนเรียนอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และงานวิจัยของกันตาธรณ์ ฆ้องย่ำ (2560) ได้สร้างชุดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้คำถามปลายเปิด เพื่อส่งเสริมความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นโรงเรียนขลุงรัชดาภิเษก จังหวัดจันทบุรี โดยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ใช้คำถามปลายเปิดในขั้นนำ ขั้นสอน และขั้นสรุป ผลการวิจัยพบว่า นักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้นมีคะแนนความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ผ่านเกณฑ์คะแนนตั้งแต่ร้อยละ 70 ขึ้นไปของคะแนนเต็ม คิดเป็นร้อยละ 100 ซึ่งสูงกว่าเกณฑ์สมมุติฐานที่ตั้งไว้ไม่น้อยกว่าร้อยละ 60 ของจำนวนนักเรียนทั้งหมด อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 และงานวิจัยที่ศึกษาผลของการใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์มีจำนวน 1 เรื่อง คืองานวิจัยของปิยะรัตน์ เงาผ่อง (2551) ได้ศึกษาการใช้คำถามปลายเปิดเพื่อพัฒนาทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน สำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสารภีพิทยาคม จังหวัดเชียงใหม่ จัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้แผนการจัดการเรียนรู้ที่เน้นการใช้คำถามปลายเปิด เรื่อง สถิติ โดยในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จะให้นักเรียนตอบคำถามปลายเปิดเป็นรายบุคคลและเป็นงานกลุ่มในขั้นนำเข้าสู่บทเรียน หรือขั้นสอน ครูจะถามคำถามปลายเปิดและแทรกคำถามปลายเปิดในแบบฝึกหัดหรือใบกิจกรรม ซึ่งผลการวิจัยพบว่า การนำคำถามปลายเปิดไปใช้ทำให้นักเรียนมีโอกาสพัฒนาทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนโดยเฉพาะเมื่อทำผ่านกิจกรรมกลุ่ม

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างเจตคติต่อคณิตศาสตร์ กับความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์มีจำนวน 1 เรื่อง คืองานวิจัยของชานนท์ รักปรางค์ (2562) ซึ่งได้ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความรู้พื้นฐานเดิมของนักเรียน เจตคติต่อวิชาคณิตศาสตร์ และพฤติกรรมการสอนของครู กับความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ซึ่งผลการวิจัยพบว่า สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรเจตคติที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ กับตัวแปรความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ มีค่าเท่ากับ 0.538 แสดงว่าตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์ทางบวก ขนาดความสัมพันธ์สูง และมีอยู่จริงอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 โดยมีความแปรปรวนร่วมกันร้อยละ 28.94

บทที่ 3
วิธีดำเนินการวิจัย

การวิจัย เรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดที่มีต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง ผู้วิจัยดำเนินการวิจัย ดังนี้

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
3. การเก็บรวบรวมข้อมูล
4. การวิเคราะห์ข้อมูล

1. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1.1 ประชากร

ประชากร คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง จำนวน 3 ห้องเรียน มีนักเรียน 85 คน

1.2 กลุ่มตัวอย่าง

กลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง ปีการศึกษา 2565 จำนวน 2 ห้องเรียน แต่ละห้องเรียนจัดนักเรียนแบบคละความสามารถ มีนักเรียนห้องละ 28 คน ซึ่งได้มาจากการสุ่มแบบกลุ่ม แล้วสุ่มนักเรียนห้องหนึ่งเป็นกลุ่มทดลอง จัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด และอีกห้องเป็นกลุ่มควบคุม จัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด เรื่อง ภาคตัดกรวย แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ

ปกติเรื่อง ภาคตัดกรวย แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบสอบถาม เจตคติต่อคณิตศาสตร์

2.1 แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดเรื่อง ภาคตัดกรวย ผู้วิจัยดำเนินการสร้างและตรวจสอบคุณภาพ ดังนี้

2.1.1 ศึกษาตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 หลักสูตรสถานศึกษากลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง

2.1.2 ศึกษาวิธีการเขียนแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้คำถามปลายเปิดจากหนังสือ เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1.3 ศึกษาแนวคิด ทฤษฎี และหลักการที่เกี่ยวข้องกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้คำถามปลายเปิด จากนั้นจัดทำตารางวิเคราะห์ขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดดังตารางที่ 2.1

2.1.4 จัดทำตารางวิเคราะห์เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย เพื่อจัดทำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้จำนวน 18 แผน ดังตารางที่ 3.1

ตารางที่ 3.1 วิเคราะห์เนื้อหา เรื่อง ภาคตัดกรวย

แผนที่	เรื่อง	จำนวนแผน	จำนวนชั่วโมง
1	สมการรูปมาตรฐานของวงกลม	1	1
2	สมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม	1	1
3	การนำความรู้เรื่องวงกลมไปใช้ในการแก้ปัญหา	1	1
4	สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X	1	1
5	สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน Y	1	1
6	การเลื่อนกราฟของวงรี	1	1
7	สมการรูปแบบทั่วไปของวงรี	1	1
8	การนำความรู้เรื่องวงรีไปใช้ในการแก้ปัญหา	1	1

ตารางที่ 3.1 (ต่อ)

แผนที่	เรื่อง	จำนวนแผน	จำนวนชั่วโมง
9	สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง	1	1
10	สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน	1	1
11	การเลื่อนกราฟของพาราโบลา	1	1
12	สมการรูปแบบทั่วไปของพาราโบลา	1	1
13	การนำความรู้เรื่องพาราโบลาไปใช้ในการแก้ปัญหา	1	1
14	สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน X	1	1
15	สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y	1	1
16	การเลื่อนกราฟของไฮเพอร์โบลา	1	1
17	สมการรูปแบบทั่วไปของไฮเพอร์โบลา	1	1
18	การนำความรู้เรื่องไฮเพอร์โบลาไปใช้ในการแก้ปัญหา	1	1
	รวม	18	18

2.1.5 ทำการวิเคราะห์เนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้ และกิจกรรมการเรียนรู้รายชั่วโมง แล้วเขียนแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามรูปแบบขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด

2.1.6 นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่สร้างขึ้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อพิจารณาให้คำแนะนำแก้ไขข้อบกพร่อง โดยอาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ได้ให้คำแนะนำในการปรับจุดประสงค์การเรียนรู้

2.1.7 นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ปรับปรุงแก้ไขแล้วเสนอผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อพิจารณาความสอดคล้อง ความเหมาะสมระหว่างสาระสำคัญ จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้และแหล่งเรียนรู้ การวัดและประเมินผล ผลการประเมินพบว่าแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดทั้ง 18

แผน มีค่าเฉลี่ยของความสอดคล้อง ความเหมาะสมอยู่ระหว่าง 4.69 – 5.00 ซึ่งแปลความหมายได้ว่า แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความสอดคล้อง เหมาะสมมากที่สุด และผู้เชี่ยวชาญได้ให้ข้อเสนอแนะในการแก้ไขคำที่ผิด และปรับกิจกรรมในแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ 4 โดยให้ลดจำนวนตัวอย่างให้น้อยลง และนำไปปรับเป็นข้อคำถามในใบกิจกรรม

2.1.8 นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ แล้วนำเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

2.1.9 จัดพิมพ์แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ฉบับสมบูรณ์ เพื่อนำไปใช้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มทดลอง

2.2 แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ เรื่อง ภาคตัดกรวย ผู้วิจัยดำเนินการสร้างและตรวจสอบคุณภาพ ดังนี้

2.2.1 ศึกษาตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 หลักสูตรสถานศึกษา กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง

2.2.2 ศึกษาวิธีการเขียนแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์ และแนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติจากหนังสือ เอกสาร และงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.2.3 ทำการวิเคราะห์เนื้อหา จุดประสงค์การเรียนรู้ และกิจกรรมการเรียนรู้รายชั่วโมง แล้วเขียนแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ โดยจัดกิจกรรมการเรียนตามรูปแบบขั้นตอนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

2.2.4 นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติที่สร้างขึ้นเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อพิจารณาให้คำแนะนำแก้ไขข้อบกพร่อง

2.2.5 นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ที่ปรับปรุง และแก้ไขเสร็จแล้วเสนอผู้เชี่ยวชาญจำนวน 3 ท่าน เพื่อพิจารณาความสอดคล้อง ความเหมาะสมระหว่างสาระสำคัญ จุดประสงค์การเรียนรู้ สาระการเรียนรู้ กิจกรรมการเรียนรู้ สื่อการเรียนรู้และแหล่งเรียนรู้ การวัดและประเมินผล ผลการประเมินพบว่าแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติทั้ง 18 แผน มีค่าเฉลี่ยของความสอดคล้อง ความเหมาะสมอยู่ระหว่าง 4.61 – 4.92 ซึ่งแปลความหมายได้ว่าแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มีความสอดคล้อง เหมาะสมมากที่สุด และผู้เชี่ยวชาญได้ให้ข้อเสนอแนะในการแก้ไขคำที่ผิด

2.2.6 นำแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้มาปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ แล้วนำเสนอต่ออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์

2.2.7 จัดพิมพ์แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติฉบับสมบูรณ์ เพื่อนำไปใช้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่างที่เป็นกลุ่มควบคุม

2.3 แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ผู้วิจัยดำเนินการสร้างและตรวจสอบคุณภาพ ดังนี้

2.3.1 ศึกษาวิธีการสร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์จากเอกสารที่เกี่ยวข้อง

2.3.2 สร้างแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย แบบอัตนัย จำนวน 8 ข้อ เป็นแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน 2 ฉบับคู่ขนานกัน โดยผู้วิจัยวิเคราะห์เนื้อหา จำนวนข้อสอบ เวลาที่ใช้และจุดประสงค์ ตามตัวบ่งชี้นิยามตัวแปรพฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ 3 ด้าน ตามแนวคิดของ (Kennedy and Tipp, 1994, p. 112) คือ ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ ดังนี้

ตารางที่ 3.2 วิเคราะห์เนื้อหา จำนวนข้อสอบ จุดประสงค์ เวลาที่ใช้ ตามตัวบ่งชี้จากนิยามตัวแปร

ข้อ	**จำนวนข้อสอบ**	**เนื้อหา**	**เวลาที่ใช้ (นาที)**	**จุดประสงค์**	**ตัวบ่งชี้**
1	1 ข้อใหญ่ 3 ข้อย่อย	**วงกลม** 1. สมการรูปมาตรฐานของวงกลม 2. สมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม 3. การนำความรู้เรื่องวงกลมไปใช้ในการแก้ปัญหา	10	นักเรียนสามารถ 1. เขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบได้ 2. เขียนแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม จากเงื่อนไขที่กำหนดตามลำดับขั้นตอนได้อย่างละเอียด 3. เขียนกราฟของวงกลมได้	1. ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ 2. ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 3. ด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ
2	1 ข้อใหญ่ 2 ข้อย่อย	**วงกลม** 1. สมการรูปมาตรฐานของวงกลม 2. สมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม 3. การนำความรู้เรื่องวงกลมไปใช้ในการแก้ปัญหา	10	นักเรียนสามารถ 1. เขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบได้ 2. เขียนแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม จากเงื่อนไขที่กำหนดตามลำดับขั้นตอนได้อย่างละเอียด	1. ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ 2. ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 3. ด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ

ตารางที่ 3.2 (ต่อ)

ข้อ	จำนวนข้อสอบ	เนื้อหา	เวลาที่ใช้ (นาที)	จุดประสงค์	ตัวบ่งชี้
3	1 ข้อใหญ่ 3 ข้อย่อย	**วงรี** 1. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X และแกนเอกอยู่บนแกน Y 2. การเลื่อนกราฟของวงรี 3. สมการรูปแบบทั่วไปของวงรี 4. การนำความรู้เรื่องวงรีไปใช้ในการแก้ปัญหา	10	นักเรียนสามารถ 1. เขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบได้ 2. เขียนแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงรี จากเงื่อนไขที่กำหนดตามลำดับขั้นตอนได้อย่างละเอียด 3. เขียนกราฟของวงรีได้	1. ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ 2. ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 3. ด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ
4	1 ข้อใหญ่ 2 ข้อย่อย	**วงรี** 1. สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X และแกนเอกอยู่บนแกน Y 2. สมการรูปแบบทั่วไปของวงรี 3. การนำความรู้เรื่องวงรีไปใช้ในการแก้ปัญหา	10	นักเรียนสามารถ 1. เขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบได้ 2. เขียนแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงรี จากเงื่อนไขที่กำหนดตามลำดับขั้นตอนได้อย่างละเอียด	1. ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ 2. ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 3. ด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ

ตารางที่ 3.2 (ต่อ)

ข้อ	จำนวนข้อสอบ	เนื้อหา	เวลาที่ใช้ (นาที)	จุดประสงค์	ตัวบ่งชี้
5	1 ข้อใหญ่ 3 ข้อย่อย	**พาราโบลา** 1. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง และแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน 2. การเลื่อนกราฟของพาราโบลา 3. สมการรูปแบบทั่วไปของพาราโบลา 4. การนำความรู้เรื่องพาราโบลาไปใช้ในการแก้ปัญหา	10	นักเรียนสามารถ 1. เขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบได้ 2. เขียนแสดงวิธีทำในการหาสมการของพาราโบลา จากเงื่อนไขที่กำหนดตามลำดับขั้นตอนได้อย่างละเอียด 3. เขียนกราฟของพาราโบลาได้	1. ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ 2. ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 3. ด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ
6	1 ข้อใหญ่ 2 ข้อย่อย	**พาราโบลา** 1. สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง และแกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน 2. สมการรูปแบบทั่วไปของพาราโบลา 3. การนำความรู้เรื่องพาราโบลาไปใช้ในการแก้ปัญหา	10	นักเรียนสามารถ 1. เขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบได้ 2. เขียนแสดงวิธีทำในการหาสมการของพาราโบลา จากเงื่อนไขที่กำหนดตามลำดับขั้นตอนได้อย่างละเอียด	1. ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ 2. ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 3. ด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ

ตารางที่ 3.2 (ต่อ)

ข้อ	จำนวนข้อสอบ	เนื้อหา	เวลาที่ใช้ (นาที)	จุดประสงค์	ตัวบ่งชี้
7	1 ข้อใหญ่ 3 ข้อย่อย	**ไฮเพอร์โบลา** 1. สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด 2. การเลื่อนกราฟของไฮเพอร์โบลา 3. สมการรูปแบบทั่วไปของไฮเพอร์โบลา 4. การนำความรู้เรื่องไฮเพอร์โบลาไปใช้ในการแก้ปัญหา	10	นักเรียนสามารถ 1. เขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบได้ 2. เขียนแสดงวิธีทำในการหาสมการของไฮเพอร์โบลา จากเงื่อนไขที่กำหนดตามลำดับขั้นตอนได้อย่างละเอียด 3. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาได้	1. ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ 2. ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 3. ด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ
8	1 ข้อใหญ่ 2 ข้อย่อย	**ไฮเพอร์โบลา** 1. สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด 2. สมการรูปแบบทั่วไปของไฮเพอร์โบลา 3. การนำความรู้เรื่องไฮเพอร์โบลาไปใช้ในการแก้ปัญหา	10	นักเรียนสามารถ 1. เขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบได้ 2. เขียนแสดงวิธีทำในการหาสมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด P(x, y) จากเงื่อนไขที่กำหนดตามลำดับขั้นตอนได้อย่างละเอียด	1. ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ 2. ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ 3. ด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ

2.3.3 สร้างเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยได้กำหนดเกณฑ์การให้คะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่สอดคล้องกับตัวบ่งชี้นิยามตัวแปรพฤติกรรมที่แสดงถึงความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ 3 ด้าน คือ ด้านการใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ ด้านการแสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ และด้านการนำเสนอวิธีทำในการหาคำตอบ โดยปรับประยุกต์มาจากเกณฑ์การให้คะแนนของ Kennedy and Tipp (1994, p. 112) สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์ และเทคโนโลยี (2555, น. 94) กรมวิชาการ (2546, น. 121 – 124 อ้างถึงใน สุดารัตน์ ภิรมย์ราช, 2555, น. 48 – 49) และ Cai Jakabsin and Lane Suzanne (1996, pp. 16 – 23) ดังตารางที่ 2.2

2.3.4 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นเสนออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อตรวจและให้คำแนะนำแก้ไขข้อบกพร่อง โดยอาจารย์ได้ให้คำแนะนำในการปรับข้อคำถาม เพื่อให้ครอบคลุมตัวบ่งชี้ที่ต้องการวัดตามนิยามของตัวแปร

2.3.5 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุงและแก้ไขเสร็จแล้วเสนอผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหาของแบบทดสอบ เพื่อดูความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับจุดประสงค์การเรียนรู้ และระดับพฤติกรรมที่วัด โดยหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (Index of Item Objective Congruence : IOC) ได้ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนทุกข้อเท่ากับ 1.00 และได้ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียนทุกข้อเท่ากับ 1.00 ซึ่งแปลความหมายได้ว่าข้อคำถามวัดสอดคล้องกับจุดประสงค์การเรียนรู้และระดับพฤติกรรมที่วัด และผู้เชี่ยวชาญได้ให้ข้อเสนอแนะในการปรับภาษาในข้อคำถามให้เหมาะสม

2.3.6 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ มาปรับปรุงและแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญ

2.3.7 นำแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนและฉบับหลังเรียนไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 5 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จำนวน 32 คน และ 36 ตามลำดับ ที่เคยเรียนเรื่อง ภาคตัดกรวย มาแล้ว เพื่อหาคุณภาพของแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

2.3.8 นำผลการทดลองมาวิเคราะห์หาคุณภาพของแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยวิธีการของวิทนีย์และซาเบอร์ส (Mehrens and Lehmann, 1984: 198 – 199; citing Whitney and Sabers, 1970 อ้างถึงในกัญจนา ลินทรัตนศิริกุล, 2553, น. 9 – 46 ถึง 9 – 81) ในการหาค่าความยาก (p) และค่าอำนาจจำแนก (r) ซึ่งพบว่า แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนมีค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.41 – 0.55 ซึ่งแปลความหมายได้ว่ามีความยากพอเหมาะ และมีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.48 – 0.66 ซึ่งแปล

ความหมายได้ว่าเป็นข้อสอบที่ดีมาก แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียนมีค่าความยากอยู่ระหว่าง 0.43 – 0.61 ซึ่งแปลความหมายได้ว่ามีความยากพอเหมาะไปจนถึงค่อนข้างง่าย และมีค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.49 – 0.73 ซึ่งแปลความหมายได้ว่าเป็นข้อสอบที่ดีมาก

2.3.9 ผู้วิจัยนำแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนและหลังเรียนมาวิเคราะห์หาความเที่ยง โดยใช้วิธีสัมประสิทธิ์แอลฟา ซึ่งแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียนมีค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.916 และแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียนมีค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.941 ซึ่งแปลความหมายได้ว่าแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ทั้ง 2 ฉบับมีค่าความเที่ยงสูง

2.3.10 จัดพิมพ์แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์ เพื่อนำไปใช้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

2.4 แบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ผู้วิจัยดำเนินการสร้างและตรวจสอบคุณภาพ ดังนี้

2.4.1 ศึกษานิยามของตัวแปรเจตคติต่อคณิตศาสตร์ และกำหนดตัวบ่งชี้ที่เกี่ยวข้องกับเจตคติต่อคณิตศาสตร์ โดยผู้วิจัยกำหนดตัวบ่งชี้ 3 ด้าน ตามแนวคิดของ (Ajzen, 1993, p.42) ซึ่งประกอบด้วย ด้านความรู้ความเข้าใจ ด้านอารมณ์ความรู้สึก และด้านพฤติกรรม

2.4.2 สร้างตารางวิเคราะห์จำนวนข้อคำถามตามตัวบ่งชี้จากนิยามของตัวแปรเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เพื่อสร้างข้อคำถามในแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งเป็นแบบมาตรประเมินค่า 5 ระดับ โดยผู้วิจัยสร้างข้อคำถามจำนวน 40 ข้อ เพื่อนำไปใช้จริงจำนวน 30 ข้อ ดังนี้

ตารางที่ 3.3 วิเคราะห์จำนวนข้อคำถามตามตัวบ่งชี้จากนิยามของตัวแปรเจตคติต่อคณิตศาสตร์

ตัวบ่งชี้ เจตคติต่อคณิตศาสตร์	ข้อความทางบวก	ใช้จริง	ข้อความทางลบ	ใช้จริง
1. ด้านความรู้ความเข้าใจ - ความเข้าใจของนักเรียน การรับรู้ของนักเรียนถึงประโยชน์และความสำคัญของคณิตศาสตร์ในชีวิตประจำวัน และในอนาคต ทำให้นักเรียนเกิดแรงบันดาลใจที่อยากจะเรียนคณิตศาสตร์	8	7	4	3
2. ด้านอารมณ์ความรู้สึก - ความรู้สึกของนักเรียนที่มีต่อการเรียนคณิตศาสตร์	4	2	2	2
- ความเชื่อ มุมมองของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์	2	2	1	1
- ความมั่นใจ หรือความสามารถในการเรียนของนักเรียน และมุมมองที่แสดงถึงการรับรู้ของนักเรียนเกี่ยวกับคณิตศาสตร์	1	1	4	2
3. ด้านพฤติกรรม - พฤติกรรมของนักเรียน หรือความโน้มเอียงที่นักเรียนจะแสดงพฤติกรรมตอบโต้ออกมาในขณะที่ทำกิจกรรมเกี่ยวกับคณิตศาสตร์ ซึ่งพฤติกรรมที่แสดงออกมาเกิดจากความรู้ ความเชื่อ ความรู้สึก แรงจูงใจ ความสนใจ และความต้องการที่จะเรียนรู้ของนักเรียน ซึ่งพิจารณาจากการกระทำ และความตั้งใจของนักเรียน	9	6	5	4
รวม	24	18	16	12

2.4.3 นำแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ที่สร้างขึ้นเสนออาจารย์ที่ปรึกษาวิทยานิพนธ์ เพื่อพิจารณาความตรงตามเนื้อหา ความเหมาะสมของข้อคำถาม และข้อเสนอแนะใน

การปรับปรุงแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ซึ่งอาจารย์ได้ให้คำแนะนำ และข้อเสนอแนะเกี่ยวกับวิธีการในการสร้างข้อคำถามที่เป็นข้อความในทางลบ

2.4.4 นำแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ที่ปรับปรุง และแก้ไขเสร็จแล้วเสนอผู้เชี่ยวชาญ 3 ท่าน ตรวจสอบความตรงเชิงเนื้อหาของแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เพื่อดูความสอดคล้องระหว่างข้อคำถามกับนิยามตัวแปรและตัวบ่งชี้ โดยหาค่าดัชนีความสอดคล้อง (Index of Item Objective Congruence : IOC) ได้ค่าดัชนีความสอดคล้องของแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์อยู่ระหว่าง 0.67 – 1.00 ซึ่งแปลความหมายได้ว่าข้อคำถามวัดได้สอดคล้องกับนิยามตัวแปรและตัวบ่งชี้ และผู้เชี่ยวชาญได้ให้ข้อเสนอแนะในการปรับข้อคำถามให้เหมาะสม ดังนี้

คำถามเดิม “ในขณะที่เรียนคณิตศาสตร์ข้าพเจ้าชอบหลีกเหลี่ยงที่จะแสดงความคิดเห็นหรือตอบคำถามในชั้นเรียน” แก้ไขเป็น “ในขณะที่เรียนคณิตศาสตร์ข้าพเจ้าหลีกเหลี่ยงที่จะแสดงความคิดเห็นหรือตอบคำถามในชั้นเรียน”

คำถามเดิม “ข้าพเจ้าชอบหาโจทย์คณิตศาสตร์มาทำเพิ่มเติมจากโจทย์ที่ทำในชั้นเรียน” แก้ไขเป็น “ข้าพเจ้าหาโจทย์คณิตศาสตร์มาทำเพิ่มเติมจากโจทย์ที่ทำในชั้นเรียน”

คำถามเดิม “ข้าพเจ้าชอบอธิบาย และช่วยสอนเพื่อนเมื่อเพื่อไม่เข้าใจเนื้อหาที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์” แก้ไขเป็น “ข้าพเจ้าช่วยอธิบาย และสอนเพื่อนเมื่อเพื่อนไม่เข้าใจเนื้อหาที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์”

2.4.5 นำแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ที่ได้ปรับปรุง และแก้ไขตามคำแนะนำของผู้เชี่ยวชาญไปทดลองใช้กับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ไม่ใช่กลุ่มตัวอย่าง จำนวน 35 คน

2.4.6 นำแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียน 35 คน มาตรวจให้คะแนนตามเกณฑ์การให้คะแนนที่ตั้งไว้ จากนั้นนำคะแนนที่ได้มาวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาคุณภาพของแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ โดยหาค่าอำนาจจำแนกเป็นรายข้อโดยการใช้สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของข้อคำถามกับคะแนนรวมจากข้ออื่น ๆ ที่เหลือทั้งหมด ได้ค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.46 – 0.94 ซึ่งแปลความหมายได้ว่าเป็นแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ที่ดีมาก และวิเคราะห์ค่าความเที่ยงของแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีสัมประสิทธิ์แอลฟา ได้ค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.985 ซึ่งแปลความหมายได้ว่าเป็นแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ที่มีค่าความเที่ยงสูง จากนั้นผู้วิจัยคัดเลือกข้อคำถามในแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ที่เพื่อนำไปใช้จริงจำนวน 30 ข้อ

2.4.7 นำแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ จำนวน 30 ข้อ มาวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อหาคุณภาพอีกครั้งหนึ่ง โดยหาค่าอำนาจจำแนกเป็นรายข้อโดยการใช้สัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของข้อคำถามกับคะแนนรวมจากข้ออื่น ๆ ที่เหลือทั้งหมด ซึ่งได้ค่าอำนาจจำแนกอยู่ระหว่าง 0.45 – 0.95 ซึ่งแปลความหมายได้ว่าเป็นแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ที่ดีมาก และวิเคราะห์ค่าความเที่ยง

ของแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ โดยใช้วิธีสัมประสิทธิ์แอลฟา ได้ค่าความเที่ยงเท่ากับ 0.979 ซึ่งแปลความหมายได้ว่าเป็นแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ที่มีค่าความเที่ยงสูง

2.4.8 จัดพิมพ์แบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ฉบับสมบูรณ์ เพื่อนำไปใช้กับนักเรียนกลุ่มตัวอย่าง

3. การเก็บรวบรวมข้อมูล

ผู้วิจัยได้ดำเนินการเก็บรวบรวมข้อมูล โดยทำการทดลองและเก็บข้อมูลในภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565 โดยดำเนินการเก็บข้อมูล ดังนี้

3.1 ผู้วิจัยทำการทดสอบเพื่อวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยให้นักเรียนทั้งสองกลุ่มทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย ใช้เวลา 80 นาที

3.2 ผู้วิจัยดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวย ตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดกับนักเรียนกลุ่มทดลอง และดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติกับนักเรียนกลุ่มควบคุม จำนวน 18 แผน ใช้เวลา 18 ชั่วโมง

3.3 ผู้วิจัยทำการทดสอบเพื่อวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยให้นักเรียนทั้งสองกลุ่มทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย ใช้เวลา 80 นาที

3.4 ผู้วิจัยวัดเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยให้นักเรียนทั้งสองกลุ่มทำแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ใช้เวลา 60 นาที

3.5 ผู้วิจัยนำผลคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ไปวิเคราะห์ข้อมูล

4. การวิเคราะห์ข้อมูล

4.1 ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด โดยใช้ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน

4.2 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดกับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ โดยใช้สถิติวิเคราะห์ความแปรปรวนพหุคูณ

บทที่ 4
ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัย เรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูล เพื่อทดสอบสมมติฐานการวิจัยว่า ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดมีความสัมพันธ์กัน และความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ ซึ่งมีตัวแปรอิสระคือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ 2 รูปแบบที่แตกต่างกันคือ การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด และการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ และมีตัวแปรตามคือ ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_com) และเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_att) ผู้วิจัยได้นำเสนอผลการวิเคราะห์ข้อมูลเป็น 2 ตอน โดยตอนที่ 1 นำเสนอความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด และตอนที่ 2 นำเสนอผลการเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดกับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ ผลการวิเคราะห์ข้อมูลด้วยค่าสถิติบรรยายหลังการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พบว่า นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด มีค่าเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_com) และค่าเฉลี่ยคะแนนเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_att) สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ โดยนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดมีค่าเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เท่ากับ 53.68 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 8.65 และค่าเฉลี่ยคะแนนเจตคติต่อคณิตศาสตร์

หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เท่ากับ 108.32 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 25.36 ส่วนนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติมีค่าเฉลี่ยความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เท่ากับ 43.29 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 11.18 และค่าเฉลี่ยคะแนนเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เท่ากับ 83.79 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 22.24

ตอนที่ 1 ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด

ผลการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (post_com) และตัวแปรเจตคติต่อคณิตศาสตร์ (post_att) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด พบว่า ตัวแปรทั้งสองมีความสัมพันธ์กันในทิศทางบวก ขนาดความสัมพันธ์สูงมาก ($r = 0.734$, $p < .05$) และมีจริงโดยนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 โดยมีความแปรปรวนร่วมกันร้อยละ 53.88 ($r^2 = 0.5388$) ดังผลการวิเคราะห์ข้อมูลในตารางที่ 4.1

ตารางที่ 4.1 ผลการวิเคราะห์ค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด

ตัวแปร		post_com	post_att
post_com	r	1.000	0.734
post_att	r	0.734	1.000

หมายเหตุ p = 0.000, n = 56

ตอนที่ 2 เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดกับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

จากผลการทดสอบ Box’s Test of Equality of Covariance Matrices พบว่า ยอมรับสมมติฐานหลัก นั่นคือ ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_com) และเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_att) ของนักเรียนทั้งสองกลุ่มไม่แตกต่างกัน ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ($F = 1.439$, $p = 0.229$) ซึ่งเป็นไปตามข้อตกลงเบื้องต้นของการเท่ากันในเมตริกความแปรปรวนร่วม และเมื่อใช้การทดสอบ Levene’s Test of Equality of Error Variances ของตัวแปรตามแต่ละตัว พบว่า ตัวแปรความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_com) มีค่า $p = 0.147$ และตัวแปรเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_att) มีค่า $p = 0.326$ ซึ่งมากกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด จึงยอมรับสมมติฐานหลัก สรุปได้ว่า ความแปรปรวนของตัวแปรความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_com) และตัวแปรเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_att) ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด และกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ มีความเป็นเอกพันธ์ของความแปรปรวนจริง ที่ระดับนัยสำคัญ .05 จากนั้นผู้วิจัยตรวจสอบความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรตามโดยใช้การทดสอบ Bartlett’s Test of Sphericity พบว่า มีค่า $p = 0.000$ ซึ่งน้อยกว่าระดับนัยสำคัญที่กำหนด จึงปฏิเสธสมมติฐานหลัก สรุปได้ว่า ตัวแปรความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_com) และตัวแปรเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_att) มีความสัมพันธ์กัน ที่ระดับนัยสำคัญ .05 ดังนั้น สามารถวิเคราะห์ MANOVA ได้ ผลการวิเคราะห์ความแตกต่างระหว่างกลุ่ม พบว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลัก นั่นคือ ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_com) และเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_att) ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด กับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ มีค่าเฉลี่ยแตกต่างกันอย่างมี

นัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 (F = 8.539, df = 2, p = 0.001) ดังผลการวิเคราะห์ข้อมูลในตารางที่ 4.2

ตารางที่ 4.2 ความแตกต่างระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด กับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

แหล่งความแปรปรวน	**สถิติทดสอบ**	**Value**	**F**	**df**	**p**
วิธีสอน	Pillai’s Trace	0.244	8.539	2	0.001
	Wilks’ Lambda	0.756	8.539	2	0.001
	Hotelling’s Trace	0.322	8.539	2	0.001
	Roy’s Largest Root	0.322	8.539	2	0.001

ผลการวิเคราะห์ความแปรปรวนทางเดียว (one – way – MANOVA) เพื่อทดสอบสมมติฐานของตัวแปรความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_com) และเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_att) ของนักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด กับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ พบว่า ปฏิเสธสมมติฐานหลักยอมรับสมมติฐานเลือก โดยตัวแปรความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_com) มีค่า F= 15.145 และมีค่า p = 0.000 และตัวแปรเจตคติต่อคณิตศาสตร์หลังได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ (post_att) มีค่า F = 14.813 และมีค่า p = 0.000 จึงสรุปได้ว่า ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 ดังผลการวิเคราะห์ข้อมูลในตารางที่ 4.3

ตารางที่ 4.3 ผลการเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด กับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

ตัวแปร	**แหล่งความแปรปรวน**	SS	df	MS	F	p
post_com	Between Gr.	1,512.161	1	1,512.161	15.145	0.000
	Within Gr.	5,391.821	54	99.849		
	Total	6,903.982	55			
post_att	Between Gr.	8,428.018	1	8,428.018	14.813	0.000
	Within Gr.	30,724.821	54	568.978		
	Total	39,152.839	55			

บทที่ 5
สรุปผลการวิจัย อภิปรายผล และข้อเสนอแนะ

การวิจัย เรื่อง ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง ผู้วิจัยได้สรุปผล อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ ดังนี้

1. สรุปผลการวิจัย

1.1 วัตถุประสงค์การวิจัย

1.1.1 เพื่อศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด

1.1.2 เพื่อเปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดกับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

1.2 สมมติฐานการวิจัย

1.2.1 ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดมีความสัมพันธ์กัน

1.2.2 สามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ

1.3 วิธีดำเนินการวิจัย

1.3.1 กลุ่มตัวอย่าง คือ นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จำนวน 2 ห้องเรียน ห้องเรียนละ 28 คน ได้มาโดยการสุ่มแบบกลุ่ม

1.3.2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย ประกอบด้วย

1) แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด เรื่อง ภาคตัดกรวย จำนวน 18 แผน

2) แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ เรื่อง ภาคตัดกรวย จำนวน 18 แผน

3) แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย แบบอัตนัย จำนวน 8 ข้อ ฉบับก่อนเรียนและหลังเรียน 2 ฉบับคู่ขนานกัน

4) แบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ แบบมาตรประเมินค่า จำนวน 30 ข้อ

1.3.3 การเก็บรวบรวมข้อมูล

1) ผู้วิจัยทำการทดสอบเพื่อวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ก่อนเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยให้นักเรียนทั้งสองกลุ่มทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับก่อนเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย

2) ผู้วิจัยดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดให้กับนักเรียนกลุ่มทดลอง และดำเนินการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติให้กับนักเรียนกลุ่มควบคุม จำนวน 18 แผน ใช้เวลา 18 ชั่วโมง

3) ผู้วิจัยทำการทดสอบเพื่อวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยให้นักเรียนทั้งสองกลุ่มทำแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ฉบับหลังเรียน เรื่อง ภาคตัดกรวย

4) ผู้วิจัยวัดเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มทดลองและกลุ่มควบคุม โดยให้นักเรียนทั้งสองกลุ่มทำแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์

5) ผู้วิจัยนำผลคะแนนที่ได้จากแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ไปวิเคราะห์ข้อมูล

1.3.4 การวิเคราะห์ข้อมูล

1) ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด โดยใช้ค่าเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์แบบเพียร์สัน

2) เปรียบเทียบความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ระหว่างกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบ

ร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดกับกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ โดยใช้สถิติวิเคราะห์ความแปรปรวนพหุคูณ

1.4 สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1.4.1 ความสัมพันธ์ระหว่างความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด มีความสัมพันธ์ทางบวก ขนาดความสัมพันธ์สูงมาก และมีจริงโดยนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

1.4.2 ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05

2. อภิปรายผล

ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ และเจตคติต่อคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง นำมาอภิปรายผล ดังนี้

2.1 ความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด สูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ ทั้งนี้เพราะการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ในขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน ผู้วิจัยได้ใช้คำถามปลายเปิดที่มีคำตอบหลายคำตอบ และมีแนวทางในการหาคำตอบได้หลากหลายวิธี เพื่อเชื่อมโยงความรู้เดิมที่เป็นความรู้พื้นฐานของนักเรียนกับเนื้อหาใหม่ที่กำลังจะเรียน และกระตุ้นให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการตอบคำถาม แสดงความคิดเห็น และสื่อสารแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนเอง พบว่า จากเดิมนักเรียนที่ไม่กล้าตอบคำถามเพราะกลัวว่าจะตอบผิด ทำให้นักเรียนกล้าตอบคำถามมากขึ้น และนักเรียนที่ตอบคำถามได้ช้ามีโอกาสคิดหาคำตอบที่แตกต่างจากเพื่อน นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้ยกตัวอย่างที่มีลักษณะเป็นคำถามปลายเปิด ทำให้นักเรียนได้เห็นแนวทางในการหาคำตอบที่ได้หลากหลาย ซึ่งจากการตั้งคำถามปลายเปิดเพื่อให้นักเรียนได้เขียนสมการรูปมาตรฐานของภาคตัดกรวยที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ และให้นักเรียนออกมานำเสนอสมการรูปมาตรฐานที่ตนเองได้สร้างขึ้น พบว่า นักเรียนสามารถเขียนสมการที่แตกต่างกันได้หลายสมการ เช่น นักเรียนสามารถ

เขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมที่อยู่ในจตุภาคที่ 2 ได้ว่า $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 9$ และ $(x + 5)^2 + (y - 7)^2 = 16$ จากสมการนักเรียนทุกคนก็จะได้เห็นว่าสมการทั้งสองต่างก็เป็นสมการซึ่งแทนวงกลมที่อยู่ในจตุภาคที่ 2 เป็นต้น และขณะที่นักเรียนออกมานำเสนอสมการหน้าชั้นเรียน นักเรียนได้ฝึกความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด เพื่ออธิบายแนวคิดของตนเองให้นักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียนได้เข้าใจ ทำให้นักเรียนในชั้นเรียนเห็นรูปแบบของสมการที่แตกต่างกัน ซึ่งเป็นคำตอบที่ถูกต้องและสอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ ส่วนการสรุปบทเรียนในขั้นนี้ผู้วิจัยใช้คำถามปลายเปิดเพื่อกระตุ้นให้นักเรียนช่วยกันสรุปบทเรียนด้วยตนเอง พบว่า นักเรียนแต่ละคนช่วยกันสรุปบทเรียนจนครบถ้วน ชัดเจน และสมบูรณ์ ขั้นการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม ผู้วิจัยต้องกระตุ้นให้นักเรียนช่วยเหลือกัน สมาชิกในกลุ่มที่เข้าใจเนื้อหาแล้วต้องช่วยอธิบายและสอนสมาชิกที่ยังไม่เข้าใจ ทำให้นักเรียนที่ไม่เข้าใจเนื้อหากล้าที่จะถามเพื่อน และสมาชิกในกลุ่มมีการพูดคุยสื่อสารกันเพื่อแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันมากขึ้น นอกจากนี้ผู้วิจัยยังได้แทรกคำถามปลายเปิดไว้ในใบกิจกรรม ทำให้นักเรียนได้ฝึกการเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการหาคำตอบร่วมกับสมาชิกในกลุ่ม และพบว่ามีสมาชิกบางคนเขียนแสดงแนวคิดในการหาคำตอบด้วยวิธีการที่หลากหลายและได้คำตอบที่แตกต่างกัน แต่สมาชิกทุกคนในกลุ่มก็ช่วยกันตรวจสอบความถูกต้องของแนวคิด และคำตอบที่ได้ โดยแต่ละกลุ่มมีการอธิบายแนวคิดและวิธีการหาคำตอบร่วมกัน เช่น เมื่อมีสมาชิกในกลุ่มที่เขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้งแตกต่างจากสมาชิกคนอื่น ๆ คือ $x^2 = 5y$ สมาชิกทุกคนในกลุ่มจะช่วยกันหาค่า p เพื่อจัดสมการให้อยู่ในรูป $x^2 = 4py$ ซึ่งนักเรียนจะพบว่าสามารถแทนค่า p ด้วย $\frac{5}{4}$ หรือ 1.25 ก็ได้ ทำให้นักเรียนสามารถเขียนสมการในรูปแบบมาตรฐานได้ 2 แบบ คือ $x^2 = 4\left(\frac{5}{4}\right)y$ หรือ $x^2 = 4(1.25)y$ จากตัวอย่างทำให้นักเรียนได้เห็นว่าเมื่อสัมประสิทธิ์ของ y ไม่ใช่จำนวนที่หารด้วย 4 ลงตัว นักเรียนจะมีวิธีการในการหาค่า p ได้อย่างไร และจากลักษณะของสมการยังทำให้นักเรียนในชั้นเรียนได้เห็นรูปแบบของสมการที่หลากหลาย ทำให้นักเรียนคนอื่น ๆ กล้าที่จะคิด และนำเสนอแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่แตกต่างจากเดิม ซึ่งส่งผลให้นักเรียนเกิดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ด้านการพูด และการสื่อสารด้วยวิธีการเขียนเพื่อถ่ายทอดความคิดหรือความเข้าใจของตนเองให้ผู้อื่นได้รับรู้ และจากผลการทดสอบย่อยรายบุคคล พบว่า เมื่อนำคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มมาเปรียบเทียบกันหลังจากสิ้นสุดการทดลอง จะเห็นได้ว่า นักเรียนแต่ละกลุ่มมีคะแนนความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์เฉลี่ยใกล้เคียงกัน และจำนวนครั้งที่ได้รับรางวัลใกล้เคียงกัน ซึ่งอาจเป็นผลจากการแข่งขันระหว่างกลุ่ม และเมื่อนักเรียนได้ทราบว่าคะแนนของนักเรียนและรางวัลที่ได้ในแต่ละครั้งของการทดสอบมาจากคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม ทำให้ก่อนการทดสอบย่อยในครั้งถัดไปนักเรียนแต่ละคนจะตั้งใจทำความเข้าใจกับเนื้อหามากขึ้น สมาชิกในกลุ่มช่วยกันทบทวนเนื้อหามากขึ้น เพื่อ

เก็บคะแนนให้กับกลุ่มของตนเอง ซึ่งสอดคล้องกับสุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2546, น. 175) และศศิธร เวียงวะลัย (2556, น.145 – 146) ที่กล่าวว่า ข้อดีของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ช่วยสร้างความสัมพันธ์ที่ดีระหว่างสมาชิกในกลุ่ม ส่งเสริมให้สมาชิกทุกคนได้มีโอกาสในการคิด การพูด และแสดงความคิดเห็นอย่างเท่าเทียมกัน ส่งเสริมให้นักเรียนรู้จักช่วยเหลือซึ่งกันและกัน นักเรียนที่เรียนเก่งช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนอ่อนในการเรียน ทำให้นักเรียนที่มีความสามารถแตกต่างกันได้เรียนรู้ร่วมกัน รวมทั้งยังส่งเสริมทักษะการทำงานเป็นกลุ่ม ทักษะทางสังคม ทำให้นักเรียนรู้จักรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่น อันจะนำไปสู่ความสามารถในการสื่อสาร นอกจากนี้สอดคล้องกับ Foong (2000, pp. 50 – 52) และไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ (2548, น. 156 – 163) ที่กล่าวว่า การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ จะช่วยเปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดหาคำตอบได้หลายคำตอบ และใช้วิธีการในการหาคำตอบได้หลายวิธี ทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียน เปิดโอกาสให้นักเรียนได้แสดงความคิดทางคณิตศาสตร์ ใช้กระบวนการที่มีเหตุผล นักเรียนได้ใช้ทักษะการสื่อสาร และการแก้ปัญหาตามแนวทางของตนเอง และสอดคล้องกับ Rowan and Morrow (1993, p. 9 – 11) ที่กล่าวว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือและการใช้คำถามปลายเปิด ยังเป็นแนวทางในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ โดยการใช้คำถามปลายเปิดจะเป็นตัวกระตุ้นให้นักเรียนได้คิดและตอบสนองออกมา เปิดโอกาสให้นักเรียนได้คิดอย่างหลากหลายและสร้างสรรค์ ส่งเสริมการใช้คณิตศาสตร์ในการสื่อสาร และทำให้นักเรียนได้ตั้งคำถามกับตนเองนำไปสู่การค้นพบในสิ่งที่สนใจและการจัดกลุ่มให้ผู้เรียนร่วมมือช่วยเหลือกันในการเรียนรู้ เป็นการเปิดโอกาสให้ผู้เรียนได้สำรวจความคิด อธิบายแนวคิดกันในกลุ่มซึ่งเป็นการส่งเสริมการสื่อสารโดยตรง อีกทั้งสอดคล้องกับงานวิจัยของปิยะรัตน์ เงาผ่อง (2551) พบว่า การนำคำถามปลายเปิดไปใช้ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทำให้นักเรียนมีโอกาสพัฒนาทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียน โดยเฉพาะเมื่อผ่านการทำกิจกรรมกลุ่ม สอดคล้องกับงานวิจัยของชานนท์ ศรีผ่องงาม (2549) พบว่า ชุดการเรียนแบบร่วมมือเทคนิค STAD ช่วยให้ความก้าวหน้าของทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 มีค่าเฉลี่ยตั้งแต่ร้อยละ 70 ขึ้นไป สอดคล้องกับงานวิจัยของอัจฉราพรรณ อาโน (2555) พบว่านักเรียนที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD มีทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ไม่ต่ำกว่าระดับดี อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .05 รวมทั้งสอดคล้องกับงานวิจัยของอมราวดี เพชรรักษ์ (2561) พบว่า คะแนนเฉลี่ยของความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์หลังเรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD สูงกว่าคะแนนทดสอบก่อนเรียนแบบร่วมมือเทคนิค STAD อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01 และคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD สูงกว่าคะแนนเฉลี่ยหลังเรียนของนักเรียนที่ได้รับการจัดการเรียนรู้แบบปกติ อย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ .01

2.2 เจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 กลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดสูงกว่ากลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ ทั้งนี้เพราะการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ผู้วิจัยได้ใช้คำถามปลายเปิดในขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียนทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการตอบคำถามและแสดงความคิดเห็น ตลอดจนแสดงแนวคิดและความเข้าใจของตนเอง ได้มีโอกาสคิดหาคำตอบที่แตกต่างกัน รู้สึกภูมิใจเมื่อได้มีส่วนร่วมในการตอบคำถามและตอบคำถามได้ถูกต้อง ส่วนขั้นการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม สมาชิกในกลุ่มมีการช่วยเหลือกัน โดยนักเรียนที่เข้าใจเนื้อหาแล้วช่วยสอนและทบทวนให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจเนื้อหา และนักเรียนทุกคนจะตระหนักว่าคะแนนจากการทดสอบย่อยของนักเรียนจะสัมพันธ์กับคะแนนของกลุ่ม ทำให้นักเรียนที่เข้าใจเนื้อหาแล้วช่วยดูแลนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจ และนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจเนื้อหาเกิดความพยายามที่จะเรียนรู้และสร้างความเข้าใจเนื้อหา จึงส่งผลให้นักเรียนมีความสัมพันธ์ที่ดีต่อกัน รู้จักการช่วยเหลือกัน เห็นคุณค่าและเป้าหมายของการเรียนคณิตศาสตร์ และอยากที่จะเรียนคณิตศาสตร์มากขึ้น จากการที่นักเรียนทำแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ พบว่า ด้านความรู้ความเข้าใจ การรับรู้ของนักเรียนถึงประโยชน์และความสำคัญของคณิตศาสตร์ นักเรียนกลุ่มทดลองเห็นด้วยกับข้อความที่ว่า การเรียนคณิตศาสตร์ทำให้คุ้นเคยกับวิธีการแก้ปัญหาต่าง ๆ อย่างหลากหลาย ช่วยในการวางแผน การตัดสินใจแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม และช่วยฝึกให้เป็นคนมีเหตุผลมากกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อาจเป็นเพราะในใบกิจกรรมมีสถานการณ์ที่ให้นักเรียนได้นำความรู้ เรื่อง ภาคตัดกรวยไปใช้ในการแก้ปัญหา และได้ฝึกเขียนแสดงแนวคิดในการหาคำตอบ ซึ่งพบว่า การทำกิจกรรมร่วมกันเป็นกลุ่มช่วยให้นักเรียนได้ระดมความคิดพูดคุยแลกเปลี่ยนความคิดเห็นกันอย่างมีเหตุและผล และได้แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนเองในการวางแผนแก้ปัญหาร่วมกับสมาชิกในกลุ่มเพื่อหาวิธีการที่เหมาะสม ส่วนด้านอารมณ์ความรู้สึก พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองมีความสุขและสนุกกับการเรียนคณิตศาสตร์ รู้สึกภูมิใจเมื่อหาคำตอบได้ด้วยตนเอง มากกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม อาจเป็นเพราะการใช้คำถามปลายเปิดที่มีคำตอบที่ถูกต้องหลายคำตอบทำให้นักเรียนกลุ่มทดลองได้มีส่วนร่วมในชั้นเรียน ได้แสดงความคิดเห็นของตนเอง และได้มีโอกาสคิดหาคำตอบที่แตกต่างกัน นักเรียนจึงมีส่วนร่วมในการตอบคำถามและเกิดความภูมิใจเมื่อตอบคำถามได้ และจากการทำกิจกรรมร่วมกันเป็นกลุ่มนั้นนักเรียนได้ทบทวนเนื้อหาร่วมกับสมาชิกในกลุ่มอีกครั้ง นักเรียนจึงเข้าใจในเนื้อหามากขึ้น และสามารถตอบคำถามได้ ทำให้นักเรียนมีความสุข สนุกกับการเรียน และอยากที่จะเรียนคณิตศาสตร์มากขึ้น และด้านพฤติกรรม พบว่า นักเรียนกลุ่มทดลองชอบตอบคำถามและแสดงความคิดเห็นต่าง ๆ ขณะที่เรียนคณิตศาสตร์ แต่นักเรียนกลุ่มควบคุมจะหลีกเลี่ยงการแสดงความคิดเห็นและการตอบคำถามขณะที่เรียน อาจเป็นเพราะการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติไม่ได้เน้นการใช้คำถามปลายเปิดจึงทำให้นักเรียนกลุ่มควบคุมไม่ค่อยได้มีส่วนร่วมในการตอบคำถาม และไม่ค่อยกล้าตอบ

คำถามหรือแสดงความคิดเห็น ซึ่งแตกต่างจากนักเรียนกลุ่มทดลองที่ได้ฝึกความกล้าในการแสดงความคิดเห็นจากการทำกิจกรรมร่วมกันในขั้นการทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม นอกจากนี้การใช้คำถามปลายเปิดยังทำให้นักเรียนกลุ่มทดลองได้มีส่วนร่วมในการตอบคำถามและแสดงความคิดเห็นมากขึ้น ดังนั้นเมื่อนักเรียนสามารถตอบคำถามได้ด้วยตนเอง นักเรียนจึงอยากที่จะตอบคำถามหรือแสดงความคิดเห็น อีกทั้งนักเรียนกลุ่มทดลองยังเห็นด้วยกับการช่วยอธิบาย และสอนเพื่อนเมื่อเพื่อนไม่เข้าใจเนื้อหาที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์มากกว่านักเรียนกลุ่มควบคุม ซึ่งอาจเป็นเพราะการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดเน้นให้นักเรียนได้ช่วยเหลือกันมากกว่าการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติที่นักเรียนจะเน้นการทบทวนและทำงานเป็นรายบุคคลโดยไม่มีการช่วยเหลือกัน จึงส่งผลให้นักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดมีเจตคติต่อคณิตศาสตร์สูงกว่านักเรียนกลุ่มที่ได้รับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ ซึ่งสอดคล้องกับ สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ (2546, น. 175) และศศิธร เวียงวะลัย (2556, น. 145 – 146) ที่กล่าวว่า ข้อดีของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ที่ช่วยสร้างความสัมพันธ์ที่ดีระหว่างสมาชิกในกลุ่ม สมาชิกในกลุ่มได้ร่วมมือกัน และมีส่วนร่วมในการทำงาน ทำให้นักเรียนเกิดเจตคติที่ดีต่อการเรียน สอดคล้องกับ Foong (2000, pp. 50 – 52) ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, (2548, น. 156 – 163) ที่กล่าวว่า การใช้คำถามปลายเปิดในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ช่วยให้นักเรียนได้คิดหาคำตอบอย่างหลากหลาย และได้ใช้วิธีการในการหาคำตอบหลายวิธี ทำให้นักเรียนมีส่วนร่วมในการเรียน ได้แสดงแนวคิดทางคณิตศาสตร์ ได้สื่อสารและแก้ปัญหาตามแนวทางของตนเอง ทำให้ครูทราบถึงระดับความเข้าใจของนักเรียน และช่วยเพิ่มความเชื่อมั่นในการหาคำตอบให้กับนักเรียน จึงส่งผลให้นักเรียนมีเจตคติที่ดีต่อคณิตศาสตร์ รวมทั้งสอดคล้องกับงานวิจัยของ ณัฏฐ์ชญา อินพูลวงษ์ (2559) พบว่า เจตคติต่อคณิตศาสตร์ของนักเรียนที่ได้การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD โดยรวมอยู่ในระดับเห็นด้วย สอดคล้องกับงานวิจัยของ Van Dat Tran (2013) พบว่า การจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ช่วยส่งเสริมเจตคติเชิงบวกของนักเรียนที่มีต่อคณิตศาสตร์ และสอดคล้องกับงานวิจัยของ Hery Setiyawan (2019) พบว่า นักเรียนที่เรียนเก่งที่เรียนด้วยรูปแบบการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD มีปฏิสัมพันธ์ในการให้ความช่วยเหลือนักเรียนคนอื่น ๆ ในชั้นเรียน และนักเรียนมีเจตคติเชิงสร้างสรรค์อยู่ในเกณฑ์ที่ค่อนข้างดี

3. ข้อเสนอแนะ

3.1 ข้อเสนอแนะในการนำผลการวิจัยไปใช้

3.1.1 ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ครูควรจัดเนื้อหาให้เหมาะสมกับระยะเวลาในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ เพื่อให้นักเรียนทำกิจกรรมการเรียนรู้ครบทุกขั้นตอน และควรมีการใช้เทคโนโลยีเข้ามาช่วยในการเขียนกราฟของภาคตัดกรวยเพื่อความชัดเจนของกราฟ เช่น โปรแกรม GeoGebra และ โปรแกรม Geometer's Sketchpad เป็นต้น

3.1.2 ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ในขั้นการทำงานกลุ่มร่วมกัน ครูจะต้องคอยกระตุ้นให้สมาชิกในกลุ่มช่วยเหลือกันให้นักเรียนทุกคนทำหน้าที่ของตนเองให้ดีที่สุด โดยนักเรียนที่เข้าใจเนื้อหาแล้วช่วยสอนและทบทวนให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจเนื้อหา ส่วนนักเรียนที่เรียนอ่อนหรือยังไม่เข้าใจในเนื้อหาจะต้องพยายามทำความเข้าใจในเนื้อหา เพราะคะแนนสอบของนักเรียนแต่ละคนมีผลต่อคะแนนของกลุ่ม และเพื่อสร้างความสัมพันธ์ที่ดีระหว่างสมาชิกในกลุ่ม

3.1.3 ในการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด ครูจะต้องใช้คำถามปลายเปิดที่หลากหลาย ทั้งคำถามที่มีคำตอบได้หลายคำตอบ และคำถามที่มีวิธีการในการหาคำตอบที่หลากหลาย เพื่อกระตุ้นให้นักเรียนได้มีส่วนร่วมในการแสดงความคิดเห็น และสื่อสารความคิดหรือแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของตนเอง

3.2 ข้อเสนอแนะในการทำวิจัยครั้งต่อไป

3.2.1 ควรมีการศึกษาตัวแปรอื่น ๆ ที่อาจเกิดจากการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด เช่น ความสามารถในการให้เหตุผล ความพึงพอใจต่อการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ พฤติกรรมการทำงานกลุ่ม ปฏิสัมพันธ์ในชั้นเรียน และความสุขในการเรียน เป็นต้น

3.2.2 ควรมีการศึกษาเกี่ยวกับการใช้กิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิดกับเนื้อหาอื่น ๆ ในวิชาคณิตศาสตร์

บรรณานุกรม

บรรณานุกรม

กัญจนา ลินทรัตนศิริกุล. (2561). เครื่องมือวิจัยและการตรวจสอบคุณภาพ. ใน *ประมวลสาระชุดวิชาการวิจัยหลักสูตรและการเรียนการสอน.* (หน่วยที่ 9, น. 9–1 – 9–81). นนทบุรี: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

กันตาธรณ์ ฆ้องย่ำ. (2560). *ชุดกิจกรรมการเรียนการสอนโดยใช้คำถามปลายเปิดเพื่อส่งเสริมความคิดสร้างสรรค์ทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนระดับชั้นมัธยมศึกษาตอนต้น โรงเรียนขลุงรัชดาภิเษก จ. จันทบุรี* (วิทยานิพนธ์ปริญญาวิทยาศาสตรมหาบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). มหาวิทยาลัยบูรพา, ชลบุรี.

จันทรา ตันติพงศานุรักษ์. (2543). การจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ. *วารสารวิชาการ, 3*(12), 45 – 46.

ชานนท์ รักปรางค์. (2562). *ปัจจัยที่ส่งผลต่อความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4.* (วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช, นนทบุรี.

ณัฏฐ์ชญา อินพูลวงษ์. (2559). *ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ เจตคติต่อคณิตศาสตร์ และพฤติกรรมการทำงานกลุ่มของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 ที่เรียนโดยการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือ เทคนิค STAD.* (วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). มหาวิทยาลัยบูรพา, ชลบุรี.

ณัฐสุดา เพ็งสร้อย, จุรีรัตน์ อาจหาญ, วรุฒ หล้าบือ, วริญญา พงษ์ไพบูลย์, และวนินทร พูนไพบูลย์พิพัฒน์. (2565). การจัดกิจกรรมการเรียนรู้ทางคณิตศาสตร์รูปแบบออนไลน์ที่เน้นสมรรถนะการสื่อสารโดยการใช้สถิติจากสถานการณ์ COVID – 19. *นิตยสาร สสวท, 50*(234) มกราคม – กุมภาพันธ์, 20 – 21.

ดำริ บุญชู. (2543). การเรียนร่วมกับการเรียนรู้รวมกับผู้อื่น. *วารสารวิชาการ, 37*(2) กุมภาพันธ์, 69.

ทิศนา แขมมณี. (2552). *ศาสตร์การสอน.* (พิมพ์ครั้งที่ 5). กรุงเทพฯ: ด่านสุทธาการพิมพ์จำกัด.

นฤพันธุ์ เพ่งพิศ. (2561). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้ตามกระบวนการสำรวจเชิงคณิตศาสตร์ร่วมกับคำถามปลายเปิด ที่มีต่อความสามารถในการแก้ปัญหาและการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ ของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3.* (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

บัวเหรียญ ดาโรจน์. (2555). *ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบแก้ปัญหาโดยใช้คำถามปลายเปิด เรื่อง ร้อยละ ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนม่วงสามสิบ (อำนวยปัญญา) จังหวัดอุบลราชธานี.* (การศึกษาค้นคว้าอิสระปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช, นนทบุรี.

ปรีชา เนาว์เย็นผล. (2544). *กิจกรรมการเรียนการสอนคณิตศาสตร์โดยใช้การแก้ปัญหาปลายเปิดสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 1.* (ปริญญานิพนธ์ปริญญาดุษฎีบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). มหาวิทยาลัยศรีนครินทรวิโรฒประสานมิตร, กรุงเทพฯ.

ปิยะรัตน์ เงาผ่อง. (2551). *การใช้คำถามปลายเปิดเพื่อพัฒนาทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ในชั้นเรียนสำหรับนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 3 โรงเรียนสารภีพิทยาคม จังหวัดเชียงใหม่* (วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). มหาวิทยาลัยเชียงใหม่. เชียงใหม่.

พีชาณิกา เพชรสังข์. (2556). *ผลของการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์โดยใช้รูปแบบการเรียนการสอน 5E ร่วมกับคำถามปลายเปิดที่มีต่อความสามารถในการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์และความสามารถในการคิดอย่างมีวิจารณญาณของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 2.* (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์. (2547). *การสอนโดยใช้วิธีการแบบเปิดในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ของญี่ปุ่น.* ขอนแก่น: คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยขอนแก่น.

__________. (2548). ยุทธวิธีเกี่ยวกับความตระหนักในการคิดในกระบวนการแก้ปัญหาปลายเปิด. *วารสารวิจัย มข. (บศ.), 7*(1), 150 – 163.

ระพีพัฒน์ แก้วอ่ำ. (2559). การใช้คำถามปลายเปิดในการสอนคณิตศาสตร์. *วารสารศรีนครินทรวิโรฒวิจัยและพัฒนา สาขามนุษยศาสตร์ และสังคมศาสตร์, 8*(15) มกราคม – มิถุนายน, 206.

รุ่งฟ้า จันท์จารุภรณ์. (2559). กิจกรรมส่งเสริมทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์. ใน *ประมวลสาระชุดวิชาการจัดประสบการณ์การเรียนรู้คณิตศาสตร์.* (หน่วยที่ 9, น. 9–23 – 9–32). นนทบุรี: สำนักพิมพ์มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช.

วัฒนาพร ระงับทุกข์. (2542). *แผนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง.* (พิมพ์ครั้งที่ 3). กรุงเทพฯ: วัฒนาพานิช.

วิมลรัตน์ สุนทรโรจน์. (2545). *เอกสารประกอบการเรียนการสอนวิชาพัฒนาการเรียนการสอน.* (พิมพ์ครั้งที่ 3). มหาสารคาม: ภาควิชาหลักสูตรและการสอน คณะศึกษาศาสตร์ มหาวิทยาลัยมหาสารคาม.

เวชฤทธิ์ อังกนะภัทรขจร. (2555). *ครบเครื่องเรื่องควรรู้สำหรับครูคณิตศาสตร์: หลักสูตรการสอนและการวิจัย.* กรุงเทพฯ: จรัลสนิทวงศ์การพิมพ์.

ศศิธร เวียงวะลัย. (2556). *การจัดการเรียนรู้.* กรุงเทพฯ: โอ. เอส. พริ้นติ้งเฮาส์.

สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2555). *การวัดและประเมินผลคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: ซีเอ็ดยูเคชั่น.

___________. (2560). *คู่มือการใช้หลักสูตร กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: กระทรวงศึกษาธิการ.

___________. (2560). *ตัวชี้วัดและสาระการเรียนรู้แกนกลาง กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.

___________. (2562). *หนังสือเรียนรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

___________. (2565). *คู่มือครูรายวิชาเพิ่มเติมคณิตศาสตร์ ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2 ตามผลการเรียนรู้ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ (ฉบับปรับปรุง พ.ศ. 2560) ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551*. กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

สิริพร ทิพย์คง. (2545). *หลักสูตรและการสอนคณิตศาสตร์.* กรุงเทพฯ: พัฒนาคุณภาพวิชาการ (พว.).

สุดารัตน์ ภิรมย์ราช. (2555). *ผลการใช้เทคนิค Think – Talk – Write ร่วมกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบสืบสอบที่มีต่อความสามารถในการใช้เหตุผล และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์.* (วิทยานิพนธ์ปริญญามหาบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพฯ.

สุดารัตน์ อะช่วยรัมย์. (2556). *ผลการจัดกิจกรรมการเรียนรู้คณิตศาสตร์แบบแก้ปัญหา โดยใช้คำถามปลายเปิด เรื่อง เศษส่วน ที่มีต่อผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 6 โรงเรียนบ้านโคกปราสาท จังหวัดบุรีรัมย์.* (การศึกษาค้นคว้าอิสระปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). มหาวิทยาลัยสุโขทัยธรรมาธิราช, นนทบุรี.

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ. (2545). *21 วิธีจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนากระบวนการคิด.* กรุงเทพฯ: ห้างหุ้นส่วนจำกัดภาพพิมพ์.

สุวิทย์ มูลคำ และอรทัย มูลคำ. (2546). *19 วิธีจัดการเรียนรู้เพื่อพัฒนาความรู้ และทักษะ*. (พิมพ์ครั้งที่ 4). กรุงเทพฯ: ภาพพิมพ์.

ไสว ฟักขาว. (2544). *การจัดการเรียนการสอนที่เน้นผู้เรียนเป็นศูนย์กลาง.* กรุงเทพฯ: เอมพันธ์.

อมราวดี เพชรรักษ์. (2561). *การพัฒนาความสามารถในการแก้โจทย์ปัญหา และการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 4 โรงเรียนวีรนาทศึกษามูลนิธิ จังหวัดพัทลุง ระหว่างวิธีสอนแบบปกติ กับการจัดการเรียนรู้แบบร่วมมือกันเทคนิคกลุ่มผลสัมฤทธิ์ (STAD).* (วิทยานิพนธ์ปริญญาศึกษาศาสตรมหาบัณฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). มหาวิทยาลัยหาดใหญ่, สงขลา.

อัจฉราพรรณ อาโน. (2555). *การจัดการเรียนรู้แบบกลุ่มร่วมมือเทคนิค STAD เพื่อพัฒนาทักษะการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้นประถมศึกษาปีที่ 5*. (วิทยานิพนธ์ปริญญาครุศาสตรมหาบัญฑิต ไม่ได้ตีพิมพ์). มหาวิทยาลัยราชภัฏเชียงราย, เชียงราย.

อัมพร ม้าคนอง. (2553). *ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ.* กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

__________. (2554). *ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์: การพัฒนาเพื่อพัฒนาการ.* กรุงเทพฯ: จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

Adelson, J. L., & McCoach, D. B. (2011). Development and psychometric properties of the math and me survey: Measuring third through sixth graders' attitudes towards Mathematics. *Measurement and evaluation in counselling and development 44*(4), 225 – 247.

Ajzen, I. (1993). Attitude theory and the attitude – behavior relation. *New directions in attitude measurement,* 41 – 45.

Akinsola, M. K., & Olowojaiye, F. B. (2008). Teacher Instructional Methods and Student Attitudes Towards Mathematics. *International Electroonic Journal of Mathematics Education, 3*(1) February, 60 – 73.

Al – Qaisi, M. K., & Akkin, T. (2010). Swept – source polarization – sensitive optical coherence tomography based on polarization – maintaining fiber. *Optics express*, *18*(4), 3392 – 3403.

Bandura, A. (1997). Self – efficacy: Toward a unifying theory of behavioral change. *Psychological Review, 84,* 261 – 271.

Becker, J. P. & Shimada, S. (1997). *The open – ended approach: A new proposal for Teaching Mathematics.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Cai, J., Lane, S., and Jakabcsin, M. S. (1996). *The role of open – ended tasks and holistic scoring rubrics: Assessing student' mathematical reasoning and communication.*

Fishbein, M., & Ajzen, I. (1975). *Belief, Attitude, Intention, and Behavior: An Introduction to Theory and Research.* Reading, Massachusetts: Addison – Wesley.

Foong, P.Y. (2000). Open – ended problems for higher – order thinking in mathematics. *Teaching and Learning, 20*(2), 50 – 52.

Gredler, M. E. (1997). *Learning and instruction: theory into practice* (3rd ed.). New Jersey: Prentice – Hall.

Han, S. Y., & Carpenter, D. (2014). Construct validation of student attitude toward science, technology, engineering and mathematics project – based learning: the case of Korean middle grade students. *Middle Grades Research Journal, 9*(3), 27 – 41.

James, M. C. (2014). *Classroom teaching skills.* (10th ed.). Belmont, California: Wadsworth.

Johnson, D.W. & Johnson, R.T. (1994). An Overview of Cooperative Learning. In J. Thousand, A. Villa & A. Nevin (Eds), *Creativity and Collaborative Learning.* 31 – 34. Baltimore: Paul H. Brookes Publishing.

Kennedy, L. M. & Tipps, S. (1994). *Guiding Children's Learning of Mathematics* (7th ed.). Belmont, California: Woodworth Publishing.

Kibrislioglu, N. (2015). An Investigation About 6th Grade Students' Attitudes Towards Mathematics. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 186,* 64 – 69.

Kiwanuka, H. N., Van Damme, Van den Noortgate, W., & Reynolds, C. (2020). Temporal relationship between attitude toward mathematics and mathematics achievement. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*, 1 – 25.

Kuh, G. D. (2009). The National Survey of Student Engagement: Conceptual and Empirical Foundation. *New Directions for Institutional Research, 141*, 5 – 20.

Lappan, G., & Schram, P. W. (1989). Communication and reasoning: Critical dimensions of sense making in mathematics. *New directions for elementary school mathematics*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Likert, Rensis. (1970). *A Technique for the Measurement of Attitude.* Chicago: Rand McNally Company.

Mazana, M. Y., Montero, C.S., & Casmir R. O. (2019). Investigating Students' Attitude towards Learning Mathematics in International. *Electronic Journal of Mathematics Education, 14*(1), 207 – 231.

Mumme, Judith & Shepherd, Nancy. (1993). Communication in Mathematics, in Implementing the K – 8. *Curriculum and Evaluation Standards.* The National Council of Teachers of Mathematics.

National Council of Teachers of Mathematics Commission on Standards for School Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* Reston Virginia: Author.

__________. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, Virginia: Author.

Neuman, W. L. (2005). *Social Research Methods. Qualitative and Quantitative approaches* (6th ed.) Boston: Allyn and Bacon.

Rowan, T.E., & Morrow, L.J. (1993). Implementing K – 8. *Curriculum and Evaluation Standards from the Arithmetic Teacher.* Massachusetts: Allyn and Bacon.

Setiyawan, H. (2019). Interaction of learning Mathematics and constructive attitudes of students on triangle materials through STAD cooperative learning model. *Jurnal Matematika dan Pembelajaran, 7*(1), 91 – 101.

Slavin, R. E. (1987). Cooperative Learning and Cooperative school. *Education Leadership*, November.

__________. (1995). *Cooperative Learning.* Boston: Allyn and Bacon.

Stenmark, J. K. (1991). *Mathematics assessment: Myths, model, good questions, and practical suggestions.* Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Syyeda, F. (2016). Understanding Attitudes Towards Mathematics (ATM) using a Multimodal modal Model: An Exploratory Case Study with Secondary School Children in England. *Cambridge Open – Review Educational Research e – Journal, 3,* 32 – 36.

Tahar, N. F., Ismail, Z., Zamani, N. D., & Adnan, N. (2010). Students' Attitude Toward Mathematics: the use of Factor Analysis in Determining the Criteria. *Procedia Social and Behavioral Research*, *8,* 476 – 481.

Thurber, W. A. (1976). *Teaching Science in Today's Secondary Schools.* Boston: Allyn and Bacon.

Thurstone, L. L. (1967). *Reading in Attitude Theory and Measurement.* New York: John Wiley and Sons, Inc.Tran, V.D. (2013). *Effects of student teams achievement division (STAD) on academic achievement, and attitudes of grade 9th secondary school students towards mathematics* (Faculty of Education). La Trobe University.

Wendy, S., & Nicole, I. (2004). *Open – Ended Items Better Reveal Student' Mathematical Thinking.*

ภาคผนวก

ภาคผนวก ก

รายชื่อผู้ทรงคุณวุฒิพิจารณาเครื่องมือ

รายชื่อทรงคุณวุฒิพิจารณาเครื่องมือ

1. **ชื่อ** นายบุรินทร์ บำรุงรักษ์
   สถานที่ทำงาน โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง
   วุฒิการศึกษา วท.ม. คณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยบูรพา
   ประสบการณ์หรือความชำนาญ ครูชำนาญการพิเศษ ประสบการณ์สอนวิชาคณิตศาสตร์ 21 ปี

2. **ชื่อ** นางปริภัทร บำรุงรักษ์
   สถานที่ทำงาน โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง
   วุฒิการศึกษา วท.ม. คณิตศาสตร์ศึกษา มหาวิทยาลัยบูรพา
   ประสบการณ์หรือความชำนาญ ครูชำนาญการพิเศษ ประสบการณ์สอนวิชาคณิตศาสตร์ 21 ปี

3. **ชื่อ** นายกุลธวัช ทิพสอน
   สถานที่ทำงาน โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง
   วุฒิการศึกษา วท.ม. การสอนคณิตศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีพระจอมเกล้าธนบุรี
   ประสบการณ์หรือความชำนาญ ครูชำนาญการ ประสบการณ์สอนวิชาคณิตศาสตร์ 16 ปี

ภาคผนวก ข

ตัวอย่างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD ร่วมกับการใช้คำถามปลายเปิด

เรื่อง ภาคตัดกรวย

- ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง วงกลม
- ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง วงรี
- ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง พาราโบลา
- ตัวอย่างแผนการจัดการเรียนรู้ เรื่อง ไฮเพอร์โบลา

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย	จำนวน 18 ชั่วโมง
เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม	เวลา 1 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย เรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม

สมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาจุดศูนย์กลาง และความยาวรัศมีจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่กำหนดได้
2. เขียนกราฟของวงกลมจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่กำหนดได้
3. เขียนสมการวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

สาระการเรียนรู้

1. บทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงกลม
2. สมการรูปมาตรฐานของวงกลม
3. การหาจุดศูนย์กลาง และความยาวรัศมีของวงกลมจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลม
4. การเขียนกราฟของวงกลมจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลม
5. การเขียนสมการวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน

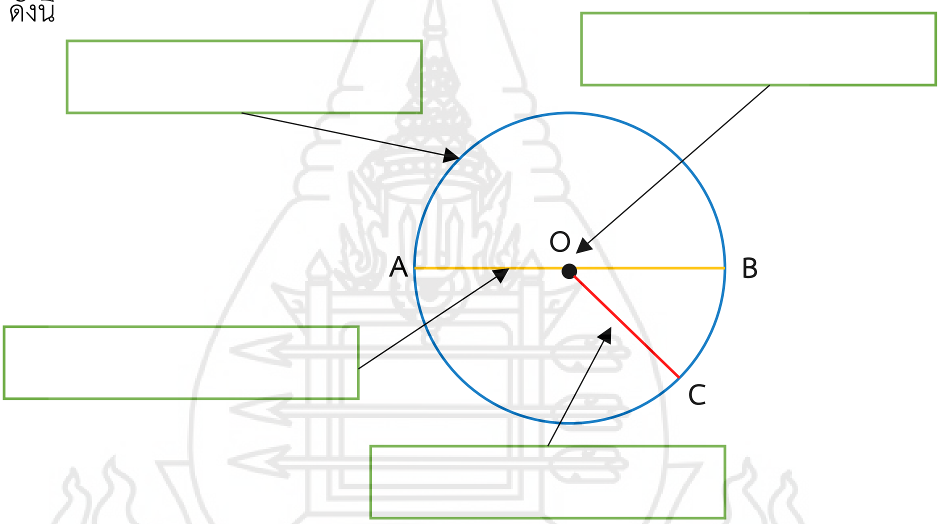
- แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ และทบทวนความรู้เดิม

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับการเกิดภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงกลม โดยใช้คำถาม “ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงกลม เกิดขึ้นได้อย่างไร”

(แนวการตอบ วงกลมเป็นภาคตัดกรวยที่เกิดจากการใช้ระนาบตัดกรวยข้างเดียว โดยให้ระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวย)

3. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับส่วนประกอบของวงกลม โดยครูแสดงภาพของวงกลมในโปรแกรม PowerPoint แล้วให้นักเรียนช่วยกันบอกและอธิบายส่วนประกอบของวงกลม ดังนี้

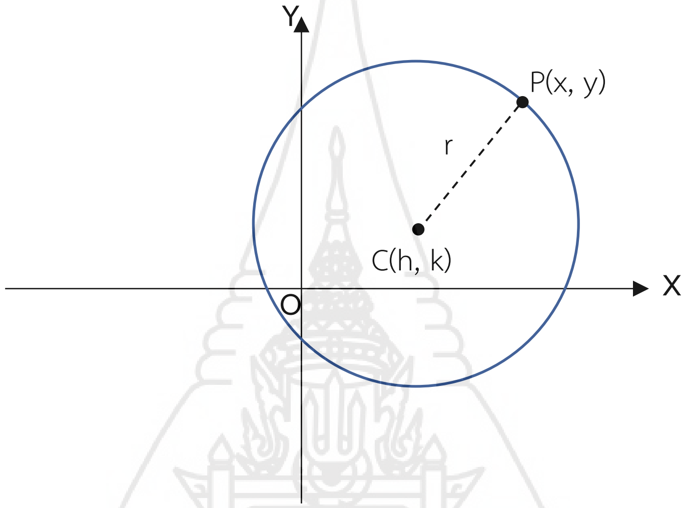


(แนวการตอบ จุดศูนย์กลาง (O) เป็นจุดที่อยู่ตรงกลางของวงกลม, เส้นรอบวง คือ เส้นโค้งที่เป็นแนวของทั้งหมดของวงกลม, รัศมี ($\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$) คือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมกับจุดหนึ่งบนเส้นรอบวง, เส้นผ่านศูนย์กลาง ($\overline{AB}$) คือ เส้นที่ลากจากเส้นรอบวงด้านหนึ่งผ่านจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวงอีกด้านหนึ่งของวงกลม ซึ่งมีความยาวเป็น 2 เท่าของรัศมี)

– สอนเนื้อหาใหม่

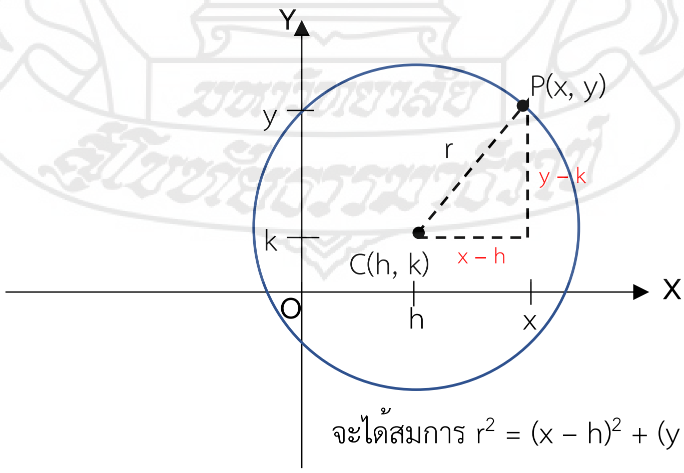
4. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับบทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงกลม ดังนี้ วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย เรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม

5. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย โดยใช้รูปภาพประกอบ ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้



จากรูป วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h, k) รัศมียาว r หน่วย และ P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม สามารถหาสมการที่มีกราฟเป็นวงกลมได้ ดังนี้

<u>วิธีที่ 1</u> หาโดยให้ความรู้เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้



จะได้สมการ $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

<u>วิธีที่ 2</u> หาโดยให้ความรู้เรื่อง ระยะทางระหว่างจุดสองจุด โดยหาระยะทางระหว่างจุด C(h, k) และ P(x, y) ซึ่งเท่ากับ r หน่วย จะได้ $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

6. ครูยกตัวอย่างการหาสมการวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมที่มีรัศมียาว 5 หน่วย จากจุดศูนย์กลางที่นักเรียนกำหนดเอง

วิธีทำ จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

สามารถเขียนสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน แต่รัศมีของวงกลมยาว 5 หน่วย ได้หลากหลายสมการ เช่น

1) ให้จุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) อยู่ที่จุด (–4, 3)

แทน r, h และ k ด้วย 5, –4 และ 3 ตามลำดับ

จะได้ $(x - (-4))^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

2) ให้จุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) อยู่ที่จุด (2, –7)

แทน r, h และ k ด้วย 5, 2 และ –7 ตามลำดับ

จะได้ $(x - 2)^2 + (y - (-7))^2 = 5^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x - 2)^2 + (y + 7)^2 = 25$

3) ให้จุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) อยู่ที่จุด (1, 3)

แทน r, h และ k ด้วย 5, 1 และ 3 ตามลำดับ

จะได้ $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$

7. ครูยกตัวอย่างการหาจุดศูนย์กลาง ความยาวรัศมี และการเขียนกราฟของวงกลมจากสมการในรูปแบบมาตรฐานของวงกลม ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลมที่มีสมการเป็น $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงกลม และหาพิกัดของ (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลมมา 3 พิกัด

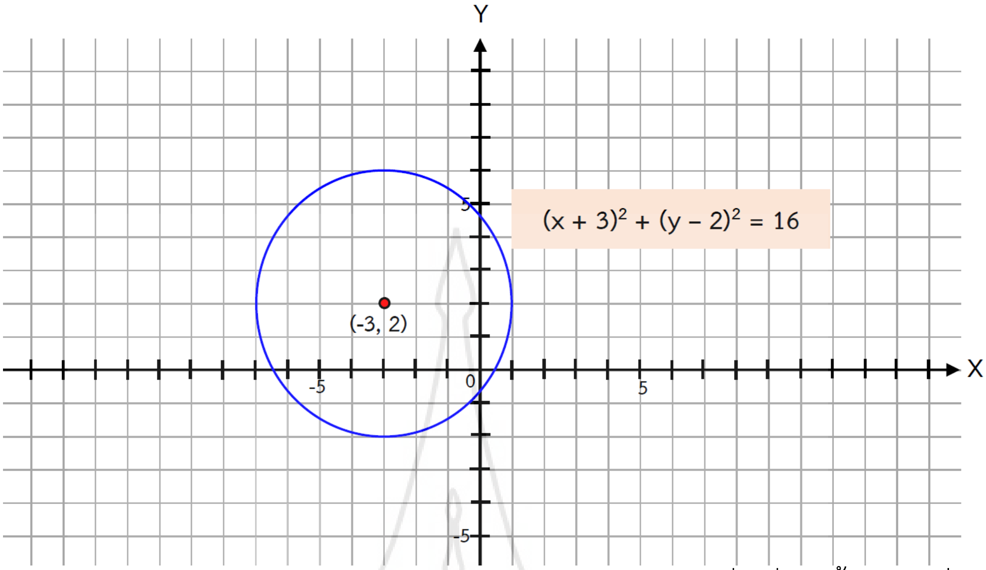
วิธีทำ จาก $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

จะได้ $(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = 4^2$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ จะได้ h = –3, k = 2 และ r = 4

ดังนั้น วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–3, 2) และรัศมียาว 4 หน่วย

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



8. จากกราฟของวงกลม $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ ในตัวอย่างที่ 2 ให้นักเรียนช่วยกันหาพิกัดของ (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม

(แนวการตอบ พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม ได้แก่

1) พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม คือ (1, 2) เพราะเมื่อแทน x = 1 และ y = 2 ในสมการ $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ ทำให้สมการเป็นจริง

2) พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม คือ (–3, –2) เพราะจากกราฟของวงกลม พิกัด (–3, –2) อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม

3) พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม คือ (–7, 2) เพราะเมื่อแทน x = –7 และ y = 2 ในสมการ $((-7) + 3)^2 + (2 - 2)^2 = 16$ ทำให้สมการเป็นจริง

9. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่านักเรียนคิดว่าสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0) และรัศมียาว r หน่วยเป็นอย่างไร

(แนวการตอบ สมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$ จะได้ $x^2 + y^2 = r^2$)

10. ครูแจกกระดาษให้นักเรียนคนละ 1 แผ่น แล้วแสดงคำถามปลายเปิด ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้ “ให้นักเรียนเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีรัศมียาว 6 หน่วย คนละ 1 สมการ โดยให้นักเรียนกำหนดจุดศูนย์กลางของวงกลมด้วยตนเอง” เมื่อเขียนเสร็จแล้วให้นักเรียนออกมานำเสนอจุดศูนย์กลางของวงกลม และสมการรูปมาตรฐานของวงกลมหน้าชั้นเรียน

– สรุปบทเรียน

11. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่า “ในวันนี้นักเรียนได้เรียนรู้อะไรบ้างเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของวงกลม” แล้วให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็น จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของวงกลม

(แนวการตอบ ได้เรียนรู้เกี่ยวกับการหาจุดศูนย์กลางของวงกลม รัศมีของวงกลม จากสมการรูปมาตรฐานของวงกลม ได้เรียนรู้วิธีการเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ซึ่งในการเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงกลมจะต้องทราบจุดศูนย์กลาง และความยาวรัศมีของวงกลม และได้เรียนรู้วิธีการเขียนกราฟของวงกลมจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลม)

ขั้นที่ 2 ขั้นทำงานกลุ่มร่วมกัน

12. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มโดยคละความสามารถตามที่ครูแบ่งให้ ครูแจกใบความรู้และใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม ให้กับนักเรียน แล้วให้นักเรียนช่วยกันทำงานใบกิจกรรมเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ โดยให้นักเรียนปรึกษากันและช่วยเหลือกันภายในกลุ่ม และให้นักเรียนที่เข้าใจในเนื้อหาแล้วในแต่ละกลุ่มช่วยอธิบายและทบทวนความรู้ให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจในเนื้อหา เพื่อให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มเข้าใจเนื้อหา ซึ่งครูจะคอยดูแลและให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนสงสัยหรือต้องการความช่วยเหลือ

13. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม โดยให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อที่ผิดของตนเอง หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

ขั้นที่ 3 ขั้นการทดสอบย่อยรายบุคคล

14. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยรายบุคคลครั้งที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม โดยในขั้นนี้นักเรียนจะไม่สามารถช่วยเหลือกันหรือปรึกษากันได้ นักเรียนทุกคนจะต้องตั้งใจทำแบบทดสอบ เพราะคะแนนของนักเรียนแต่ละคนจะมีผลต่อคะแนนของกลุ่ม

15. เมื่อนักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ โดยครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยไปพร้อมกัน หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

16. เมื่อตรวจข้อสอบเสร็จให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง แล้วรวมคะแนนพร้อมทั้งลงชื่อกำกับว่าใครเป็นคนตรวจ จากนั้นให้นักเรียนส่งแบบทดสอบคืนให้กับเพื่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มและให้รางวัลกลุ่ม

17. ครูชี้แจงกับนักเรียนว่าในครั้งแรกจะยังไม่มีการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการ ทุกคนจะเก็บคะแนนทดสอบย่อยครั้งที่ 1 ไว้เป็นคะแนนพื้นฐานก่อน เมื่อมีการทดสอบย่อยในครั้งที่ 2 จึงจะนำคะแนนในครั้งที่ 2 ไปลบคะแนนพื้นฐานในครั้งที่ 1 แล้วนำไปคำนวณหาคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน และนำคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนไปคิดเป็นคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม และมอบรางวัลให้กับกลุ่มที่ได้คะแนนอยู่ใน 5 อันดับแรก

สื่อ อุปกรณ์การเรียนรู้ และแหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม
2. ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม

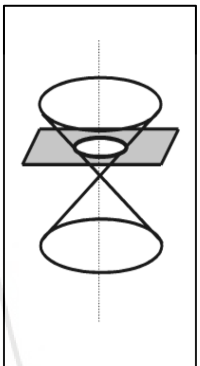
การวัดและประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
นักเรียนสามารถ 1. หาจุดศูนย์กลาง และความยาวรัศมีจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่กำหนดได้ 2. เขียนกราฟของวงกลมจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่กำหนดได้ 3. เขียนสมการวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้	- การตรวจใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม - สอบย่อยรายบุคคล - สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	- ใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม - แบบทดสอบย่อยรายบุคคล เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม - แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	นักเรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไป

ใบความรู้ที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม

วงกลม

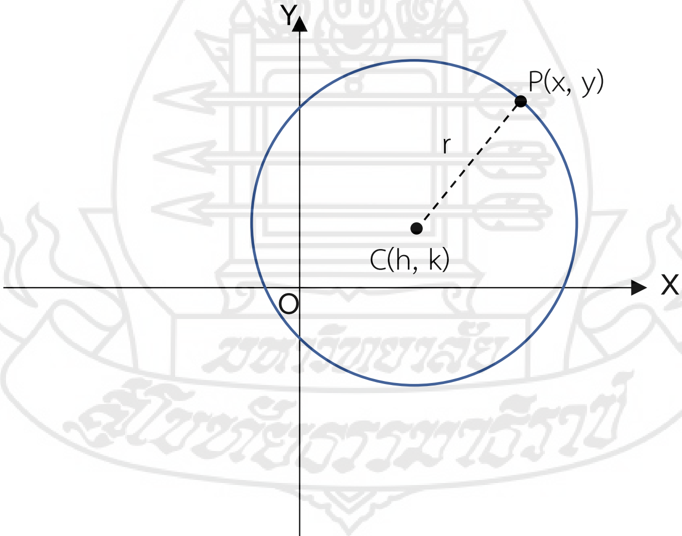
วงกลมเป็นภาคตัดกรวยที่เกิดจากการใช้ระนาบตัดกรวยข้างเดียว โดยให้ระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวย



วงกลม

บทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงกลม

วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย เรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม



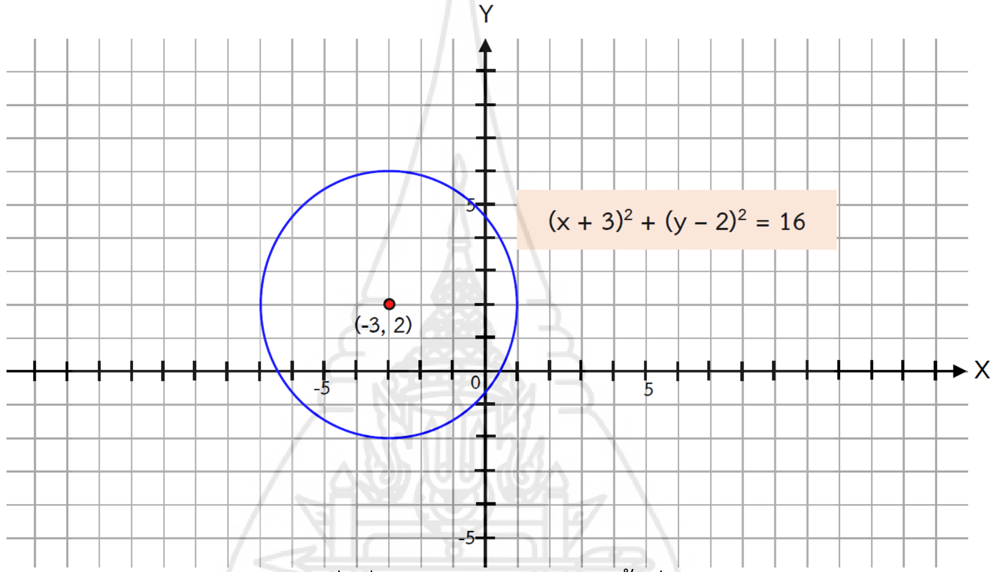
สมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลมที่มีสมการเป็น $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงกลม และหาพิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม

<u>วิธีทำ</u> จาก $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ จะได้ $(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = 4^2$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ จะได้ $h = -3$, $k = 2$ และ $r = 4$

ดังนั้น วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–3, 2) และรัศมียาว 4 หน่วย และเขียนวงกลมได้ดังนี้



หาพิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม ได้แก่

1) พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม คือ (1, 2) เพราะเมื่อแทน $x = 1$ และ $y = 2$ ในสมการ $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ ทำให้สมการเป็นจริง

2) พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม คือ (–3, –2) เพราะจากกราฟของวงกลม พิกัด (–3, –2) อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม

3) พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม คือ (–7, 2) เพราะเมื่อแทน $x = -7$ และ $y = 2$ ในสมการ $((-7) + 3)^2 + (2 - 2)^2 = 16$ ทำให้สมการเป็นจริง

ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม และหาจุดศูนย์กลางของวงกลมที่มีรัศมียาว 5 หน่วย จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

วิธีทำ จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

สามารถเขียนสมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางต่างกัน แต่รัศมีของวงกลมยาว 5 หน่วย ได้หลากหลายสมการ เช่น

1) ให้จุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) อยู่ที่จุด (–4, 3)

แทน r, h และ k ด้วย 5, –4 และ 3 ตามลำดับ

จะได้ $(x-(-4))^2 + (y-3)^2 = 5^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x+4)^2 + (y-3)^2 = 25$

2) ให้จุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) อยู่ที่จุด (2, –7)

แทน r, h และ k ด้วย 5, 2 และ –7 ตามลำดับ

จะได้ $(x-2)^2 + (y-(-7))^2 = 5^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x-2)^2 + (y+7)^2 = 25$

3) ให้จุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) อยู่ที่จุด (1, 3)

แทน r, h และ k ด้วย 5, 1 และ 3 ตามลำดับ

จะได้ $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 5^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (2, -1) และผ่านจุด (-3, 4)

วิธีทำ หาความยาวรัศมีของวงกลม

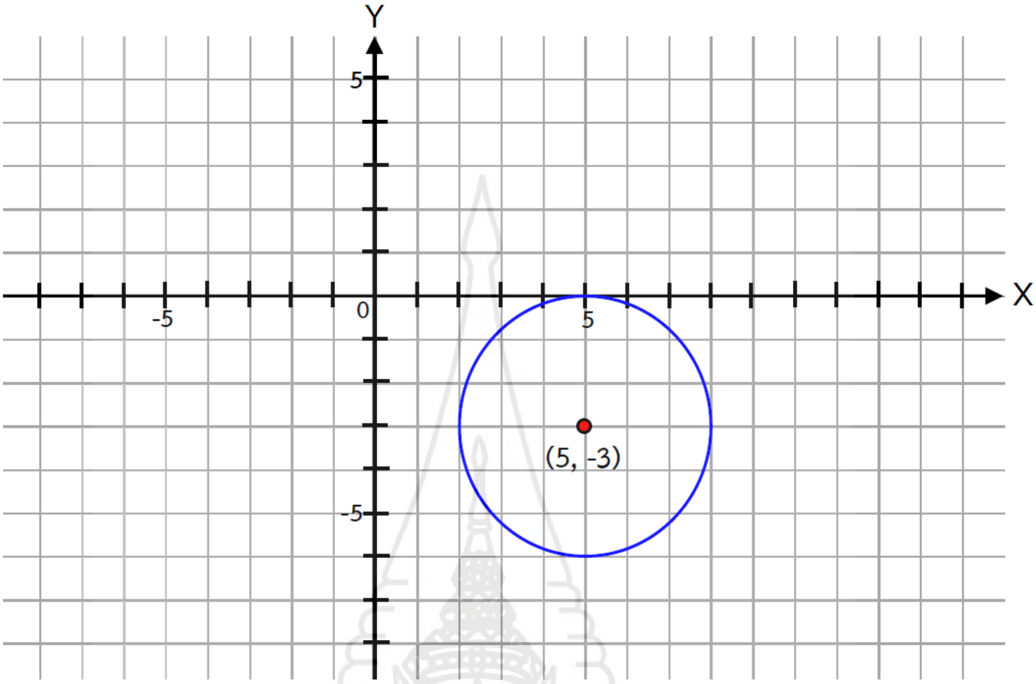
เนื่องจากวงกลมผ่านจุด (-3, 4) จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุด (2, -1) และ (-3, 4) คือความยาวของรัศมีของวงกลม

จะได้ $r = \sqrt{(2-(-3))^2 + ((-1)-4)^2} = \sqrt{50}$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 50$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงหาสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (5, -3) และสัมผัสกับแกน X

<u>วิธีทำ</u>



จากภาพวงกลมสัมผัสกับแกน X จะได้รัศมีของวงกลมยาว 3 หน่วย

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

แทน r, h และ k ด้วย 3, 5 และ –3 ตามลำดับ จะได้ $(x - 5)^2 + (y - (-3))^2 = 3^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x - 5)^2 + (y + 3)^2 = 9$

ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม

1. จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลมจากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ ที่นักเรียนสร้างขึ้นพร้อมทั้งเขียนวงกลม

<u>วิธีทำ</u> สมการ คือ..

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงกลมได้ดังนี้..

จุดศูนย์กลางอยู่ที่.. รัศมียาว......................หน่วย

เขียนวงกลม ได้ดังนี้

2) จงหาพิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม $(x - 1)^2 + y^2 = 25$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2. จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, -4) และรัศมียาว 4 หน่วย

----

2) วงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 2

----

3. ให้นักเรียนกำหนดจุด A และจุด B ซึ่งเป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม พร้อมทั้งเขียนสมการวงกลม และเขียนกราฟของวงกลม

1) จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

----

2) แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการหาสมการของวงกลม

----

3) แสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม

----

4) เขียนวงกลมได้ดังนี้

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม

จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางคือ (-1, -2) และ (5, -10) พร้อมทั้งเขียนวงกลม

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนวงกลมตามเงื่อนไขของโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรแทนจุดศูนย์กลางของวงกลม และความยาวรัศมีของวงกลม

....

....

....

....

....

....

....

2. จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. เขียนกราฟของวงกลมได้ดังนี้

เฉลย ใบกิจกรรมที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม

1. จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลมจากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ ที่นักเรียนสร้างขึ้นพร้อมทั้งเขียนวงกลม

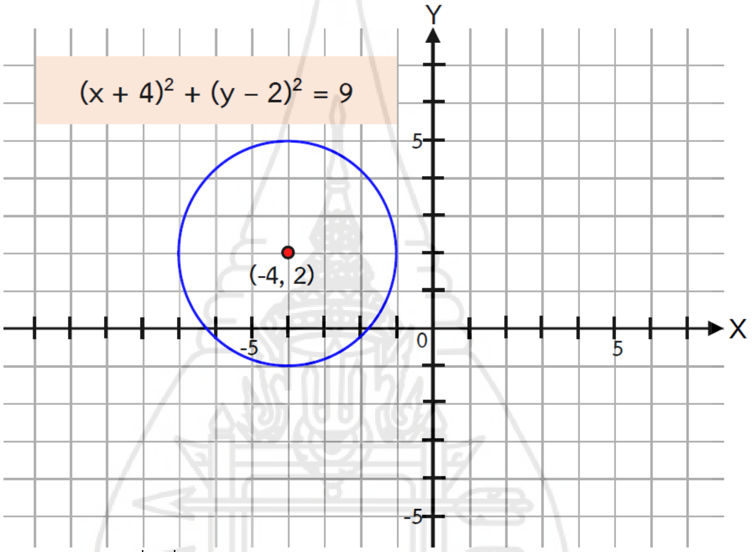
<u>แนวการตอบ</u>

<u>วิธีทำ</u> สมการ คือ $(x+4)^2+(y-2)^2=9$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงกลมได้ดังนี้ $(x-(-4))^2+(y-2)^2=3^2$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–4, 2) รัศมียาว 3 หน่วย

เขียนวงกลม ได้ดังนี้



2) จงหาพิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม $(x-1)^2+y^2=25$

<u>แนวการตอบ</u>

พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม ได้แก่

1) พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม คือ (1, 5) เพราะเมื่อแทน $x = 1$ และ $y = 5$ ในสมการ $(1-1)^2+5^2=25$ ทำให้สมการเป็นจริง

2) พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม คือ (5, –3) เพราะเมื่อแทน $x = 5$ และ $y = -3$ ในสมการ $(5-1)^2+(-3)^2=25$ ทำให้สมการเป็นจริง

3) พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม คือ (–2, –4) เพราะเมื่อแทน $x = -2$ และ $y = -4$ ในสมการ $(-2-1)^2+(-4)^2=25$ ทำให้สมการเป็นจริง

4) พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของวงกลม คือ (6, 0) เพราะเมื่อแทน $x = 6$ และ $y = 0$ ในสมการ $(6-1)^2+(0)^2=25$ ทำให้สมการเป็นจริง

2. จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, -4) และรัศมียาว 4 หน่วย

<u>ตอบ</u> จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

แทน r, h และ k ด้วย 4, 3 และ –4 ตามลำดับ จะได้ $(x - 3)^2 + (y - (-4))^2 = 4^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$

2) วงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 2

<u>แนวการตอบ</u> วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-4, 3) รัศมียาว 3 หน่วย

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

แทน r, h และ k ด้วย 3, -4 และ 3 ตามลำดับ จะได้ $(x - (-4))^2 + (y - 3)^2 = 3^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 9$

3. กำหนดให้จุด A และจุด B เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม ให้นักเรียนหาจุด A และจุด B ที่ทำให้จุดทั้งสองเป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม แล้วเขียนสมการวงกลม และเขียนกราฟของวงกลม

<u>แนวทางการตอบ</u>

1) จุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

กำหนดจุด A(0, 1) และจุด B(4, -3) เป็นจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม

2) แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ใช้ในการหาสมการของวงกลม

- หาจุดศูนย์กลางของวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่องจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง โดยหาจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB โดยกำหนดให้จุด (h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
- หาความยาวรัศมีของวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดสองจุด โดยหาระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงกลมไปยังจุด A หรือจุด B โดยกำหนดให้ r แทนรัศมีของวงกลม

3) แสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม

- หาจุดศูนย์กลางของวงกลม จะได้ $h = \frac{0 + 4}{2} = 2$ และ $k = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$

จะได้จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด (2, -1)

- หาความยาวรัศมีของวงกลม โดยหาระยะทางจากจุด (2, -1) ไปยังจุด (0, 1)

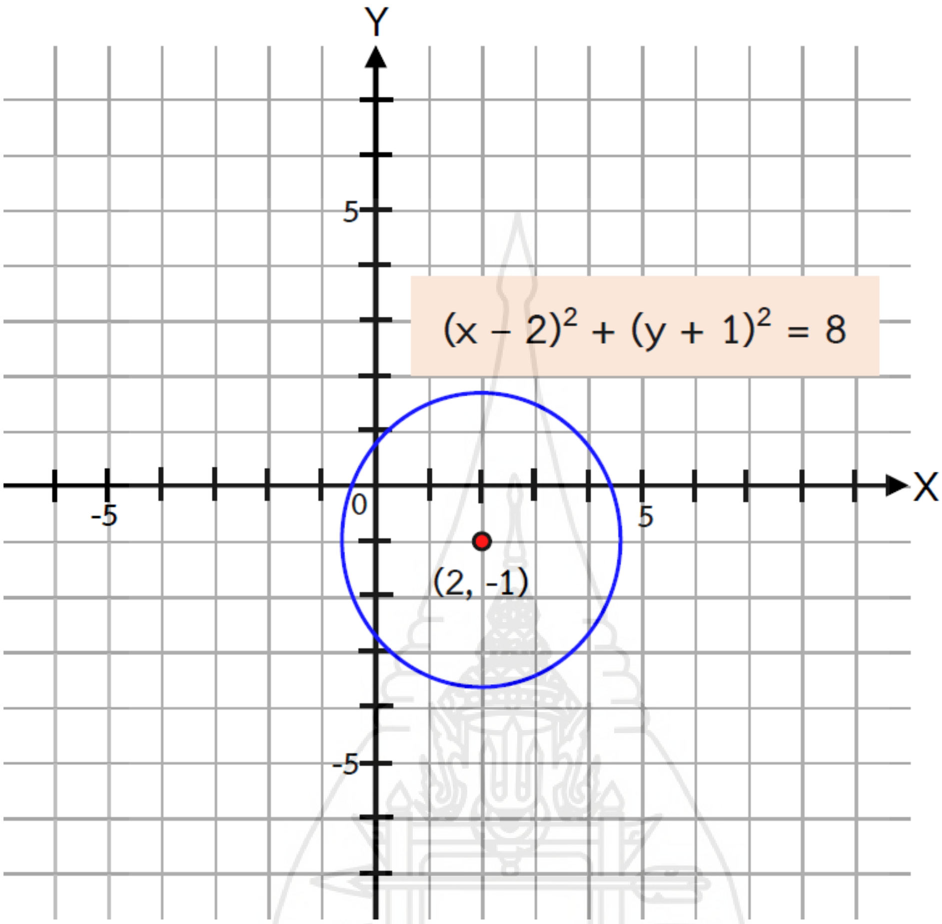
จะได้ $r = \sqrt{(2 - 0)^2 + (-1 - 1)^2} = \sqrt{8}$ หน่วย

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

แทน r, h และ k ด้วย $\sqrt{8}$, 2 และ -1 ตามลำดับ จะได้ $(x - 2)^2 + (y - (-1))^2 = (\sqrt{8})^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 8$

4) เขียนวงกลมได้ดังนี้



เฉลย แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม

จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางคือ (-1, -2) และ (5, -10) พร้อมทั้งเขียนวงกลม

<u>แนวการตอบ</u>

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนวงกลมตามเงื่อนไขของโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรแทนจุดศูนย์กลางของวงกลม และความยาวรัศมีของวงกลม

- หาจุดศูนย์กลางของวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่องจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง โดยหาจุดกึ่งกลางของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม โดยกำหนดให้จุด (h, k) เป็นจุดศูนย์กลางของวงกลม
- หาความยาวรัศมีของวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดสองจุด โดยหาระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงกลมไปยังจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง (-1, -2) หรือ (5, -10)

โดยกำหนดให้ r แทนรัศมีของวงกลม

2. จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

- หาจุดศูนย์กลางของวงกลม จะได้ $h = \frac{-1-5}{2} = -3$ และ $k = \frac{-2-10}{2} = -6$

จะได้จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด (-3, -6)

- หาความยาวรัศมีของวงกลม โดยหาระยะทางระหว่างจุด (-3, -6) และ (-1, -2)

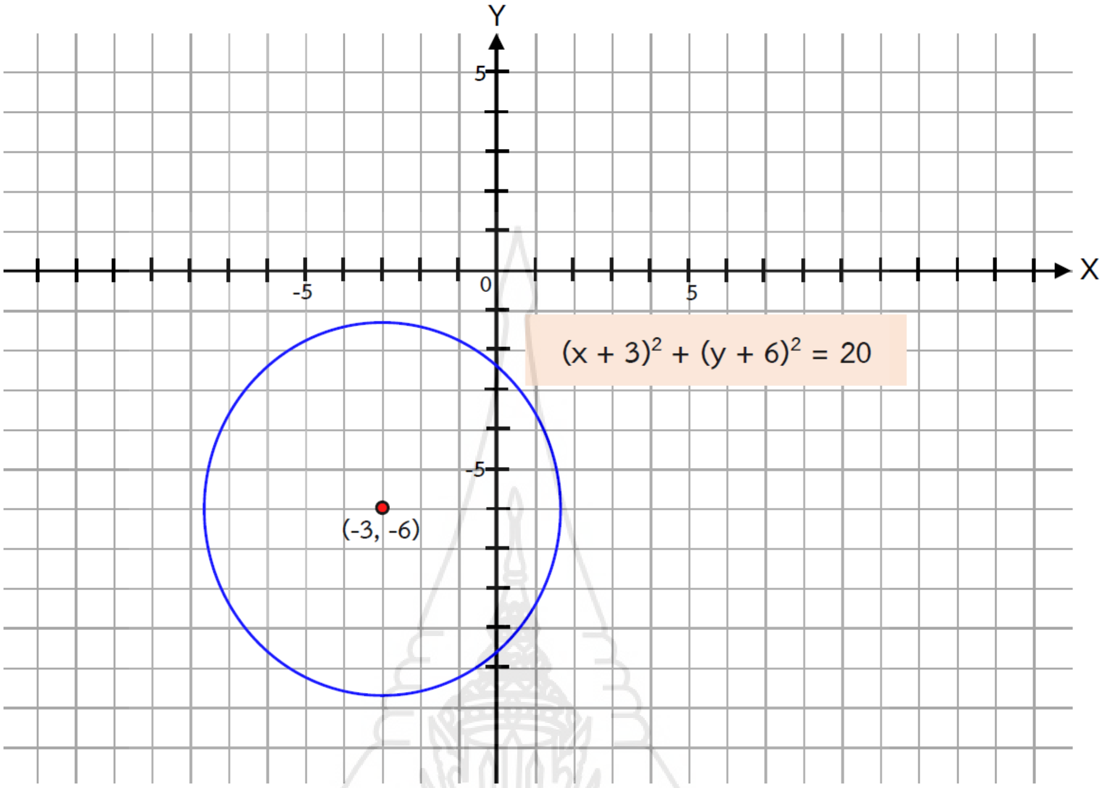
จะได้ $r = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (-6-(-2))^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$ หน่วย

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

แทน r, h และ k ด้วย $\sqrt{20}$, -3 และ -6 ตามลำดับ จะได้ $(x-(-3))^2 + (y-(-6))^2 = (\sqrt{20})^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x+3)^2 + (y+6)^2 = 20$

3. เขียนกราฟของวงกลมได้ดังนี้



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 2

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย จำนวน 18 ชั่วโมง

เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม เวลา 1 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

การเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม สามารถทำได้โดยจัดกลุ่มของพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y แล้วทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. เขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมได้
2. เขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมได้

สาระการเรียนรู้

1. การเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม
2. การเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน

- แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ และทบทวนความรู้เดิม

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์ โดยให้นักเรียนช่วยกันบอกสูตรการแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

(แนวการตอบ $A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ หรือ $(\text{หน้า})^2 + 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})^2$

$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$ หรือ $(\text{หน้า})^2 - 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} - \text{หลัง}^2)$)

จากนั้นทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเรื่องการเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ โดยให้นักเรียนแต่ละคนเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมที่มีรัศมียาว 8 หน่วย คนละ 1 สมการ จากนั้นครูสุ่มตัวแทนนักเรียนออกมานำเสนอสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมที่นักเรียนสร้างขึ้น โดยให้นักเรียนนำเสนอสมการที่สร้างขึ้น พร้อมทั้งบอกจุดศูนย์กลางของวงกลมที่สร้างขึ้นและความยาวรัศมีของวงกลมที่นักเรียนสร้างขึ้น

(แนวการตอบ

1) สมการ $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 64$ เป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(-2, 3)$ และรัศมีของวงกลมยาว 8 หน่วย

2) สมการ $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 64$ เป็นสมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(4, 1)$ และรัศมีของวงกลมยาว 8 หน่วย)

– สอนเนื้อหาใหม่

3. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับที่มาของรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม ดังนี้

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

ให้ $a = -2h$, $b = -2k$ และ $c = h^2 + k^2 - r^2$ จะได้ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ดังนั้น รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

4. ครูอธิบายตัวอย่างการเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบทั่วไป ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงเขียนสมการวงกลมในรูปแบบทั่วไปที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ในจตุภาคที่ 2 และรัศมีของวงกลมยาว 5 หน่วย

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากโจทย์กำหนดให้จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 2 และรัศมีของวงกลมยาว 5 หน่วย

ให้จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด $(-5, 3)$

จะได้ รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมวงกลม คือ $(x - (-5))^2 + (y - 3)^2 = (5)^2$

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$$

ดังนั้น รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมนี้ คือ $(x^2 + 2(x)(5) + 5^2) + (y^2 - 2(y)(3) + 3^2) = 25$

$$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 6y + 9) - 25 = 0$$

$$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 9 = 0$$

5. ครูให้นักเรียนนำสมการที่นักเรียนแต่ละคนสร้างขึ้นจากกิจกรรมขั้นทบทวนความรู้เดิมมาเขียนเป็นรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม จากนั้นครูสุ่มตัวแทนนักเรียนออกมานำเสนอสมการรูปแบบทั่วไปของตนเองหน้าชั้นเรียน

6. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับการเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม ดังนี้

"การเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม สามารถทำได้โดยจัดกลุ่มของพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y แล้วทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์"

7. ครูยกตัวอย่างการเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงแสดงว่าสมการ $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ เป็นสมการวงกลม แล้วหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

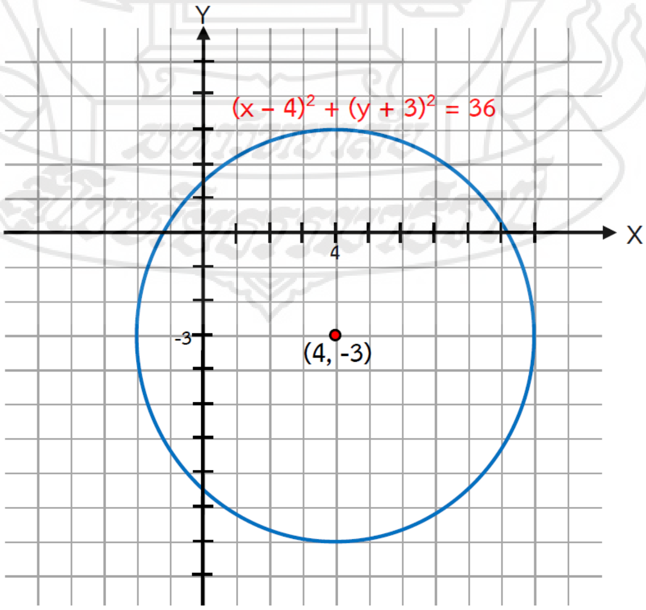
<u>วิธีทำ</u> เขียนสมการที่กำหนดให้ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม โดยจัดกลุ่มของพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y แล้วทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ (ทำให้ $x^2 - 8x$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ และทำให้ $y^2 + 6y$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์)

$$
\begin{aligned}
(x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) &= 11 \\
(x^2 - 2(x)(4) + 4^2) + (y^2 + 2(y)(3) + 3^2) &= 11 + 4^2 + 3^2 \\
(x - 4)^2 + (y + 3)^2 &= 11 + 16 + 9 \\
(x - 4)^2 + (y + 3)^2 &= 36
\end{aligned}
$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ $h = 4$, $k = -3$ และ $r = 6$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมที่มี $(4, -3)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาว 6 หน่วย และเขียนวงกลมได้ดังนี้



8. ครูตั้งคำถามเพื่อให้นักเรียนร่วมกันแสดงความคิดเห็นว่า จากตัวอย่างที่ 7 ถ้าต้องการเปลี่ยนให้วงกลมที่มีสมการรูปทั่วไป $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ในจตุภาคที่ 1, จตุภาคที่ 2, และจตุภาคที่ 3 นักเรียนคิดว่าสัมประสิทธิ์ของ x และ y เป็นจำนวนใดได้บ้าง พร้อมทั้งบอกสมการรูปทั่วไปของวงกลมที่ได้ และบอกจุดศูนย์กลางของวงกลมว่าอยู่ที่พิกัดใด

(แนวการตอบ

1) ให้สัมประสิทธิ์ของ x คือ 6 และสัมประสิทธิ์ของ y คือ –4 จะได้สมการรูปทั่วไป คือ $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 11 = 0$ จะได้ จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (–3, 2) อยู่ในจตุภาคที่ 2

2) ให้สัมประสิทธิ์ของ x คือ 5 และสัมประสิทธิ์ของ y คือ 8 จะได้สมการรูปทั่วไป คือ $x^2 + y^2 + 5x + 8y - 11 = 0$ จะได้ จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (–2.5, –4) อยู่ในจตุภาคที่ 3

3) ให้สัมประสิทธิ์ของ x คือ –2 และสัมประสิทธิ์ของ y คือ –4 จะได้สมการรูปทั่วไป คือ $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$ จะได้ จุดศูนย์กลางของวงกลม คือ (1, 2) อยู่ในจตุภาคที่ 1)

9. ให้นักเรียนแต่ละคนนำรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมที่ตนเองสร้างขึ้นในขั้นทบทวนความรู้เดิมใส่ลงในกล่องสุ่ม แล้วให้นักเรียนแต่ละคนจับสลากสมการวงกลมเพื่อแลกสมการกับเพื่อนในชั้นเรียน แล้วเขียนรูปแบบทั่วไปที่ได้ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐาน และให้ตัวแทนนักเรียนนำเสนอสมการรูปแบบมาตรฐานที่เขียนได้ พร้อมทั้งร่วมกันอภิปรายเพื่อตรวจความถูกต้องร่วมกันในชั้นเรียน

– สรุปบทเรียน

10. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่า “ในวันนี้นักเรียนได้เรียนรู้อะไรบ้างเกี่ยวกับรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม” แล้วให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็น จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

(แนวการตอบ ได้เรียนรู้เกี่ยวกับการเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม และการเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม โดยการเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม สามารถทำได้โดยจัดกลุ่มของพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y แล้วทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์)

ขั้นที่ 2 ขั้นทำงานกลุ่มร่วมกัน

11. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มโดยคละความสามารถตามที่ครูแบ่งให้ ครูแจกใบความรู้และใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม ให้กับนักเรียน แล้วให้นักเรียนช่วยกันทำงานใบกิจกรรมเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ โดยให้นักเรียนปรึกษากันและช่วยเหลือกันภายในกลุ่ม และให้นักเรียนที่เข้าใจในเนื้อหาแล้วในแต่ละกลุ่มช่วยอธิบายและทบทวนความรู้ให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจในเนื้อหา เพื่อให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มเข้าใจเนื้อหา ซึ่งครูจะคอยดูแลและให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนสงสัยหรือต้องการความช่วยเหลือ

12. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบกิจกรรม เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม โดยให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อที่ผิดของตนเอง หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

ขั้นที่ 3 ขั้นการทดสอบย่อยรายบุคคล

13. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยรายบุคคลครั้งที่ 2 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม โดยในขั้นนี้นักเรียนจะไม่สามารถช่วยเหลือกันหรือปรึกษากันได้ นักเรียนทุกคนจะต้องตั้งใจทำแบบทดสอบ เพราะคะแนนของนักเรียนแต่ละคนจะมีผลต่อคะแนนของกลุ่ม

14. เมื่อนักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ โดยครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยไปพร้อมกัน หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

15. เมื่อตรวจข้อสอบเสร็จให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง แล้วรวมคะแนนพร้อมทั้งลงชื่อกำกับว่าใครเป็นคนตรวจ จากนั้นให้นักเรียนส่งแบบทดสอบคืนให้กับเพื่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มและให้รางวัลกลุ่ม

16. ให้นักเรียนแต่ละคนบอกคะแนนของตนเองที่ได้กับครู จากนั้นครูและนักเรียนทุกคนช่วยกันคำนวณหาคะแนนพัฒนาการ โดยนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบครั้งที่ 2 ไปลบคะแนนพื้นฐานในครั้งที่ 1 แล้วนำไปคำนวณหาคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน และคิดคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม และมอบรางวัลให้กับกลุ่มที่ได้คะแนนอยู่ใน 5 อันดับแรก

สื่อ อุปกรณ์การเรียนรู้ และแหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม
2. ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

การวัดและประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
นักเรียนสามารถ 1. เขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมได้ 2. เขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมได้	- การตรวจใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม - สอบย่อยรายบุคคล - สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	- ใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม - แบบทดสอบย่อยรายบุคคล เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม - แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	นักเรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไป

ใบความรู้ที่ 2 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

การแยกตัวประกอบของพหุนามดีกรีสองที่เป็นกำลังสองสมบูรณ์

$A^2 + 2AB + B^2 = (A + B)^2$ หรือ $(\text{หน้า})^2 + 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} + \text{หลัง})^2$

$A^2 - 2AB + B^2 = (A - B)^2$ หรือ $(\text{หน้า})^2 - 2(\text{หน้า})(\text{หลัง}) + (\text{หลัง})^2 = (\text{หน้า} - \text{หลัง})^2$

รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2 - r^2 = 0$$

$$x^2 + y^2 + (-2h)x + (-2k)y + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

ให้ $a = -2h$, $b = -2k$ และ $c = h^2 + k^2 - r^2$

จะได้ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

ดังนั้น รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

การเขียนรูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม สามารถทำได้โดยจัดกลุ่มของพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y แล้วทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงแสดงว่าสมการ $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 11 = 0$ เป็นสมการวงกลม แล้วหาจุดศูนย์กลางและความยาวรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

<u>วิธีทำ</u> เขียนสมการที่กำหนดให้ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม โดยจัดกลุ่มของพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y แล้วทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ (ทำให้ $x^2 - 8x$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์ และทำให้ $y^2 + 6y$ เป็นกำลังสองสมบูรณ์)

$$(x^2 - 8x) + (y^2 + 6y) = 11$$

$$(x^2 - 2(x)(4) + 4^2) + (y^2 + 2(y)(3) + 3^2) = 11 + 4^2 + 3^2$$

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 11 + 16 + 9$$

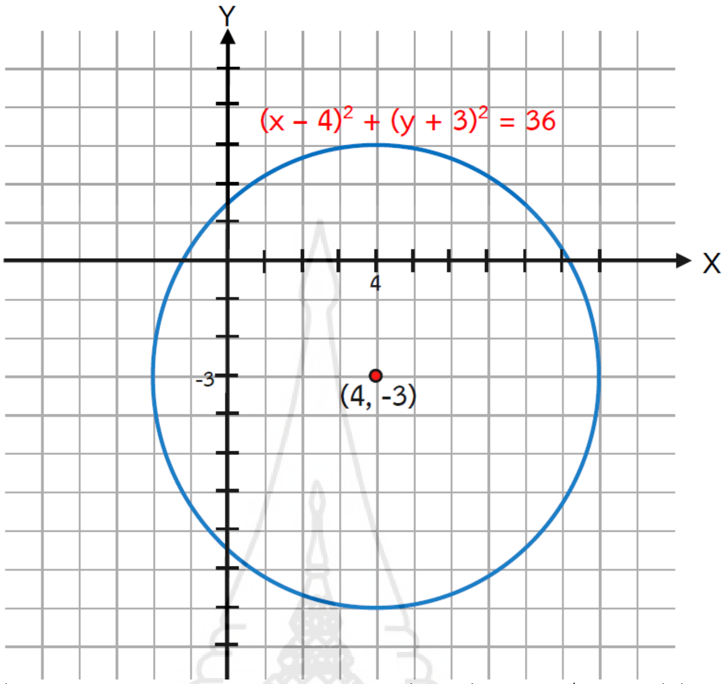
$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 36$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ $h = 4$, $k = -3$ และ $r = 6$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมที่มี $(4, -3)$ เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาว 6 หน่วย

และเขียนวงกลมได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 2 จงเขียนสมการวงกลมในรูปแบบทั่วไปที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–5, 3) และผ่านจุด (1, –1)

วิธีทำ เนื่องจากวงกลมผ่านจุด (1, –1) จะได้ว่า ระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลาง (–5, 3) และจุด (–1, –1) คือ ความยาวรัศมีของวงกลม

ดังนั้น $r = \sqrt{(-5-(-1))^2 + (3-1)^2}$

$= \sqrt{(-5+1)^2 + (2)^2}$

$= \sqrt{(-4)^2 + 4}$

$= \sqrt{16+4}$

$= \sqrt{20}$

รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมวงกลม คือ $(x-(-5))^2 + (y-3)^2 = (\sqrt{20})^2$

$(x+5)^2 + (y-3)^2 = 20$

ดังนั้น รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลมนี้ คือ $(x^2 + 2(x)(5) + 5^2) + (y^2 - 2(y)(3) + 3^2) = 20$

$(x^2 + 10x + 25) + (y^2 - 6y + 9) - 20 = 0$

$x^2 + 10x + 25 + y^2 - 6y + 9 - 20 = 0$

$x^2 + y^2 + 10x - 6y + 14 = 0$

ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

1. วงกลมวงหนึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางด้านหนึ่งอยู่ที่พิกัด (–5, 3) และอีกด้านอยู่ในจตุภาคที่ 1 ให้นักเรียนกำหนดจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 แล้วเขียนสมการวงกลมในรูปแบบทั่วไป

2. จงเขียนสมการวงกลมในรูปแบบทั่วไปที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ในจตุภาคที่ 2 และรัศมียาว 7 หน่วย

3. จงหา a และ b ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ x และ y ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นสมการรูปทั่วไปของวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลม

1) $x^2 + y^2 + ax + by + 5 = 0$ (จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 2)

....

....

....

....

....

....

2) $x^2 + y^2 + ax + by + 68 = 0$ (จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 4)

....

....

....

....

....

....

3) $x^2 + y^2 + ax + by - 27 = 0$ (จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 1)

....

....

....

....

....

....

4) $x^2 + y^2 + ax + by - 30 = 0$ (จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 3)

....

....

....

....

....

....

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 2 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

จงเขียนสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 3 = 0$ ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลางและความรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ

....

....

....

....

....

....

....

2. จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3. เขียนกราฟของวงกลมได้ดังนี้

เฉลย ใบกิจกรรมที่ 2 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

1. วงกลมวงหนึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางด้านหนึ่งอยู่ที่พิกัด (–5, 3) และอีกด้านอยู่ในจตุภาคที่ 1 ให้นักเรียนกำหนดจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 แล้วเขียนสมการวงกลมในรูปแบบทั่วไป

<u>แนวการตอบ</u> กำหนดจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางที่อยู่ในจตุภาคที่ 1 คือ พิกัด (1, 7)

ให้จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด (h, k) และรัศมีของวงกลมยาว r หน่วย

เนื่องจาก จุดศูนย์กลางของวงกลมเป็นจุดที่อยู่กึ่งกลางของเส้นผ่านศูนย์กลาง

จะได้ จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่พิกัด $h = \frac{-5+1}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ และ $k = \frac{3+7}{2} = \frac{10}{2} = 5$

หาความยาวรัศมีของวงกลมโดยหาระยะทางจากจุด (–2, 5) ไปยัง (–5, 3)

จะได้ $r = \sqrt{(-2-(-5))^2 + (5-3)^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม คือ $(x-(-2))^2 + (y-5)^2 = (\sqrt{13})^2$

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 = 13$$

จากสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม จะได้สมการรูปแบบทั่วไป คือ

$$(x^2 - 2(x)(2) + 2^2) + (y^2 - 2(y)(5) + 5^2) - 13 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 - 13 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 16 = 0$$

2. จงเขียนสมการวงกลมในรูปแบบทั่วไปที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ในจตุภาคที่ 2 และรัศมียาว 7 หน่วย

<u>แนวการตอบ</u>

<u>วิธีทำ</u> กำหนดให้จุดศูนย์กลางของวงกลมที่อยู่ในจตุภาคที่ 2 คือ (–3, 4)

จากโจทย์ รัศมีของวงกลมยาว 7 หน่วย

จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม คือ $(x-(-3))^2 + (y-4)^2 = 7^2$

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 49$$

ดังนั้น สมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม คือ

$$(x^2 + 2(x)(3) + 3^2) + (y^2 - 2(y)(4) + 4^2) - 49 = 0$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 - 49 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y - 24 = 0$$

3. จงหา a และ b ซึ่งเป็นสัมประสิทธิ์ของ x และ y ที่ทำให้สมการต่อไปนี้เป็นสมการรูปทั่วไปของวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลม

1) $x^2 + y^2 + ax + by + 5 = 0$ (จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 2)

<u>แนวการตอบ</u> ให้ $a = 10$, $b = -8$ จะได้ สมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + 10x - 8y + 5 = 0$

$$(x^2 + 10x) + (y^2 - 8y) = -5$$
$$(x^2 + 2(x)(5) + 5^2) + (y^2 - 2(y)(4) + 4^2) = -5 + 5^2 + 4^2$$
$$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = -5 + 25 + 16$$
$$(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 36$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม จะได้ $h = -5$, $k = 4$ และ $r = 6$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมที่มี $(-5, 4)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมียาว 6 หน่วย

2) $x^2 + y^2 + ax + by + 68 = 0$ (จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 4)

<u>แนวการตอบ</u> ให้ $a = -18$, $b = 12$ จะได้ สมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 - 18x + 12y + 68 = 0$

$$(x^2 - 18x) + (y^2 + 12y) = -68$$
$$(x^2 - 2(x)(9) + 9^2) + (y^2 + 2(y)(6) + 6^2) = -68 + 9^2 + 6^2$$
$$(x - 9)^2 + (y + 6)^2 = 49$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม จะได้ $h = 9$ และ $k = -6$ และ $r = 7$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมที่มี $(9, -6)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมียาว 7 หน่วย

3) $x^2 + y^2 + ax + by - 27 = 0$ (จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 1)

<u>แนวการตอบ</u> ให้ $a = -4$, $b = -2$ จะได้ สมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 27 = 0$

$$(x^2 - 4x) + (y^2 - 2y) = 27$$
$$(x^2 - 2(x)(2) + 2^2) + (y^2 - 2(y)(1) + 1^2) = 27 + 2^2 + 1^2$$
$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 32$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม จะได้ $h = 2$ และ $k = 1$ และ $r = \sqrt{32}$ หรือ $4\sqrt{2}$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมที่มี $(2, 1)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมียาว $4\sqrt{2}$ หน่วย

4) $x^2 + y^2 + ax + by - 30 = 0$ (จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ในจตุภาคที่ 3)

<u>แนวการตอบ</u> ให้ $a = 6$, $b = 10$ จะได้ สมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 30 = 0$

$$(x^2 + 6x) + (y^2 + 10y) = 30$$
$$(x^2 + 2(x)(3) + 3^2) + (y^2 + 2(y)(5) + 5^2) = 30 + 3^2 + 5^2$$
$$(x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 64$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม จะได้ $h = -3$ และ $k = -1$ และ $r = 8$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมที่มี $(-3, -5)$ เป็นจุดศูนย์กลาง และรัศมียาว 8 หน่วย

เฉลย แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 2 เรื่อง รูปแบบทั่วไปของสมการวงกลม

จงเขียนสมการวงกลม $x^2 + y^2 - 12x + 8y + 3 = 0$ ให้อยู่ในรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลางและความรัศมีของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟ

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ

<u>แนวการตอบ</u> จัดกลุ่มของพจน์ที่มีตัวแปร x และตัวแปร y แล้วทำให้เป็นกำลังสองสมบูรณ์ เทียบสมการรูปแบบมาตรฐานที่ได้กับสมการ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

2. จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

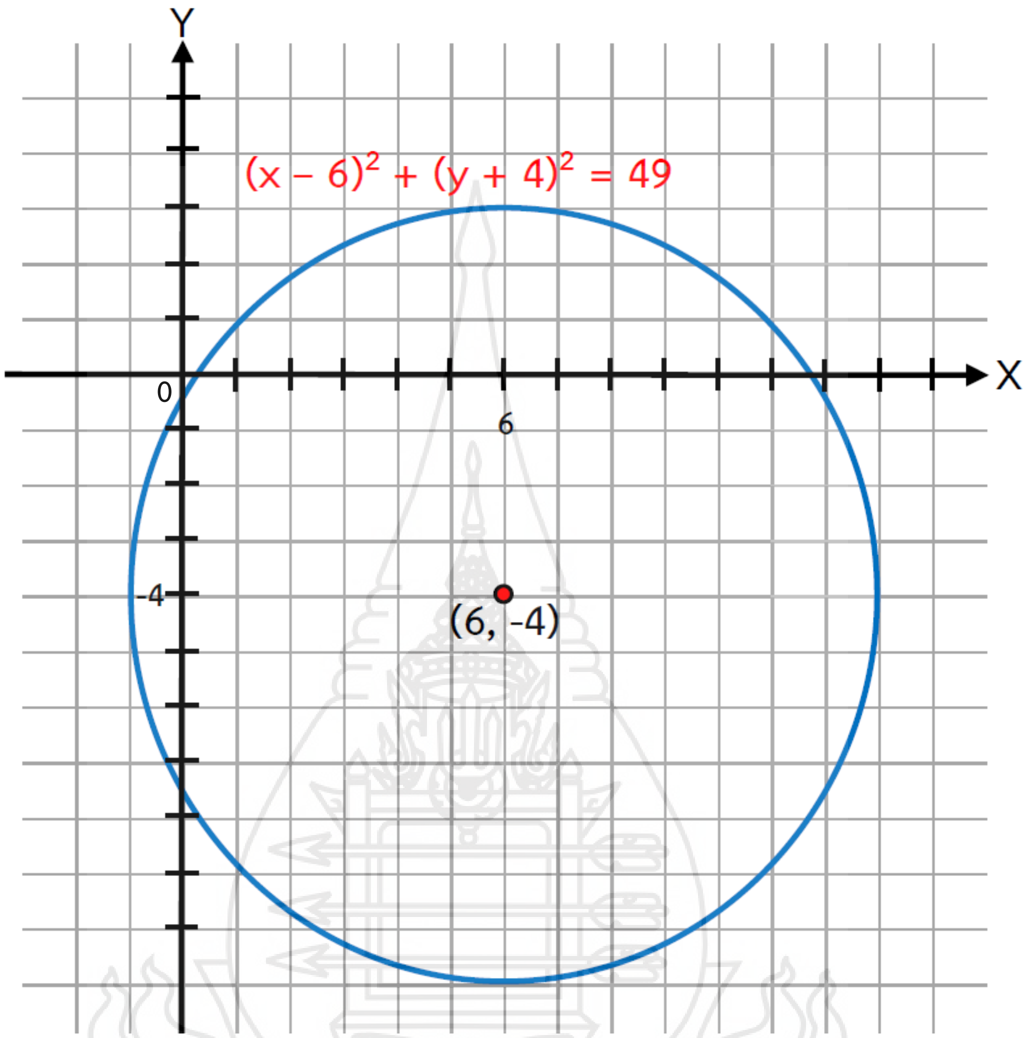
<u>วิธีทำ</u>

$$x^2 + y^2 - 12x + 8y + 3 = 0$$
$$(x^2 - 12x) + (y^2 + 8y) = -3$$
$$(x^2 - 2(x)(6) + 6^2) + (y^2 + 2(y)(4) + 4^2) = -3 + 6^2 + 4^2$$
$$(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = -3 + 36 + 16$$
$$(x - 6)^2 + (y + 4)^2 = 49$$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ จะได้ $h = 6, k = -4$ และ $r = 7$

ดังนั้น สมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมที่มี (6, −4) เป็นจุดศูนย์กลาง รัศมียาว 7 หน่วย

3. เขียนกราฟของวงกลมได้ดังนี้



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย จำนวน 18 ชั่วโมง

เรื่อง สมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X เวลา 1 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

วงรี (ellipse) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนั้นไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดว่า โฟกัส (focus) ของวงรี

สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโทของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่กำหนดได้
2. เขียนกราฟของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่กำหนดได้
3. เขียนสมการวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

สาระการเรียนรู้

1. บทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงรี
2. รูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X
3. การหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโทของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรี
4. การเขียนกราฟของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรี
5. เขียนสมการวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนดให้

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน

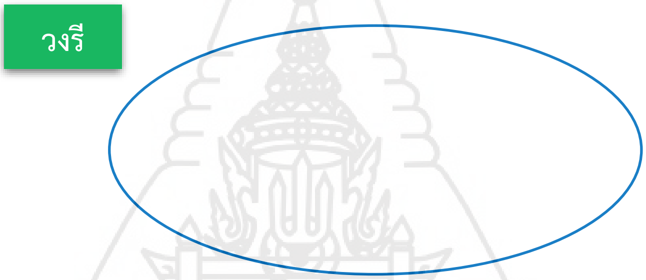
- แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ และทบทวนความรู้เดิม

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับการเกิดภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงรี โดยใช้คำถาม “ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงรี เกิดขึ้นได้อย่างไร”

(แนวการตอบ วงรี เป็นภาคตัดกรวยที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ที่ระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยแต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวยขนาดใหญ่กว่า α ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว)

3. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะของวงรี โดยครูแสดงภาพของวงรีในโปรแกรม PowerPoint แล้วให้นักเรียนช่วยกันบอกลักษณะของวงรี ดังนี้



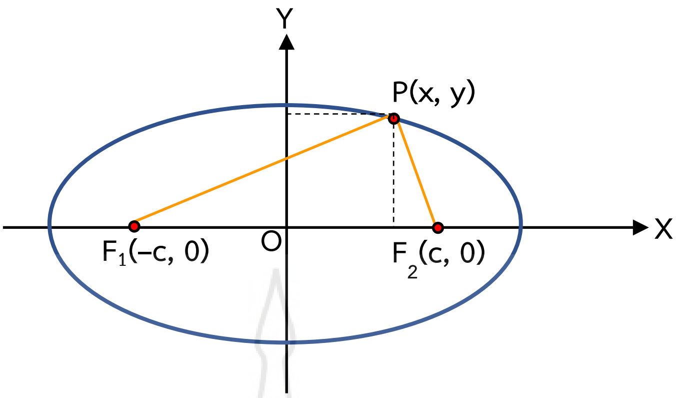
(แนวการตอบ วงรีเป็นเส้นโค้งที่มีลักษณะใกล้เคียงกับวงกลม ไม่มีด้าน ไม่มีมุม เส้นขอบของรูปมีลักษณะโค้ง แต่มีลักษณะยาวรีกว่าวงกลม)

– สอนเนื้อหาใหม่

4. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับบทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงรี ดังนี้ วงรี (ellipse) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนั้นไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดว่า โฟกัส (focus) ของวงรี

5. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของวงรี และส่วนต่าง ๆ ของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X โดยใช้รูปภาพประกอบ ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้

ในการหารูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี ทำได้โดยกำหนดให้โฟกัสอยู่บนแกน X ที่ $F_1(-c, 0)$ และ $F_2(c, 0)$ จุดกำเนิดอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัส ดังรูป



ให้ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีถึงโฟกัสทั้งสอง คือ 2a หน่วย โดยที่ $0 < c < a$ จะได้ว่า ถ้า P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนวงรีแล้ว

$$
\begin{aligned}
PF_1 + PF_2 &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\
(x-c)^2 + y^2 &= (2a)^2 - 2(2a)\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right) + \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\
x^2 - 2(x)(c) + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\
x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\
4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \\
a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a^2 + cx \\
\left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= (a^2 + cx)^2 \\
a^2((x+c)^2 + y^2) &= (a^2)^2 + 2(a^2)(cx) + (cx)^2 \\
a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\
a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\
a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + c^2x^2 \\
a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $0 < c < a$ จะได้ว่า $a^2 - c^2 > 0$

จะได้ว่า

$$\frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)} = \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

ให้ $b^2 = a^2 - c^2$ โดยที่ $b > 0$ เนื่องจาก $b^2 < a^2$ จะได้ว่า $b < 0$

จะได้สมการวงรีเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

ในการเขียนวงรี จะต้องหาระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y

ให้ $y = 0$ จะได้

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + 0 = 1$$

$$x^2 = a^2$$

จะได้ $x = a$ หรือ $x = -a$ ดังนั้น วงรีจะตัดแกน X ที่ $(-a, 0)$ และ $(a, 0)$ ซึ่งเรียกว่า จุดยอดของวงรี ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอด เรียกว่า แกนเอกของวงรี ความยาวของแกนเอกเท่ากับ 2a หน่วย จุดกึ่งกลางของแกนเอกเรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงรี

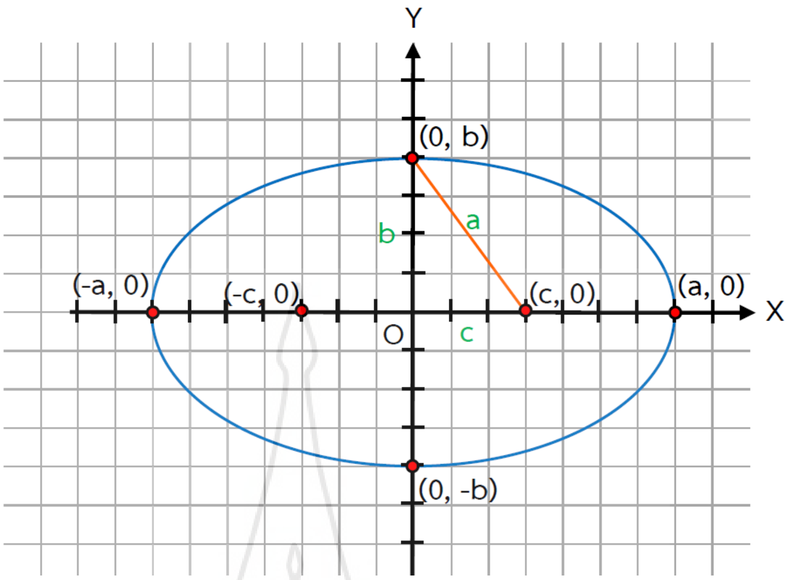
ให้ $x = 0$ จะได้

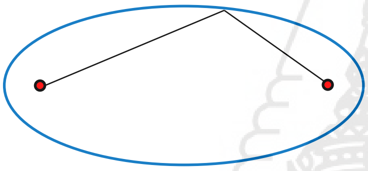
$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$0 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

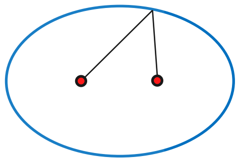
$$y^2 = b^2$$

จะได้ $y = b$ หรือ $y = -b$ ดังนั้น วงรีจะตัดแกน Y ที่ $(-b, 0)$ และ $(b, 0)$ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดทั้งสอง เรียกว่า แกนโทของวงรี จุด $(-b, 0)$ และ $(b, 0)$ เรียกว่า จุดปลายแกนโทของวงรี ความยาวของแกนโทเท่ากับ 2b หน่วย เนื่องจาก $2a > 2b$ จะได้ว่า แกนเอกยาวกว่าแกนโท





รูปที่ 1



รูปที่ 2

จากรูป ถ้าโฟกัสทั้งสองของวงรีอยู่ห่างกันมาก (2a มากกว่า 2c เพียงเล็กน้อย) วงรีจะมีรูปร่างเรียวยาว มีความรีมาก แต่ถ้าโฟกัสทั้งสองอยู่ใกล้กัน (2a มากกว่า 2c มาก) วงรีมีรูปร่างเกือบจะกลม มีความรีน้อย โดยทั่วไปจะใช้อัตราส่วนของ c ต่อ a วัดความรีของวงรี เรียกอัตราส่วนนี้ว่า ความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) แทนด้วย e ซึ่ง $e = \frac{c}{a}$ ซึ่งความเยื้องศูนย์กลางของวงรีมีค่าระหว่าง 0 และ 1 ($0 < e < 1$) ถ้า e มีค่าใกล้ 1 หรือ c มีค่าเกือบจะเท่ากับ a แล้ววงรีมีความรีมาก (มีรูปร่างเรียวยาว) แต่ถ้า e ค่าเข้าใกล้ 0 แล้ววงรีมีความรีน้อย (รูปร่างใกล้เคียงกับวงกลม)

6. ครูยกตัวอย่างการหาสมการวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X และโฟกัสอยู่ที่ (–5, 0), (5, 0)

<u>แนวการตอบ</u> จากเงื่อนไขที่กำหนดให้โฟกัสของวงรีอยู่ที่ (–5, 0), (5, 0) จะได้ว่า c = 5

และจะได้ว่า แกนเอกของวงรีจะต้องยาวมากกว่า 10 หน่วย

ดังนั้น กำหนดให้แกนเอกของวงรียาว 16 หน่วย

หา b^2 จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้

$5^2 = 8^2 - b^2$

$b^2 = 8^2 - 5^2$

$b^2 = 64 - 25$

$b^2 = 39$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1$

7. ครูยกตัวอย่างการหาโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และการเขียนกราฟของวงรีจากสมการในรูปแบบมาตรฐานของวงรี ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหา a และ b ที่ทำให้สมการ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เป็นสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X พร้อมทั้งหาโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และเขียนกราฟของวงรี

<u>แนวการตอบ</u> เนื่องจากวงรีมีแกนเอกอยู่บนแกน X จะต้องกำหนดให้ a > b

ให้ a = 5 และ b = 4 จะได้สมการวงรีที่สอดคล้องกับเงื่อนไข คือ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า $a^2 = 25$; a = 5 และ $b^2 = 16$; b = 4

จาก $c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 25 - 16$

$= 9$; c = 3

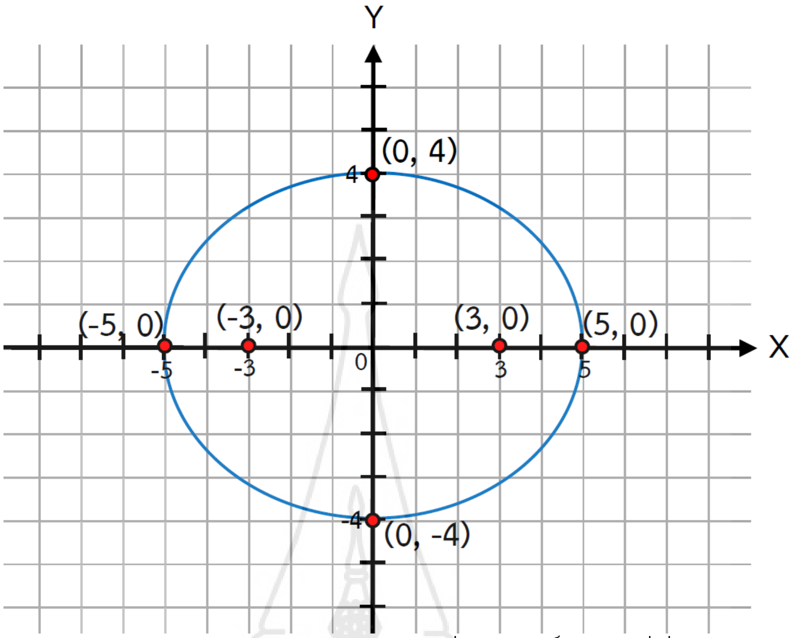
ดังนั้น โฟกัสของวงรี คือ (3, 0) และ (-3, 0)

จุดยอดหรือจุดปลายแกนเอกของวงรี คือ (5, 0) และ (-5, 0)

แกนเอกยาว 2(5) = 10 หน่วย

แกนโทยาว 2(4) = 8 หน่วย

เขียนวงรีได้ดังนี้



ตัวอย่างที่ 3 จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X และความเยื้องศูนย์กลางของวงรีเท่ากับ $\frac{4}{5}$

วิธีทำ เนื่องจาก $e = \frac{4}{5}$ จะได้ว่า $\frac{c}{a}$ เท่ากับอัตราส่วนต่าง ๆ เช่น $\frac{2}{2.5}, \frac{4}{5}, \frac{8}{10}, \frac{12}{15}$ เป็นต้น

ให้ $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$ จะได้ว่า $c = 4$ และ $a = 5$

หาค่าของ b โดยใช้สมการ $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้

$c^2 = a^2 - b^2$

$4^2 = 5^2 - b^2$

$16 = 25 - b^2$

$b^2 = 25 - 16$

$b^2 = 9$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

8. ครูแจกกระดาษให้นักเรียนคนละ 1 แผ่น แล้วแสดงคำถามปลายเปิด ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้ “ให้นักเรียนเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X และแกนโทยาว 10 หน่วย คนละ 1 สมการ” เมื่อเขียนเสร็จแล้วให้นักเรียนออกมานำเสนอจุดยอด และโฟกัสของวงรี และสมการรูปมาตรฐานของวงรีหน้าชั้นเรียน

– สรุปบทเรียน

9. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่า “ในวันนี้นักเรียนได้เรียนรู้อะไรบ้างเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของวงรี ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X” แล้วให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็น จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของวงรี

(แนวการตอบ ได้เรียนรู้เกี่ยวกับการหาโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท จากสมการรูปมาตรฐานของวงรี ได้เรียนรู้วิธีการเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ซึ่งในการเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงรีจะต้องทราบความยาวแกนเอก และความยาวแกนโท และได้เรียนรู้วิธีการเขียนกราฟของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรี)

ขั้นที่ 2 ขั้นทำงานกลุ่มร่วมกัน

10. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มโดยคละความสามารถตามที่ครูแบ่งให้ ครูแจกใบความรู้และใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X ให้กับนักเรียน แล้วให้นักเรียนช่วยกันทำงานใบกิจกรรมเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ โดยให้นักเรียนปรึกษากันและช่วยเหลือกันภายในกลุ่ม และให้นักเรียนที่เข้าใจในเนื้อหาแล้วในแต่ละกลุ่มช่วยอธิบายและทบทวนความรู้ให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจในเนื้อหา เพื่อให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มเข้าใจเนื้อหา ซึ่งครูจะคอยดูแลและให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนสงสัยหรือต้องการความช่วยเหลือ

11. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X โดยให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อที่ผิดของตนเอง หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

ขั้นที่ 3 ขั้นการทดสอบย่อยรายบุคคล

12. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยรายบุคคลครั้งที่ 4 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X โดยในขั้นนี้นักเรียนจะไม่สามารถช่วยเหลือกันหรือปรึกษากันได้ นักเรียนทุกคนจะต้องตั้งใจทำแบบทดสอบ เพราะคะแนนของนักเรียนแต่ละคนจะมีผลต่อคะแนนของกลุ่ม

13. เมื่อนักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ โดยครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยไปพร้อมกัน หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

14. เมื่อตรวจข้อสอบเสร็จให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง แล้วรวมคะแนนพร้อมทั้งลงชื่อกำกับว่าใครเป็นคนตรวจ จากนั้นให้นักเรียนส่งแบบทดสอบคืนให้กับเพื่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มและให้รางวัลกลุ่ม

15. ให้นักเรียนแต่ละคนบอกคะแนนของตนเองที่ได้กับครู จากนั้นครูและนักเรียนทุกคนช่วยกันคำนวณหาคะแนนพัฒนาการ โดยนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบครั้งที่ 4 ไปลบคะแนนพื้นฐานในครั้งที่ 3 แล้วนำไปคำนวณหาคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน และนำคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนไปคิดเป็นคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม และมอบรางวัลให้กับกลุ่มที่ได้คะแนนอยู่ใน 5 อันดับแรก

สื่อ อุปกรณ์การเรียนรู้ และแหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 4 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X
2. ใบกิจกรรมที่ 4 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

การวัดและประเมินผล

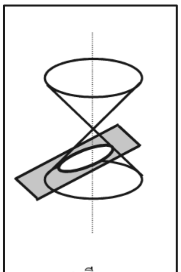
จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
นักเรียนสามารถ 1. หาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโทของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่กำหนดได้ 2. เขียนกราฟของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่กำหนดได้ 3. เขียนสมการวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้	- การตรวจใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X - สอบย่อยรายบุคคล - สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	- ใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X - แบบทดสอบย่อยรายบุคคล เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X - แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	นักเรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไป

ใบความรู้ที่ 4

เรื่อง สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X

วงรี

วงรี เป็นภาคตัดกรวยที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ที่ระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวยแต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวยขนาดใหญ่กว่า α ระนาบจะตัดกรวยข้างเดียว



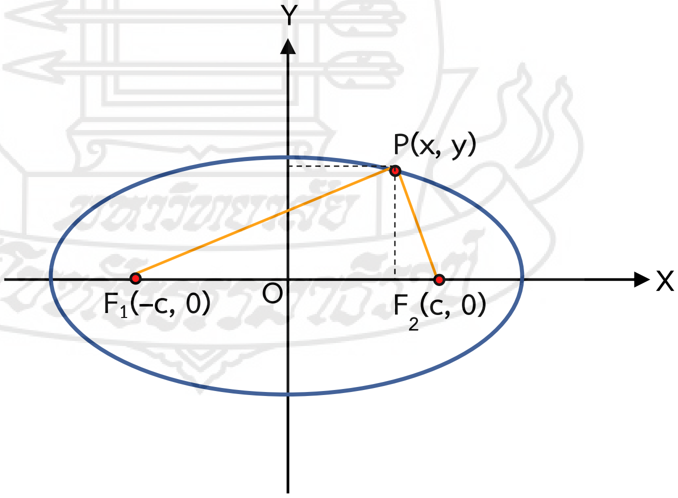
วงรี

บทนิยามเชิงเรขาคณิตวิเคราะห์

วงรี (ellipse) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนั้นไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่สองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องมากกว่าระยะห่างระหว่างจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดว่า โฟกัส (focus) ของวงรี

สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X

ในการหารูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X ทำได้โดยกำหนดให้โฟกัสอยู่บนแกน X ที่ $F_1(-c, 0)$ และ $F_2(c, 0)$ จุดกำเนิดอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัส ดังรูป



ให้ผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ บนวงรีถึงโฟกัสทั้งสอง คือ 2a หน่วย โดยที่ $0 < c < a$ จะได้ว่า ถ้า $P(x, y)$ เป็นจุดใด ๆ บนวงรีแล้ว

$$
\begin{aligned}
PF_1 + PF_2 &= 2a \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a \\
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
\left(\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 &= \left(2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\
(x-c)^2 + y^2 &= (2a)^2 - 2(2a)\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right) + \left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 \\
x^2 - 2(x)(c) + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\
x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\
4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4cx \\
a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a^2 + cx \\
\left(a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 &= (a^2 + cx)^2 \\
a^2((x+c)^2 + y^2) &= (a^2)^2 + 2(a^2)(cx) + (cx)^2 \\
a^2(x^2 + 2cx + c^2 + y^2) &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\
a^2x^2 + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + 2a^2cx + c^2x^2 \\
a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 &= a^4 + c^2x^2 \\
a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 &= a^4 - a^2c^2 \\
x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $0 < c < a$ จะได้ว่า $a^2 - c^2 > 0$ จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} + \frac{a^2y^2}{a^2(a^2 - c^2)} &= \frac{a^2(a^2 - c^2)}{a^2(a^2 - c^2)} \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} &= 1
\end{aligned}
$$

ให้ $b^2 = a^2 - c^2$ โดยที่ $b > 0$ เนื่องจาก $b^2 < a^2$ จะได้ว่า $b < 0$

จะได้สมการวงรีเป็น $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ เมื่อ $a > b$

ในการเขียนวงรี จะต้องหาระยะตัดแกน X และระยะตัดแกน Y

ให้ $y = 0$ จะได้

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{0^2}{b^2} &= 1 \\
\frac{x^2}{a^2} + 0 &= 1 \\
x^2 &= a^2
\end{aligned}
$$

จะได้ $x = a$ หรือ $x = -a$ ดังนั้น วงรีจะตัดแกน X ที่ $(-a, 0)$ และ $(a, 0)$ ซึ่งเรียกว่า จุดยอดของวงรี ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอด เรียกว่า แกนเอกของวงรี ความยาวของแกนเอกเท่ากับ 2a หน่วย จุดกึ่งกลางของแกนเอกเรียกว่า จุดศูนย์กลางของวงรี

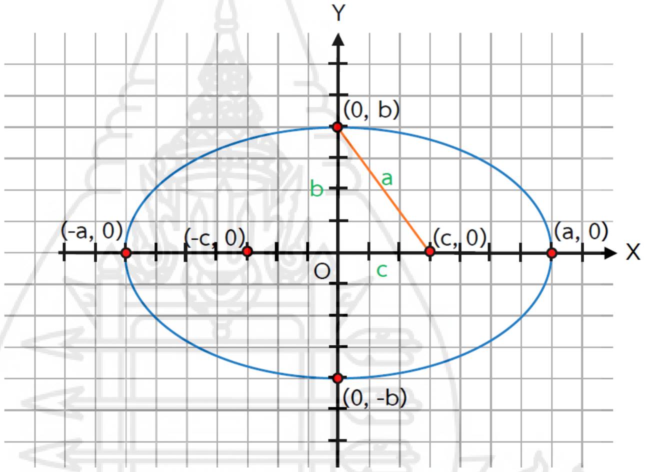
ให้ $x = 0$ จะได้

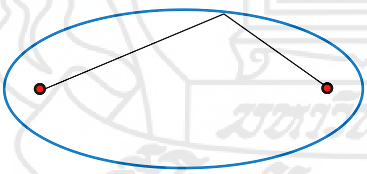
$$\frac{0^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$0 + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

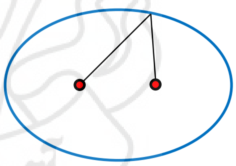
$$y^2 = b^2$$

จะได้ $y = b$ หรือ $y = -b$ ดังนั้น วงรีจะตัดแกน Y ที่ $(-b, 0)$ และ $(b, 0)$ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดทั้งสอง เรียกว่า แกนโทของวงรี จุด $(-b, 0)$ และ $(b, 0)$ เรียกว่า จุดปลายแกนโทของวงรี ความยาวของแกนโทเท่ากับ 2b หน่วย เนื่องจาก $2a > 2b$ จะได้ว่า แกนเอกยาวกว่าแกนโท





รูปที่ 1



รูปที่ 2

จากรูป ถ้าโฟกัสทั้งสองของวงรีอยู่ห่างกันมาก (2a มากกว่า 2c เพียงเล็กน้อย) วงรีจะมีรูปร่างเรียวยาว มีความรีมาก แต่ถ้าโฟกัสทั้งสองอยู่ใกล้กัน (2a มากกว่า 2c มาก) วงรีมีรูปร่างเกือบจะกลม มีความรีน้อย โดยทั่วไปจะใช้อัตราส่วนของ c ต่อ a วัดความรีของวงรี เรียกอัตราส่วนนี้ว่า ความเยื้องศูนย์กลาง (eccentricity) แทนด้วย e ซึ่ง $e = \frac{c}{a}$ ซึ่งความเยื้องศูนย์กลางของวงรีมีค่าระหว่าง 0 และ 1 $(0 < e < 1)$

ถ้า e มีค่าใกล้ 1 หรือ c มีค่าเกือบจะเท่ากับ a แล้ววงรีมีความรีมาก (มีรูปร่างเรียวยาว) แต่ถ้า e ค่าเข้าใกล้ 0 แล้ววงรีมีความรีน้อย (รูปร่างใกล้เคียงกับวงกลม)

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท ของวงรีที่มีสมการเป็น $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X

$a^2 = 25$; $a = 5$ และ $b^2 = 16$; $b = 4$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$

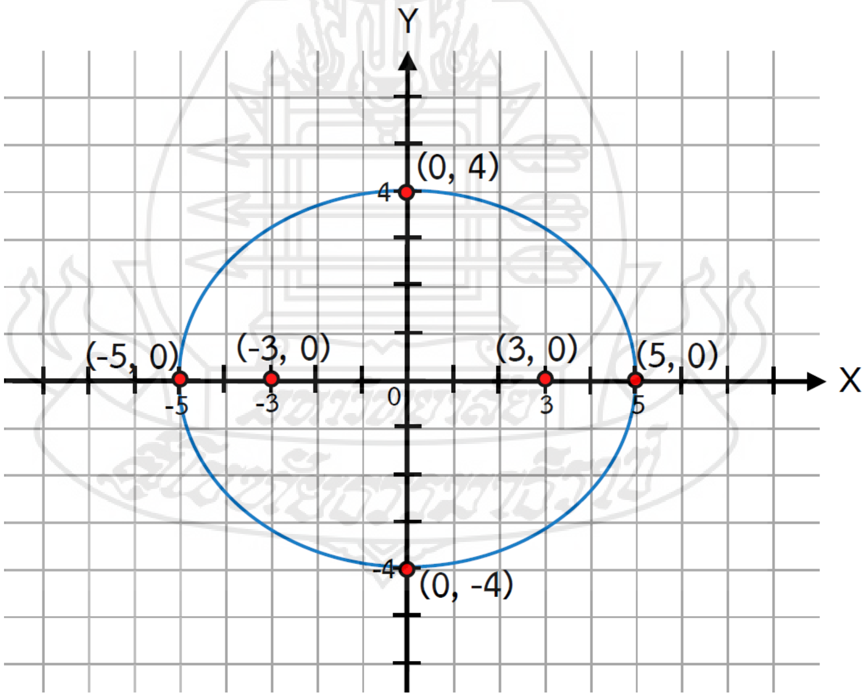
$c^2 = 25 - 16 = 9$; $c = 3$

ดังนั้น โฟกัสของวงรี คือ (3, 0) และ (-3, 0)

จุดยอดหรือจุดปลายแกนเอกของวงรี คือ (5, 0) และ (-5, 0)

แกนเอกยาว 2(5) = 10 หน่วย และ แกนโทยาว 2(4) = 8 หน่วย

เขียนวงรีได้ดังนี้



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> วงรีวงหนึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ (–8, 0), (8, 0) และโฟกัสอยู่ที่ (–5, 0), (5, 0) จงเขียนสมการวงรี

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้ว่าแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X และเมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ จะได้ a = 8 และ c = 5

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้

$5^2 = 8^2 - b^2$

$b^2 = 8^2 - 5^2$

$b^2 = 64 - 25$

$b^2 = 39$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{39}=1$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงเขียนสมการวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่ (–5, 0) และ (5, 0) และความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ $\frac{4}{5}$

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก $e = \frac{4}{5}$ และโฟกัสอยู่ที่ (–5, 0) และ (5, 0) จะได้ c = 5

จะได้ว่า $\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$

$\frac{5}{a} = \frac{4}{5}$

$4a = 25$

$a = \frac{25}{4}$

หาค่าของ b โดยใช้สมการ $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้

$c^2 = a^2 - b^2$

$5^2 = \left(\frac{25}{4}\right)^2 - b^2$

$b^2 = \frac{625}{16} - 25$

$b^2 = \frac{625}{16} - \frac{400}{16}$

$b^2 = \frac{225}{16}$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)^2}+\frac{y^2}{\frac{225}{16}}=1$ หรือ $\frac{16x^2}{625}+\frac{16y^2}{225}=1$

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จุดยอด คือ (–6, 0), (6, 0) และระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 10 หน่วย

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้ว่า a = 6 และ 2c = 10, c = 5

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

$5^2 = 6^2 - b^2$

$b^2 = 36 - 25$

$b^2 = 11$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1$

จุดยอดของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0)
และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน x คือ
พิกัด (-a, 0) และ (a, 0)
และระยะห่างระหว่างโฟกัส เท่ากับ 2c หน่วย

รูปแบบมาตรฐานของของสมการวงรีที่มี
จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) และแกนเอก
ของวงรีอยู่บนแกน X คือ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ใบกิจกรรมที่ 4

เรื่อง สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X

1. จงหา b ที่ทำให้สมการ $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{b^2}=1$ เป็นสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X พร้อมทั้งหาโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท ของวงรี และเขียนวงรี

วิธีทำ เนื่องจาก แกนเอกอยู่บนแกน X จะได้ว่า $b^2 < 100$

ให้ b = ...

จะได้สมการวงรีที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด คือ..

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงรีได้ดังนี้..

จะได้ a^2 =.................. , a =..............

b^2 =.................. , b =..............

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ c^2 =.. , c =..............

โฟกัสของวงรี คือ... จุดยอด คือ...

เขียนวงรี ได้ดังนี้

2. จงหาโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโทของวงรี และเขียนกราฟของวงรีที่มีสมการเป็น $9x^2 + 25y^2 = 225$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงรีได้ดังนี้..

จะได้ a^2 =...................... ,a =..................

b^2 =...................... ,b =.................

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ c^2 =... ,c =...............

โฟกัสของวงรี คือ... จุดยอด คือ..

เขียนวงรี ได้ดังนี้

2. จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) โฟกัส (-5, 0) , (5, 0) จุดยอด (-9, 0) , (9, 0)

2) แกนเอกยาว 20 หน่วย แกนโทยาว 12 หน่วย

3. จงเขียนสมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน X และแกนโทยาว 14 หน่วย

1) จุดยอดของวงรี

2) แสดงวิธีทำในการหาสมการของวงรี

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 4

เรื่อง สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X

จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X และแกนโทยาว 6 หน่วย พร้อมทั้งเขียนวงรี

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนวงรีตามเงื่อนไขของโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนความยาวแกนเอกและความยาวแกนโท

2. จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงรี พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

3. เขียนกราฟของวงรีได้ดังนี้

เฉลย ใบกิจกรรมที่ 4

เรื่อง สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X

1. จงหา b ที่ทำให้สมการ $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{b^2}=1$ เป็นสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X พร้อมทั้งหาโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโทของวงรี และเขียนวงรี

<u>แนวการตอบ</u> เนื่องจาก แกนเอกอยู่บนแกน X จะได้ว่า $b^2 < 100$

ให้ $b = 8$

จะได้สมการวงรีที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนด คือ $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงรีได้ดังนี้ $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{8^2}=1$

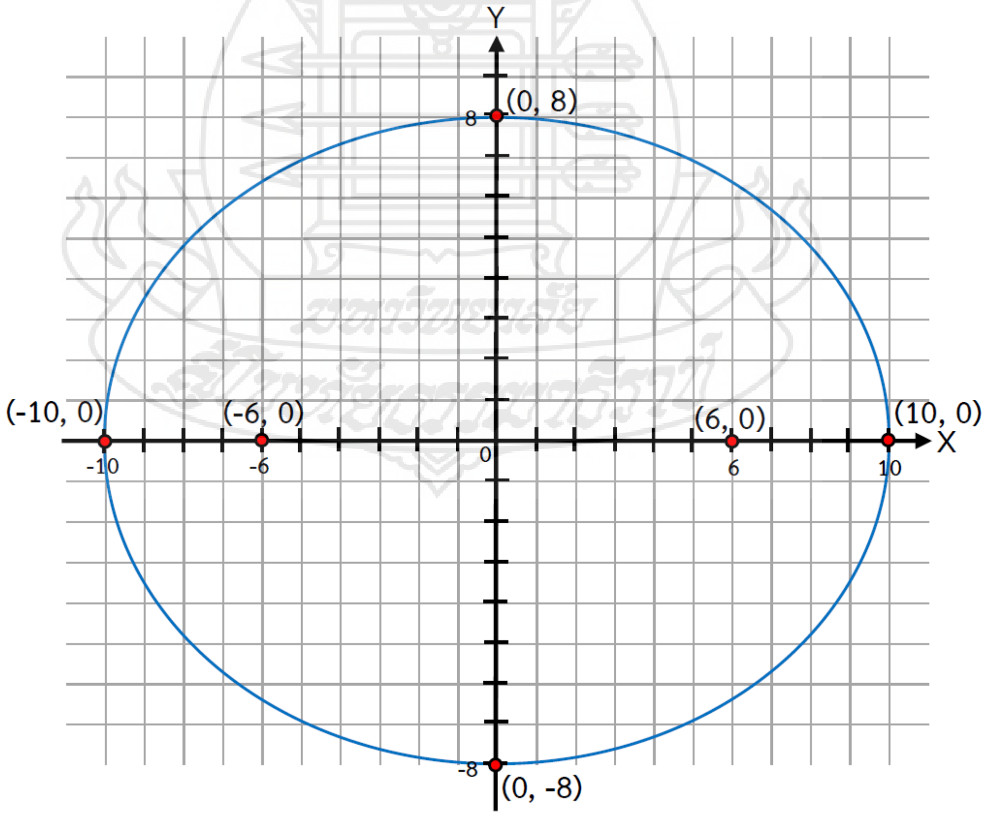
จะได้ $a^2 = 10^2$, $a = 10$

$b^2 = 8^2$, $b = 8$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 10^2 - 8^2 = 100 - 64 = 36$, $c = 6$

โฟกัสของวงรี คือ $(-6, 0)$ และ $(6, 0)$

จุดยอด คือ $(-10, 0)$ และ $(10, 0)$ หน่วย และเขียนวงรี ได้ดังนี้



2. จงหาโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโทของวงรี และเขียนกราฟของวงรีที่มีสมการเป็น $9x^2 + 25y^2 = 225$

วิธีทำ เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงรีได้ดังนี้ $\frac{9x^2}{225} + \frac{25y^2}{225} = \frac{225}{225}$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

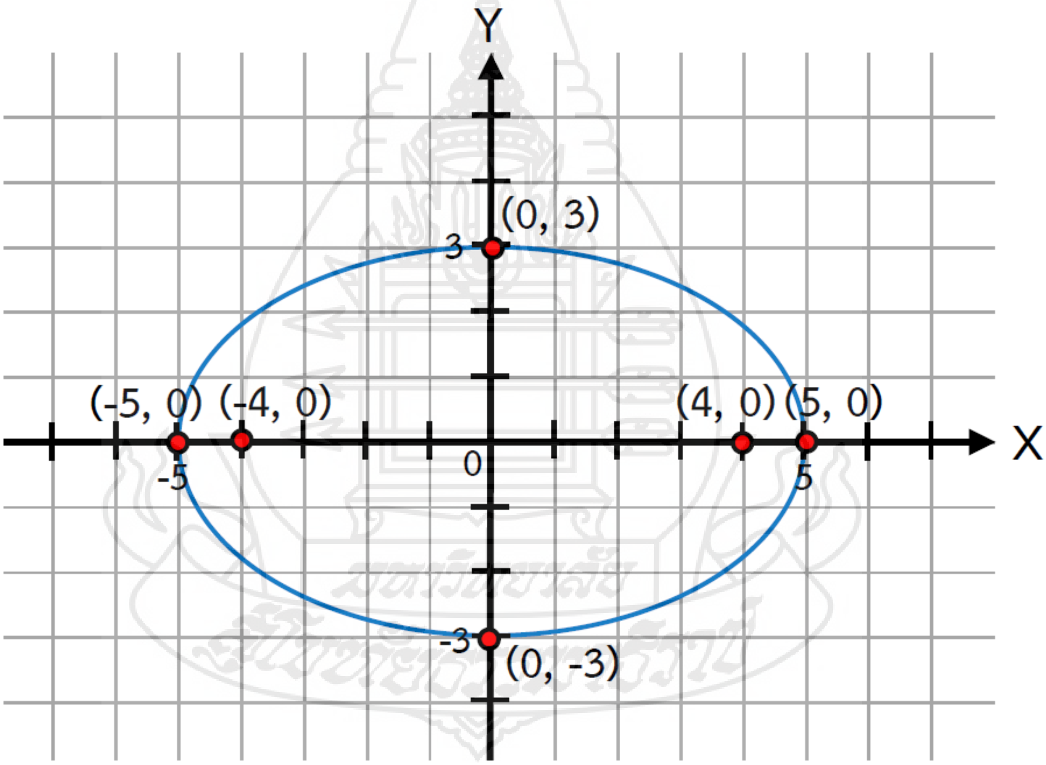
จะได้ $a^2 = 25, a = 5$

$b^2 = 9, b = 3$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 25 - 9 = 16, c = 4$

โฟกัสของวงรี คือ (–4, 0) และ (4, 0) จุดยอด คือ (–5, 0) และ (5, 0)

เขียนวงรี ได้ดังนี้



2. จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) โฟกัส (-5, 0) , (5, 0) จุดยอด (-9, 0) , (9, 0)

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้ว่า c = 5 และ a = 9

เนื่องจาก $c^2 = a^2 - b^2$

$5^2 = 9^2 - b^2$

$b^2 = 81 - 25$

$b^2 = 56$

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{56} = 1$

2) แกนเอกยาว 20 หน่วย แกนโทยาว 12 หน่วย

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้ว่า 2a = 20, a = 10 และ 2b = 12, b = 6

ดังนั้น สมการวงรี คือ $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$

3. จงเขียนสมการวงรีที่มีแกนเอกอยู่บนแกน X และแกนโทยาว 14 หน่วย

1) ความยาวแกนเอกของวงรี

แนวการตอบ เนื่องจากแกนโทยาว 14 หน่วย จะได้ว่า 2b = 14, b = 7

และแกนเอกของวงรีต้องยาวมากกว่า 14 หน่วย

กำหนดให้ แกนเอกของวงรียาว 20 หน่วย จะได้ว่า 2a = 20, a = 10 หน่วย

2) แสดงวิธีทำในการหาสมการของวงรี

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X จะได้ว่าสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

แทน a ด้วย 10 และแทน b ด้วย 7 ในสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี

จะได้ $\frac{x^2}{10^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1$

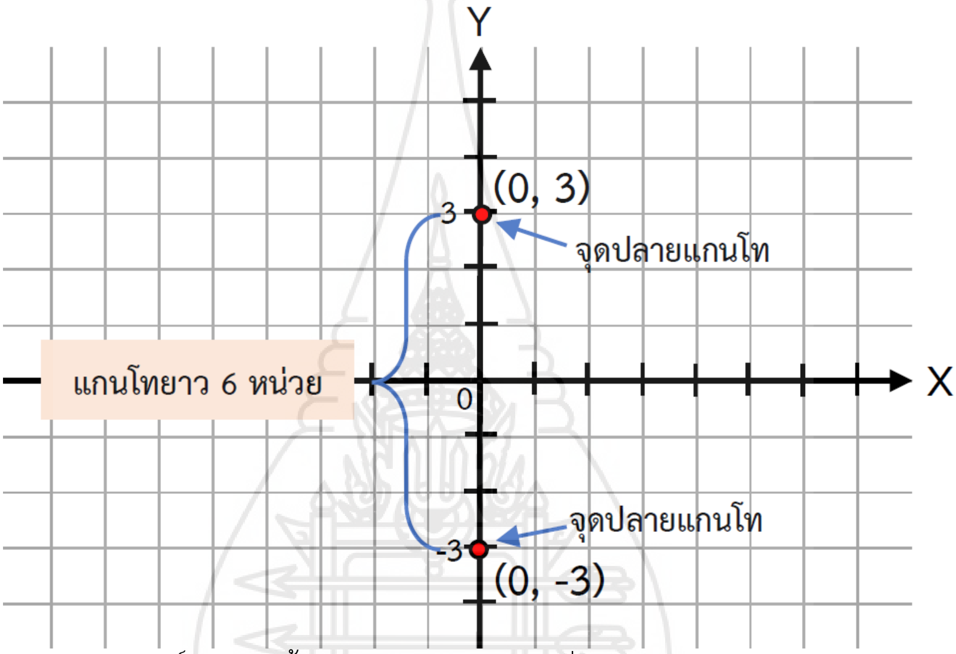
ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{49} = 1$

เฉลย แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 4

เรื่อง สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกอยู่บนแกน X

จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนเอกอยู่บนแกน X และแกนโทยาว 6 หน่วย พร้อมทั้งเขียนวงรี

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนวงรีตามเงื่อนไขของโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนความยาวแกนเอกและความยาวแกนโท



<u>แนวการตอบ</u> จากโจทย์กำหนดให้แกนโทของวงรียาว 6 หน่วย

เนื่องจาก แกนเอกจะต้องยาวกว่าแกนโท จะได้ว่า ต้องกำหนดให้แกนเอกของวงรีต้องยาวมากกว่า 6 หน่วย และกำหนดให้ แกนเอกของวงรียาว 2a หน่วย และแกนโทของวงรียาว 2b หน่วย

2. จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงรี พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

<u>แนวการตอบ</u> จากโจทย์ แกนโทของวงรียาว 6 หน่วย จะได้ว่า 2b = 6, b = 3

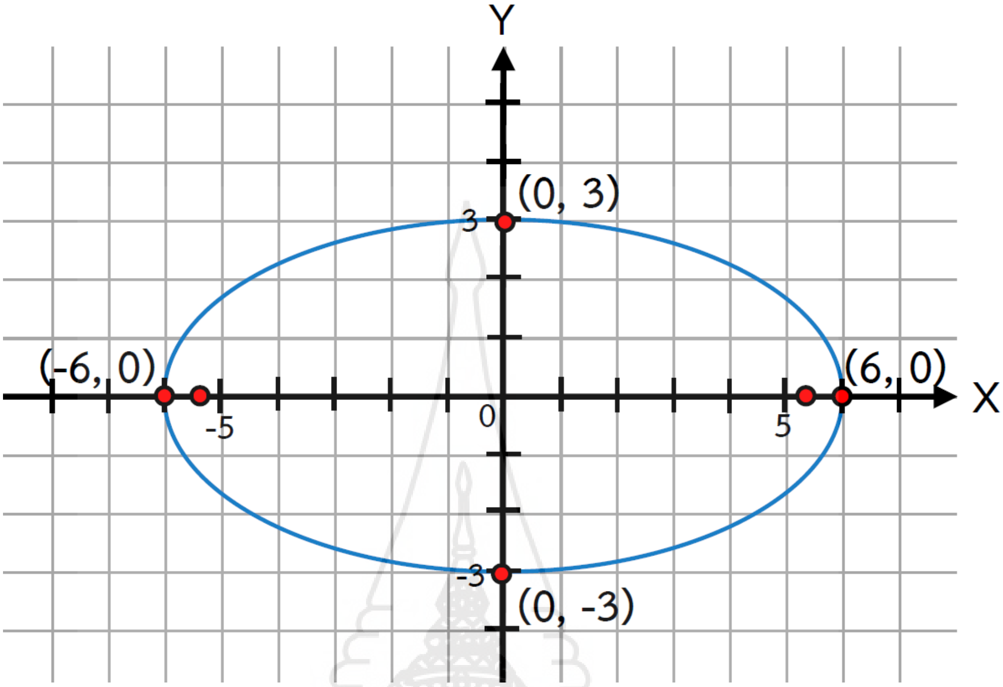
และกำหนดให้แกนเอกยาว 12 หน่วย จะได้ว่า 2a = 12, a = 6

เนื่องจากแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน X จะได้ว่าสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

แทน a ด้วย 6 และแทน b ด้วย 3 ในสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี จะได้ $\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$

3. เขียนกราฟของวงรีได้ดังนี้



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย จำนวน 18 ชั่วโมง

เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี เวลา 1 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

การเลื่อนกราฟของวงรีเป็นการเลื่อนกราฟของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) ไปอยู่ที่จุดศูนย์กลาง (h, k) ตามแนวแกน X และแกน Y ซึ่งพิกัดของจุดต่าง ๆ จะเลื่อนขนานตามจุดศูนย์กลางที่เปลี่ยนไป

สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกอยู่ในแนวนอน

คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$

สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง คือ

$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$, $a > b > 0$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโทของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่กำหนดได้
2. เขียนกราฟของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่กำหนดได้
3. เขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนดได้

สาระการเรียนรู้

1. การเลื่อนกราฟของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) ไปอยู่ที่จุดศูนย์กลาง (h, k) ตามแนวแกน X และแกน Y
2. การหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโทของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรี
3. การเขียนกราฟของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรี
4. การเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนด

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน

- แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ และทบทวนความรู้เดิม

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและแกนเอกอยู่บนแกน X และแกน Y โดยครูตั้งคำถามว่า “ให้นักเรียนเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดและแกนเอกอยู่บนแกน X และแกน Y” โดยให้นักเรียนเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คนละหนึ่งสมการ แล้วให้นักเรียนหาโฟกัส จุดยอด ความยาวแกนเอก และความยาวแกนโทของวงรีที่สร้างขึ้น จากนั้นให้ตัวแทนนักเรียนออกมานำเสนอสมการที่สร้างขึ้นหน้าชั้นเรียน

3. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับการเลื่อนขนานกราฟในแนวตั้งและแนวนอน ดังนี้

สำหรับสมการใด ๆ ถ้าแทน x ด้วย x – h หรือ x + h กราฟของสมการใหม่คือ กราฟของสมการเดิมที่เลื่อนไปตามแนวนอน ถ้าแทน y ด้วย y – k หรือ y + k กราฟของสมการใหม่คือกราฟของสมการเดิมที่เลื่อนไปตามแนวตั้ง ดังนี้

1) แทน x ด้วย x – h กราฟจะเลื่อนไปทางขวา h หน่วย

2) แทน x ด้วย x + h กราฟจะเลื่อนไปทางซ้าย h หน่วย

3) แทน y ด้วย y – k กราฟจะเลื่อนขึ้นบน k หน่วย

4) แทน y ด้วย y + k กราฟจะเลื่อนลงล่าง k หน่วย

– สอนเนื้อหาใหม่

4. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับการเลื่อนกราฟของวงรี และสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ดังนี้

การเลื่อนกราฟของวงรีเป็นการเลื่อนกราฟของวงรี $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ และ $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) ไปอยู่ที่จุดศูนย์กลาง (h, k) ตามแนวแกน X และแกน Y ซึ่งพิกัดของจุดต่าง ๆ จะเลื่อนขนานตามจุดศูนย์กลางที่เปลี่ยนไป

สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกอยู่ในแนวนอน คือ $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$, $a > b > 0$

สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง คือ

$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$, $a > b > 0$

5. ครูยกตัวอย่างการเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่เกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลางของวงรี และอธิบายการเลื่อนกราฟของวงรี

วิธีทำ จากโจทย์ จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่เกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดต่าง ๆ แตกต่างกัน เช่น

1) สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x-(-3))^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{100} = 1$ หรือ $\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{100} = 1$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–3, 5) และเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางซ้าย 3 หน่วย และขึ้นบน 5 หน่วย

2) สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x-7)^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{100} = 1$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (7, –4) และเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางขวา 7 หน่วย และลงล่าง 4 หน่วย

6. ครูยกตัวอย่างการหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และการเขียนกราฟของวงรีจากสมการในรูปแบบมาตรฐานของวงรี ดังนี้

ตัวอย่างที่ 2 จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงรี $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

วิธีทำ จากสมการ $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$

จะได้ว่า $\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y-(-3))^2}{3^2} = 1$

เมื่อเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จะได้

$h = 2, k = -3, a^2 = 25; a = 5$ และ $b^2 = 9; b = 3$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $c^2 = 25 - 9 = 16; c = 4$

ดังนั้น วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, –3) ซึ่งเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางขวา 2 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย

เนื่องจาก จุดยอดหรือจุดปลายแกนเอกของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ คือ (–5, 0) และ (5, 0)

จุดปลายแกนโทของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ คือ (0, –3) และ (0, 3)

โฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ คือ (4, 0) และ (–4, 0)

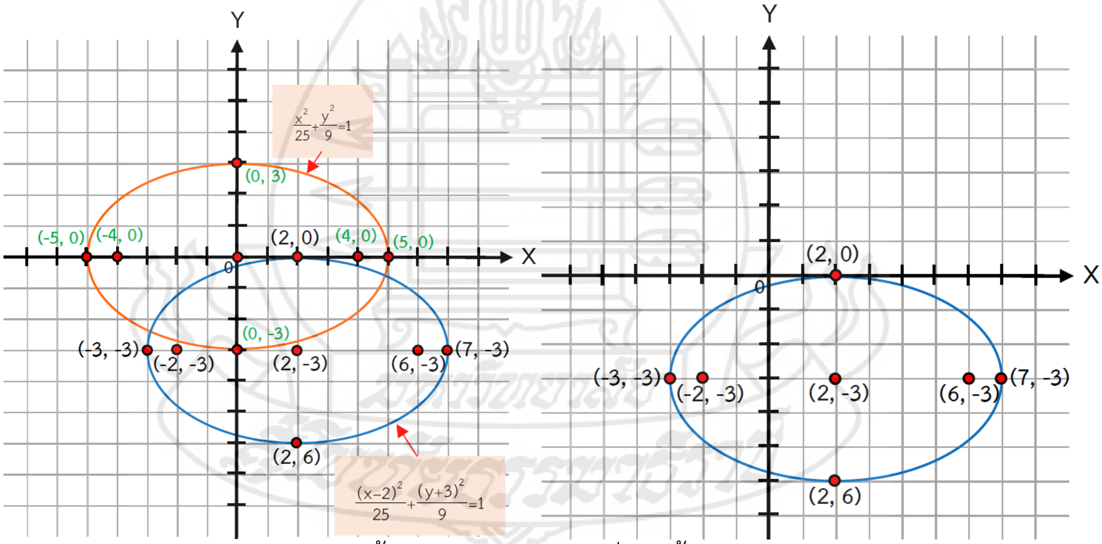
ถ้าเลื่อนจุดยอด จุดปลายแกนโท และโฟกัสไปทางขวา 2 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย จะได้ จุดยอด จุดปลายแกนโท และโฟกัสของวงรี $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$ ดังนี้

จุดยอดหรือจุดปลายแกนเอกของวงรี (–5, 0) และ (5, 0) เลื่อนไปยังจุด (–5 + 2, 0 – 3) = (–3, –3) และ (5 + 2, 0 – 3) = (7, –3)

จุดปลายแกนโทของวงรี (0, –3) และ (0, 3) เลื่อนไปยังจุด (0 + 2, –3 – 3) = (2, –6) และ (0 + 2, 3 – 3) = (2, 0)

โฟกัสของวงรี (4, 0) และ (–4, 0) เลื่อนไปยังจุด (4 + 2, 0 – 3) = (6, –3) และ (–4 + 2, 0 – 3) = (–2, –3)

เขียนวงรี ได้ดังนี้



7. ครูแจกกระดาษให้นักเรียนคนละ 1 แผ่น แล้วแสดงคำถามปลายเปิด ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้ “ให้นักเรียนเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) คนละ 1 สมการ” เมื่อเขียนเสร็จแล้วให้ตัวแทนนักเรียนออกมานำเสนอสมการรูปมาตรฐานที่สร้างขึ้น พร้อมทั้งอธิบายการเลื่อนขนานกราฟของสมการ จุดศูนย์กลาง จุดยอด และโฟกัสของวงรี หน้าชั้นเรียน

– สรุปบทเรียน

8. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่า “ในวันนี้นักเรียนได้เรียนรู้อะไรบ้างเกี่ยวกับการเลื่อนกราฟของวงรี” แล้วให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็น จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการเลื่อนกราฟของวงรี

(แนวการตอบ ได้เรียนรู้เกี่ยวกับการเลื่อนกราฟของวงรี การเลื่อนกราฟของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) ไปอยู่ที่จุดศูนย์กลาง (h, k) ตามแนวแกน X และแกน Y ซึ่งพิกัดของจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท จะเลื่อนขนานตามจุดศูนย์กลางที่เปลี่ยนไป)

ขั้นที่ 2 ขั้นทำงานกลุ่มร่วมกัน

9. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มโดยคละความสามารถตามที่ครูแบ่งให้ ครูแจกใบความรู้และใบกิจกรรมที่ 6 เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี ให้กับนักเรียน แล้วให้นักเรียนช่วยกันทำงานใบกิจกรรม เพื่อเป็นการทบทวนความรู้ โดยให้นักเรียนปรึกษากันและช่วยเหลือกันภายในกลุ่ม และให้นักเรียนที่เข้าใจในเนื้อหาแล้วในแต่ละกลุ่มช่วยอธิบายและทบทวนความรู้ให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจในเนื้อหา เพื่อให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มเข้าใจเนื้อหา ซึ่งครูจะคอยดูแลและให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนสงสัยหรือต้องการความช่วยเหลือ

10. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบกิจกรรม เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี โดยให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อที่ผิดของตนเอง หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

ขั้นที่ 3 ขั้นการทดสอบย่อยรายบุคคล

11. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยรายบุคคลครั้งที่ 6 เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี โดยในขั้นนี้นักเรียนจะไม่สามารถช่วยเหลือกันหรือปรึกษากันได้ นักเรียนทุกคนจะต้องตั้งใจทำแบบทดสอบ เพราะคะแนนของนักเรียนแต่ละคนจะมีผลต่อคะแนนของกลุ่ม

12. เมื่อนักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ โดยครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยไปพร้อมกัน หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

13. เมื่อตรวจข้อสอบเสร็จให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง แล้วรวมคะแนนพร้อมทั้งลงชื่อกำกับว่าใครเป็นคนตรวจ จากนั้นให้นักเรียนส่งแบบทดสอบคืนให้กับเพื่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มและให้รางวัลกลุ่ม

14. ให้นักเรียนแต่ละคนบอกคะแนนของตนเองที่ได้กับครู จากนั้นครูและนักเรียนทุกคนช่วยกันคำนวณหาคะแนนพัฒนาการ โดยนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบครั้งที่ 6 ไปลบคะแนนพื้นฐานในครั้งที่ 5 แล้วนำไปคำนวณหาคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน และนำคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนไปคิดเป็นคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม และมอบรางวัลให้กับกลุ่มที่ได้คะแนนอยู่ใน 5 อันดับแรก

สื่อ อุปกรณ์การเรียนรู้ และแหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 6 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

2. ใบกิจกรรมที่ 6 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนเอกของวงรีอยู่บนแกน Y

การวัดและประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
นักเรียนสามารถ 1. หาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโทของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่กำหนดได้ 2. เขียนกราฟของวงรีจากสมการรูปมาตรฐานของวงรีที่กำหนดได้ 3. เขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีจากเงื่อนไขที่กำหนดได้	- การตรวจใบกิจกรรม เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี - สอบย่อยรายบุคคล - สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	- ใบกิจกรรม เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี - แบบทดสอบย่อยรายบุคคล เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี - แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	นักเรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไป

ใบความรู้ที่ 6

เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี

การเลื่อนกราฟของวงรีเป็นการเลื่อนกราฟของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (0, 0) ไปอยู่ที่จุดศูนย์กลาง (h, k) ตามแนวแกน X และแกน Y ซึ่งพิกัดของจุดต่าง ๆ จะเลื่อนขนานตามจุดศูนย์กลางที่เปลี่ยนไป

สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกอยู่ในแนวนอน คือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 \text{ , } a>b>0$$

สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง คือ

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1 \text{ , } a>b>0$$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงรี $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ $\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

จะได้ว่า $\frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-(-3))^2}{3^2}=1$

เมื่อเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$ จะได้

$h = 2$

$k = -3$

$a^2 = 25$; $a = 5$

$b^2 = 9$; $b = 3$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$

จะได้ $c^2 = 25 - 9 = 16; c = 4$

ดังนั้น วงรีมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, –3) ซึ่งเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางขวา 2 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย

เนื่องจาก จุดยอดหรือจุดปลายแกนเอกของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ คือ (–5, 0) และ (5, 0)

จุดปลายแกนโทของวงรี $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ คือ (0, –3) และ (0, 3)

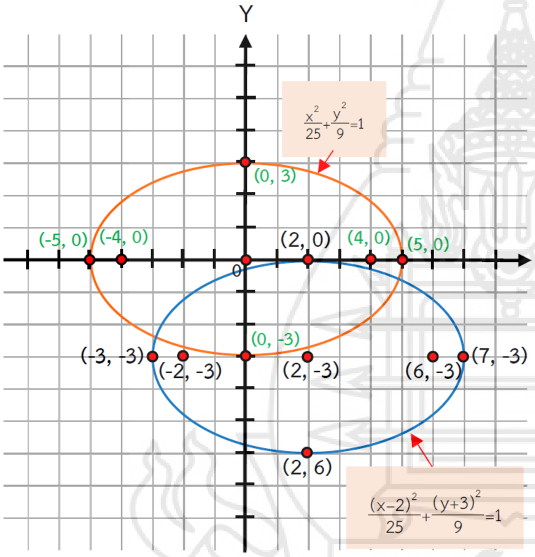
โฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ คือ (4, 0) และ (–4, 0) ถ้าเลื่อนจุดยอด จุดปลายแกนโท และโฟกัสไปทางขวา 2 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย จะได้จุดยอด จุดปลายแกนโท และโฟกัสของวงรี $\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ ดังนี้

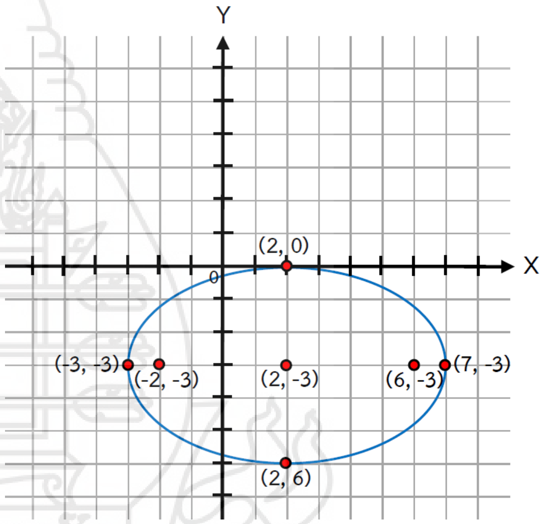
จุดยอดหรือจุดปลายแกนเอกของวงรี (–5, 0) และ (5, 0) เลื่อนไปยังจุด (–5 + 2, 0 – 3) = (–3, –3) และ (5 + 2, 0 – 3) = (7, –3)

จุดปลายแกนโทของวงรี (0, –3) และ (0, 3) เลื่อนไปยังจุด (0 + 2, –3 – 3) = (2, –6) และ (0 + 2, 3 – 3) = (2, 0)

โฟกัสของวงรี (4, 0) และ (–4, 0) เลื่อนไปยังจุด (4 + 2, 0 – 3) = (6, –3) และ (–4 + 2, 0 – 3) = (–2, –3)

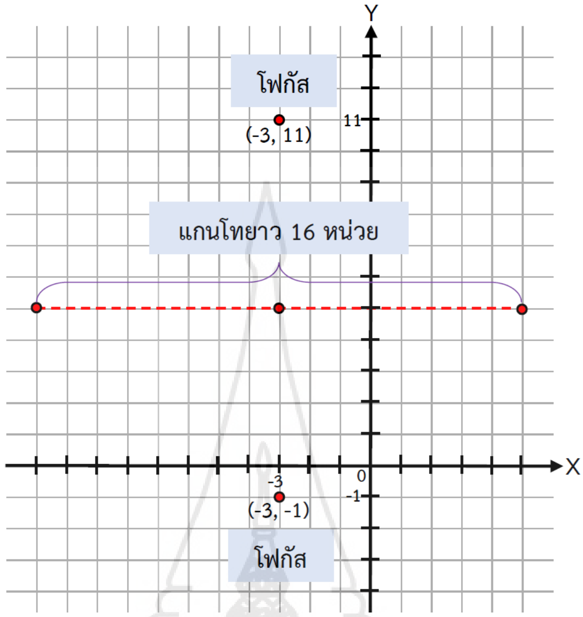
เขียนวงรี ได้ดังนี้





<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่ (-3, 11) และ (-3, -1) และแกนโทยาว 16 หน่วย

<u>วิธีทำ</u>



เนื่องจาก วงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่ (-3, 11) และ (-3, -1)

จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่ในแนวตั้ง

เนื่องจาก จุดศูนย์กลางของวงรีที่อยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง

จะได้ จุดศูนย์กลางของวงรี คือ (-3, 5)

เนื่องจาก แกนโทยาว 16 หน่วย จะได้ $2b = 16$, $b = 8$

ระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 12 หน่วย จะได้ $c = 6$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$

$6^2 = a^2 - 8^2$

$a^2 = 36 + 64$

$a^2 = 100$

จาก สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x-(-3))^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{100} = 1$ หรือ

$$\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{100} = 1$$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่เกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลางของวงรี และอธิบายการเลื่อนกราฟของวงรี

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์ จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีที่เกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดต่าง ๆ แตกต่างกัน เช่น

1) สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x-(-3))^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{100} = 1$ หรือ $\frac{(x+3)^2}{64} + \frac{(y-5)^2}{100} = 1$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–3, 5) และเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางซ้าย 3 หน่วย และขึ้นบน 5 หน่วย

2) สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x-7)^2}{64} + \frac{(y+4)^2}{100} = 1$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (7, –4) และเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางขวา 7 หน่วย และลงล่าง 4 หน่วย

3) สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x-3)^2}{64} + \frac{(y-1)^2}{100} = 1$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, 1) และเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางขวา 3 หน่วย และขึ้นบน 1 หน่วย

4) สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x+10)^2}{64} + \frac{(y+7)^2}{100} = 1$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–10, –7) และเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางซ้าย 10 หน่วย และลงล่าง 7 หน่วย

ใบกิจกรรมที่ 6

เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี

1. จงหาจุดศูนย์กลาง (h, k) ของวงรี $\frac{(x-h)^2}{36}+\frac{(y-k)^2}{100}=1$ ซึ่งทำให้กราฟของวงรีที่มีสมการ $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเลื่อนไปทางซ้าย และเลื่อนขึ้นบน พร้อมทั้งหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และเขียนกราฟของวงรี

<u>วิธีทำ</u> ให้จุดศูนย์กลาง (h, k) ของวงรี คือ..

จะได้ สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่สอดคล้องกับเงื่อนไข คือ...

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงรีได้ดังนี้...

จะได้ a^2 =.................... , a =...............

b^2 =.................... , b =...............

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ c^2 =.. , c =...............

เกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ........................ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทาง ซ้าย..................หน่วย และเลื่อนขึ้นบน................หน่วย

แกนเอกอยู่ในแนว..

จุดยอด คือ..

โฟกัสของวงรี คือ..

จุดปลายแกนโท คือ..

แกนเอกยาว...หน่วย แกนโทยาว..หน่วย

เขียนวงรี ได้ดังนี้

2. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท พร้อมทั้งเขียนกราฟ

ของวงรี $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงรีได้ดังนี้..

จะได้ $h =$.................... , $k =$..............................

$a^2 =$.................... , $a =$...............

$b^2 =$.................... , $b =$...............

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 =$.. , $c =$...............

จุดศูนย์กลาง คือ..

เกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ........................ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทาง

(ขวา/ซ้าย)......................หน่วย และ(ลงล่าง/ขึ้นบน)........................หน่วย

แกนเอกอยู่ในแนว..

จุดยอด คือ..

โฟกัสของวงรี คือ..

จุดปลายแกนโท คือ..

แกนเอกยาว...หน่วย แกนโทยาว...

หน่วย

เขียนวงรี ได้ดังนี้

3. จงเขียนสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และแกนโทยาว 6 หน่วย

1) แนวคิดในการสร้างสมการของวงรีตามเงื่อนไขของโจทย์

----

2) แสดงวิธีทำในการหาสมการของวงรี

----

3) เขียนกราฟของวงรี ได้ดังนี้

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 6

เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี

จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีซึ่งเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ แล้วอธิบายการเลื่อนขนานกราฟ พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และเขียนกราฟของวงรี

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ แล้วเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ พร้อมทั้งอธิบายการเลื่อนขนานกราฟของวงรีที่เขียน

2. จงแสดงวิธีทำในการหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

3. เขียนกราฟของวงรีได้ดังนี้

เฉลย ใบกิจกรรมที่ 6

เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี

1. จงหาจุดศูนย์กลาง (h, k) ของวงรี $\frac{(x-h)^2}{36} + \frac{(y-k)^2}{100} = 1$ ซึ่งทำให้กราฟของวงรีที่มีสมการ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดเลื่อนไปทางซ้าย และเลื่อนขึ้นบน พร้อมทั้งหาจุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และเขียนกราฟของวงรี

<u>วิธีทำ</u> ให้จุดศูนย์กลาง (h, k) ของวงรี คือ (–3, 5)

จะได้ สมการรูปมาตรฐานของวงรีที่สอดคล้องกับเงื่อนไข คือ $\frac{(x+3)^2}{36} + \frac{(y-5)^2}{100} = 1$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงรีได้ดังนี้ $\frac{(x-(-3))^2}{6^2} + \frac{(y-5)^2}{10^2} = 1$

จะได้ $a^2 = 100; a = 10$

$b^2 = 36; b = 6$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 100 - 36 = 64; c = 8$

เกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{100} = 1$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางซ้าย 3 หน่วย และเลื่อนขึ้นบน 5 หน่วย แกนเอกอยู่ในแนวตั้ง

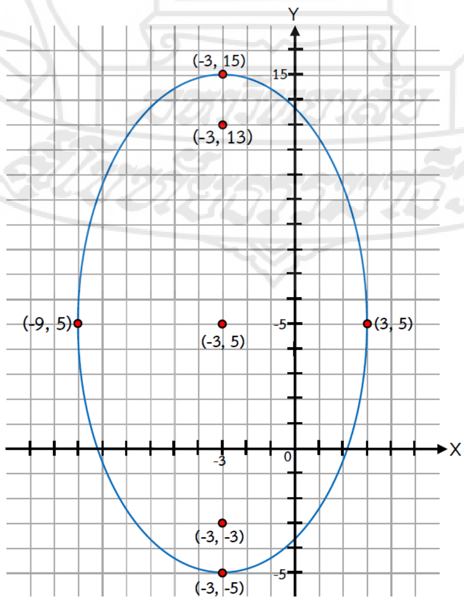
จุดยอด คือ (0 – 3, 10 + 5) = (–3, 15) และ (0 – 3, –10 + 5) = (–3, –5)

โฟกัสของวงรี คือ (0 – 3, 8 + 5) = (–3, 13) และ (0 – 3, –8 + 5) = (–3, –3)

จุดปลายแกนโท คือ (6 – 3, 0 + 5) = (3, 5) และ (–6 – 3, 0 + 5) = (–9, 5)

แกนเอกยาว 2(10) = 20 หน่วย แกนโทยาว 2(6) = 12 หน่วย

เขียนวงรี ได้ดังนี้



2. จงหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงรี $\frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงรีได้ดังนี้ $\frac{(x-1)^2}{5^2} + \frac{(y-(-2))^2}{4^2} = 1$

จะได้ $h = 1, k = -2$

$a^2 = 25; a = 5$

$b^2 = 16; b = 4$

จาก $c^2 = a^2 - b^2$ จะได้ $c^2 = 25 - 16 = 9; c = 3$

จุดศูนย์กลาง คือ $(1, -2)$

เกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางขวา 1 หน่วย และลงล่าง 2 หน่วย

แกนเอกอยู่ในแนวนอน

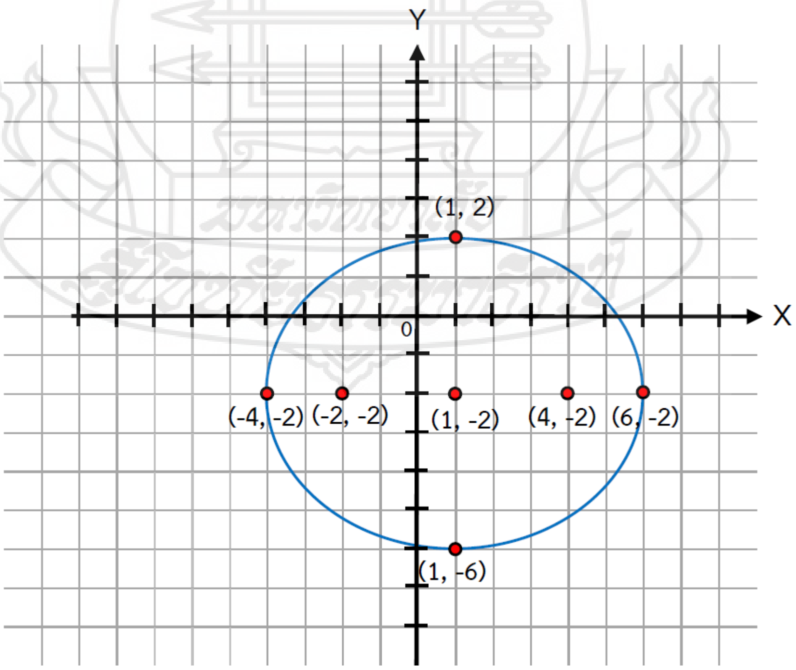
จุดยอด คือ $(5 + 1, 0 - 2) = (6, -2)$ และ $(-5 + 1, 0 - 2) = (-4, -2)$

โฟกัสของวงรี คือ $(3 + 1, 0 - 2) = (4, -2)$ และ $(-3 + 1, 0 - 2) = (-2, -2)$

จุดปลายแกนโท คือ $(0 + 1, 4 - 2) = (1, 2)$ และ $(0 + 1, -4 - 2) = (1, -6)$

แกนเอกยาว $2(5) = 10$ หน่วย แกนโทยาว $2(4) = 8$ หน่วย

เขียนวงรี ได้ดังนี้



3. จงเขียนสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) และแกนโทยาว 6 หน่วย

1) แนวคิดในการสร้างสมการของวงรีตามเงื่อนไขของโจทย์

<u>แนวการตอบ</u> เนื่องจากโจทย์กำหนดว่าแกนโทของวงรียาว 6 หน่วย ดังนั้น จะต้องสร้างสมการวงรีที่มีแกนเอกยาวมากกว่า 6 หน่วย

2) แสดงวิธีทำในการหาสมการของวงรี

<u>แนวการตอบ</u> กำหนดให้จุดศูนย์กลางของวงรีอยู่ที่พิกัด (2, −1) และกำหนดให้แกนเอกของวงรีอยู่ในแนวตั้ง มีความยาว 10 หน่วย ซึ่งจะได้ว่า 2a = 10, a = 5

จากโจทย์แกนโทของวงรียาว 6 หน่วย จะได้ 2b = 6, b = 3

จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x-2)^2}{3^2} + \frac{(y-(-1))^2}{5^2} = 1$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$$

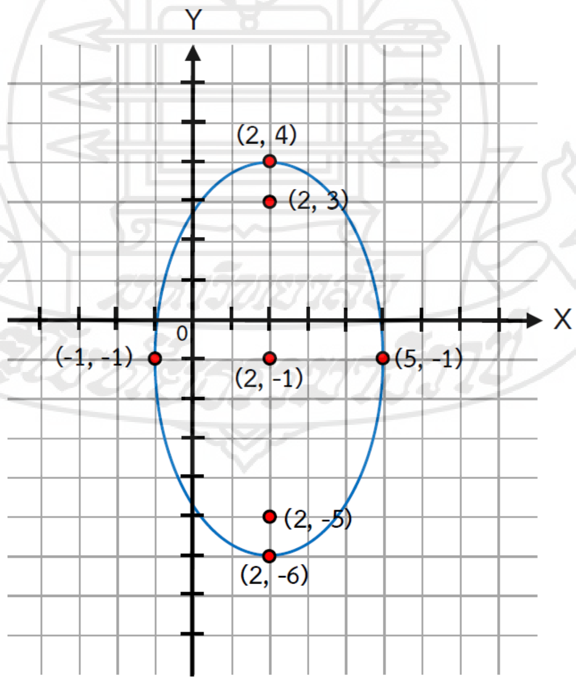
จาก $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$, $c = 4$

จุดยอด คือ (0 + 2, 5 − 1) = (2, 4) และ (0 + 2, −5 − 1) = (2, −6)

โฟกัสของวงรี คือ (0 + 2, 4 − 1) = (2, 3) และ (0 + 2, −4 − 1) = (2, −5)

จุดปลายแกนโท คือ (3 + 2, 0 − 1) = (5, −1) และ (−3 + 2, 0 − 1) = (−1, −1)

3) เขียนกราฟของวงรี ได้ดังนี้



แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 6

เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี

จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงรีซึ่งเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ แล้วอธิบายการเลื่อนขนานกราฟ พร้อมทั้งหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท และเขียนกราฟของวงรี

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ แล้วเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ พร้อมทั้งอธิบายการเลื่อนขนานกราฟของวงรีที่เขียน

<u>แนวการตอบ</u> กำหนดให้จุดศูนย์กลางของวงรีที่เกิดจากการเลื่อนวงรี $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ คือ (3, –3)

จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรีซึ่งเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางขวา 3 หน่วย ลงล่าง 3 หน่วย คือ $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$

2. จงแสดงวิธีทำในการหาจุดศูนย์กลาง จุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนโท ความยาวแกนเอก ความยาวแกนโท พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

<u>แนวการตอบ</u> จากสมการ $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$ จะได้ว่า แกนเอกของวงรีอยู่ในแนวตั้ง

วงรีเกิดจากการเลื่อนวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดไปทาง 3 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย จะได้ $a^2 = 25$, $a = 5$, $b^2 = 9$, $b = 3$, $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$

จะได้ จุดยอดของวงรี $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ คือ (0, 5) และ (0, –5)

โฟกัสของวงรี $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ คือ (0, 4) และ (0, –4)

จุดปลายแกนโทของวงรี $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ คือ (3, 0) และ (–3, 0)

เลื่อนจุดยอด โฟกัส และจุดปลายแกนโท ไปทางขวา 3 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย จะได้จุดยอด โฟกัส และจุดปลายแกนโทของวงรีที่เป็นกราฟของสมการ $\frac{(x-3)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$ คือ

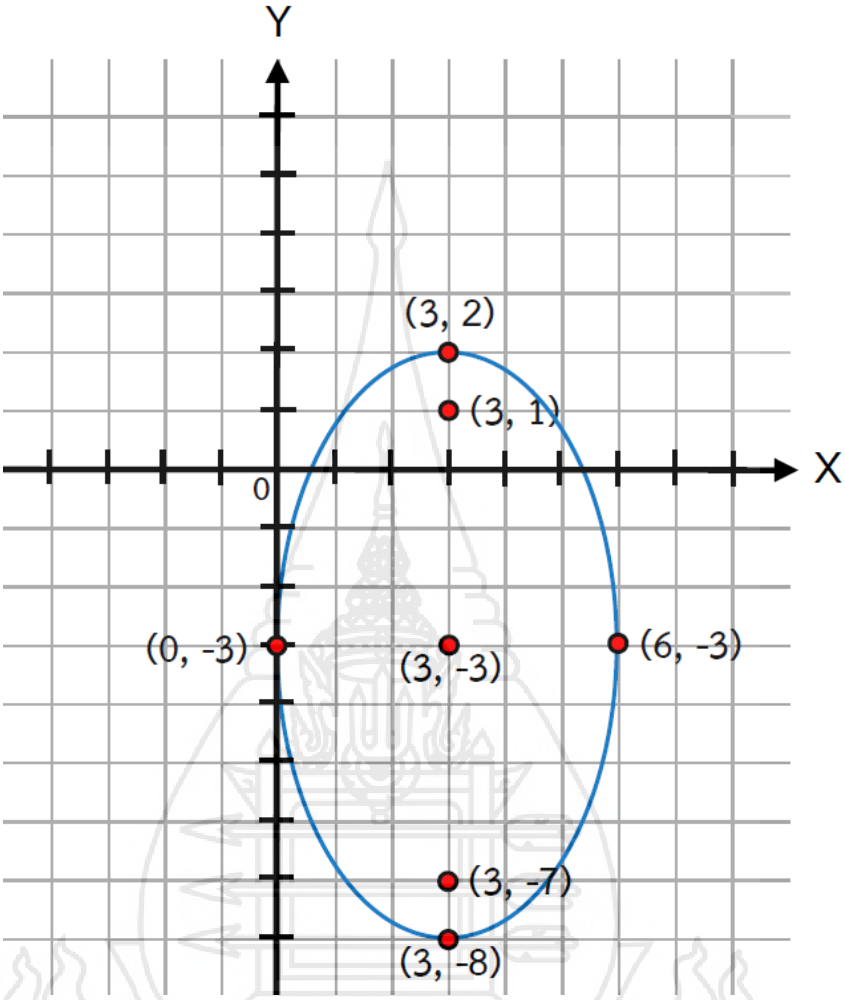
(0, 5) เลื่อนไปยัง (0 + 3, 5 – 3) = (3, 2) และ (0, –5) เลื่อนไปยัง (0 + 3, –5 – 3) = (3, –8)

(0, 4) เลื่อนไปยัง (0 + 3, 4 – 3) = (3, 1) และ (0, –4) เลื่อนไปยัง (0 + 3, –4 – 3) = (3, –7)

(3, 0) เลื่อนไปยัง (3 + 3, 0 – 3) = (6, –3) และ (–3, 0) เลื่อนไปยัง (–3 + 3, 0 – 3) = (0, –3)

แกนเอกยาว 2(5) = 10 หน่วย แกนโทยาว 2(3) = 6 หน่วย

3. เขียนกราฟของวงรีได้ดังนี้



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 9

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย จำนวน 18 ชั่วโมง
เรื่อง สมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง เวลา 1 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

พาราโบลา (parabola) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า โฟกัส (focus) ของพาราโบลา และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า เส้นบังคับ หรือ ไดเรกตริกซ์ (directrix) ของพาราโบลา

สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง คือ $x^2 = 4py$ ซึ่งมีโฟกัส คือ $(0, p)$ สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = -p$ และเลตัสเรกตัมยาว $|4p|$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลาจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่กำหนดได้
2. เขียนกราฟของพาราโบลาจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่กำหนดได้
3. เขียนสมการพาราโบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

สาระการเรียนรู้

1. บทนิยามเชิงเรขาคณิตของพาราโบลา
2. สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง
3. หาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลาจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา
4. เขียนกราฟของพาราโบลาจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา
5. เขียนสมการพาราโบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน

- แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ และทบทวนความรู้เดิม

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับการเกิดภาคตัดกรวยที่เรียกว่า พาราโบลา โดยใช้คำถาม “ภาคตัดกรวยที่เรียกว่า พาราโบลา เกิดขึ้นได้อย่างไร”

(แนวการตอบ พาราโบลา เป็นภาคตัดกรวยที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ที่ระนาบขนานกับตัวก่อกำเนิดของกรวย และระนาบตัดกรวยข้างเดียว)

3. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะของพาราโบลา โดยให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างสิ่งต่าง ๆ รอบตัว สิ่งก่อสร้าง วัสดุ อุปกรณ์ หรือลักษณะในธรรมชาติที่ส่วนประกอบบางอย่างมีลักษณะเป็นเส้นโค้งทางเรขาคณิตที่เรียกว่า พาราโบลา พร้อมทั้งแสดงภาพของเส้นโค้งพาราโบลาประกอบ ดังนี้

แนวการตอบ

พาราโบลาโดม ระบบอบแห้งพลังงานแสงอาทิตย์เพื่อแปรรูปผลผลิตทางการเกษตร
(https://www.greennetworkthailand.com)

สะพาน Gateshead Millennium สะพานทอดข้ามผ่านแม่น้ำไทน์ ประเทศอังกฤษ
มีโครงสร้างเป็นเส้นโค้งสองเส้นที่อยู่ขนานกัน (https://travel.mthai.com)

สะพานแขวน Akashi Kaikyo ในเมืองโกเบ ประเทศญี่ปุ่น (https://aquamarine-moscow.ru)

การเคลื่อนที่ของน้ำพุ

(https://www.forceproduct.com)

สะพานเดชาติวงศ์ จังหวัดนครสวรรค์

(https://thailandtourismdirectory.go.th)

4. ทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเรื่อง สมการของพาราโบลา ที่เป็นสมการฟังก์ชันกำลังสองที่อยู่ในรูป $y = ax^2 + bx + c$ โดยให้นักเรียนช่วยกันยกตัวอย่างสมการของพาราโบลา พร้อมทั้งบอกลักษณะของกราฟ

(แนวการตอบ $y = 2x^2$ กราฟมีลักษณะเป็นพาราโบลาหงาย, $y = -4x^2$ กราฟมีลักษณะเป็นพาราโบลาคว่ำ, $y = -3(x + 1)^2$ กราฟมีลักษณะเป็นพาราโบลาคว่ำ, $y = 3x^2 - 6x + 5$ กราฟมีลักษณะเป็นพาราโบลาหงาย)

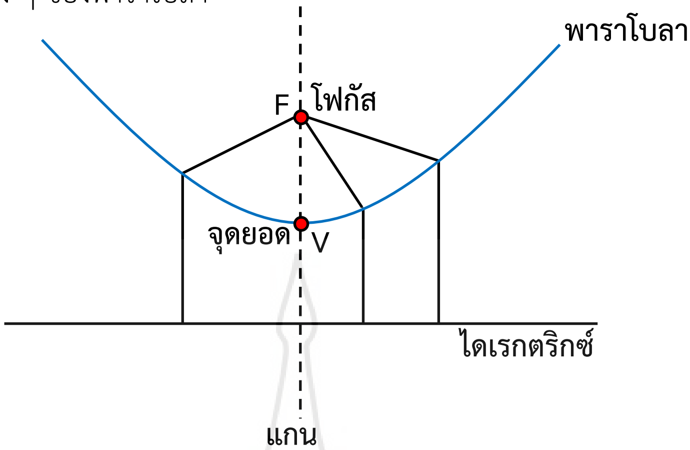
สอนเนื้อหาใหม่

5. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับบทนิยามเชิงเรขาคณิตของพาราโบลา ดังนี้

พาราโบลา (parabola) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า โฟกัส (focus) ของพาราโบลา และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า เส้นบังคับ หรือ ไดเรกตริกซ์ (directrix) ของพาราโบลา

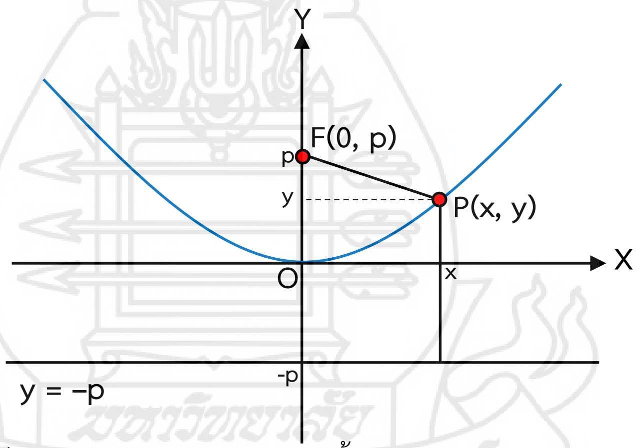
6. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับส่วนต่าง ๆ ของพาราโบลา และสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง โดยใช้รูปภาพประกอบ ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้

ส่วนต่าง ๆ ของพาราโบลา



จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสและไดเรกตริกซ์ เรียกว่า จุดยอด (vertex) ของพาราโบลา เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ เรียกว่า แกนสมมาตร (axis of symmetry) หรือแกน (axis) ของพาราโบลา ส่วนของเส้นตรงที่จุดปลายอยู่บนพาราโบลาตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านโฟกัสของพาราโบลา เรียกว่า เลตัสเรกตัม (latus rectum)

สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง



ถ้า P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา แล้วระยะทางจากจุด P ถึงโฟกัส F เท่ากับ $\sqrt{x^2 + (y-p)^2}$ หน่วย

ระยะทางจากจุด P ถึงไดเรกตริกซ์ เท่ากับ $|y + p|$ หน่วย

จากบทนิยามของพาราโบลา ระยะทางจากจุด P ถึงโฟกัส F ต้องเท่ากับระยะทางจากจุด P ถึงไดเรกตริกซ์

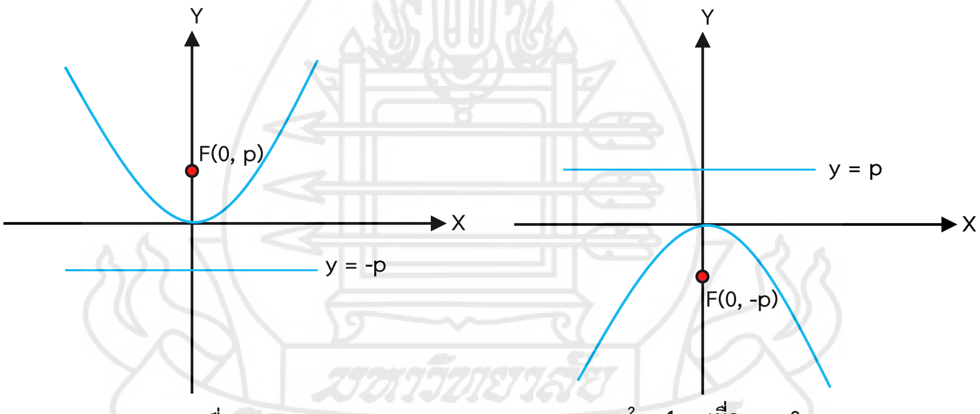
จะได้

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2 + (y-p)^2} &= |y + p| \\
\left(\sqrt{x^2 + (y-p)^2}\right)^2 &= |y + p|^2 \\
x^2 + (y-p)^2 &= (y+p)^2 \\
x^2 + y^2 - 2(y)(p) + p^2 &= y^2 + 2(y)(p) + p^2 \\
x^2 + y^2 + p^2 - y^2 - p^2 &= 2(y)(p) + 2(y)(p) \\
x^2 &= 4py
\end{aligned}
$$

จะได้ สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง คือ $x^2 = 4py$

ถ้า $p > 0$ แล้วพาราโบลาจะเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น แต่ถ้า $p < 0$ แล้วพาราโบลาจะเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

จุดยอด คือ (0, 0) โฟกัส คือ (0, p) สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = -p$ และเลตัสเรกตัมยาว $|4p|$ หน่วย



$x^2 = 4py$ เมื่อ $p > 0$ $\qquad$ $x^2 = 4py$ เมื่อ $p < 0$

7. ครูยกตัวอย่างการเขียนสมการพาราโบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ และการเขียนกราฟของพาราโบลา ดังนี้

ตัวอย่างที่ 1 จงเขียนสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสของพาราโบลาอยู่บนแกน Y ด้านลบ พร้อมทั้งเขียนพาราโบลา

วิธีทำ เนื่องจากจุดยอดของพาราโบลา คือ (0, 0) และโฟกัสของพาราโบลาอยู่บนแกน Y ด้านลบ จะได้ สมการพาราโบลาที่มีโฟกัสต่างกัน เช่น เมื่อกำหนดให้ โฟกัสของพาราโบลา คือ (0, –4)

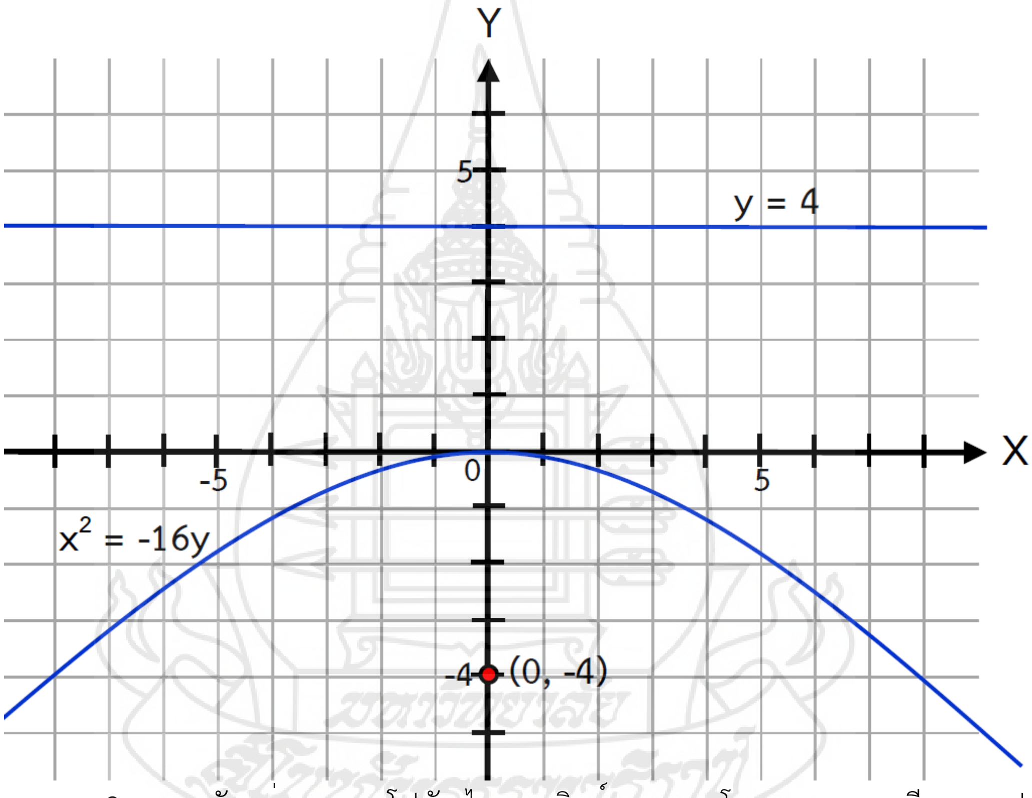
จะได้ว่า $p = -4$ และไดเรกตริกซ์ คือ $y = 4$

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4(-4)y$

$x^2 = -16y$

เนื่องจาก $p = -4$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

และเขียนกราฟของพาราโบลา ได้ดังนี้



8. ครูยกตัวอย่างการหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา และการเขียนกราฟของพาราโบลาจากสมการรูปแบบมาตรฐานที่กำหนดให้ ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $y = \frac{1}{12}x^2$ แล้วเขียนพาราโบลา พร้อมทั้งบอกพิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟพาราโบลา

<u>วิธีทำ</u> จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ เขียนในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$x^2 = 12y$

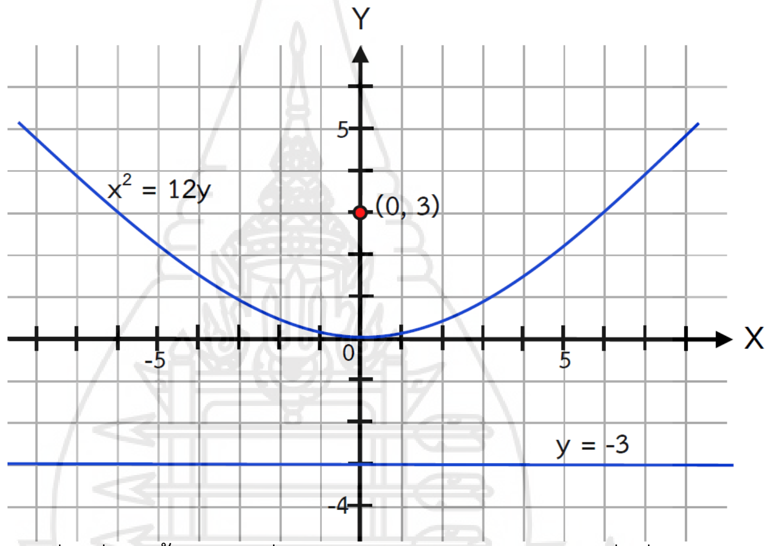
$x^2 = 4(3)y$

เมื่อเทียบกับสมการ $x^2 = 4py$ จะได้ $p = 3$

ดังนั้น โฟกัส คือ (0, 3) และไดเรกตริกซ์ คือ $y = -3$

เนื่องจาก $p = 3$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

และเขียนกราฟได้ดังนี้



9. จากตัวอย่างที่ 2 ให้นักเรียนช่วยกันบอกพิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟพาราโบลาที่มีสมการเป็น $y = \frac{1}{12}x^2$

(แนวการตอบ พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของพาราโบลา $y = \frac{1}{12}x^2$ เช่น (6, 3), (–6, 3), (12, 12) และ (–12, 12) เป็นต้น)

10. ครูแจกกระดาษให้นักเรียนคนละ 1 แผ่น แล้วแสดงคำถามปลายเปิด ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้ “ให้นักเรียนเขียนสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง คนละ 1 สมการ” เมื่อเขียนเสร็จแล้วให้นักเรียนออกมานำเสนอโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาหน้าชั้นเรียน พร้อมทั้งอภิปรายร่วมกันหน้าชั้นเรียน

– สรุปบทเรียน

11. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่า “ในวันนี้นักเรียนได้เรียนรู้อะไรบ้างเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง” แล้วให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็น จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

(แนวการตอบ ได้เรียนรู้เกี่ยวกับการหาโฟกัส สมการไดเรกตริกซ์ จากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา ได้เรียนรู้วิธีการเขียนสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ซึ่งในการเขียนสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาจะต้องทราบโฟกัสของพาราโบลา และได้เรียนรู้วิธีการเขียนกราฟของพาราโบลาจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา)

ขั้นที่ 2 ขั้นทำงานกลุ่มร่วมกัน

12. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มโดยคละความสามารถตามที่ครูแบ่งให้ ครูแจกใบความรู้และใบกิจกรรมที่ 9 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง ให้กับนักเรียน แล้วให้นักเรียนช่วยกันทำงานใบกิจกรรมเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ โดยให้นักเรียนปรึกษากันและช่วยเหลือกันภายในกลุ่ม และให้นักเรียนที่เข้าใจในเนื้อหาแล้วในแต่ละกลุ่มช่วยอธิบายและทบทวนความรู้ให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจในเนื้อหา เพื่อให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มเข้าใจเนื้อหา ซึ่งครูจะคอยดูแลและให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนสงสัยหรือต้องการความช่วยเหลือ

13. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง โดยให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อที่ผิดของตนเอง หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

ขั้นที่ 3 ขั้นการทดสอบย่อยรายบุคคล

14. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยรายบุคคลครั้งที่ 9 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง โดยในขั้นนี้นักเรียนจะไม่สามารถช่วยเหลือกันหรือปรึกษากันได้ นักเรียนทุกคนจะต้องตั้งใจทำแบบทดสอบ เพราะคะแนนของนักเรียนแต่ละคนจะมีผลต่อคะแนนของกลุ่ม

15. เมื่อนักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ โดยครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยไปพร้อมกัน หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

16. เมื่อตรวจข้อสอบเสร็จให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง แล้วรวมคะแนนพร้อมทั้งลงชื่อกำกับว่าใครเป็นคนตรวจ จากนั้นให้นักเรียนส่งแบบทดสอบคืนให้กับเพื่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มและให้รางวัลกลุ่ม

17. ให้นักเรียนแต่ละคนบอกคะแนนของตนเองที่ได้กับครู จากนั้นครูและนักเรียนทุกคนช่วยกันคำนวณหาคะแนนพัฒนาการ โดยนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบครั้งที่ 9 ไปลบคะแนน

พื้นฐานในครั้งที่ 8 แล้วนำไปคำนวณหาคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน และนำคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนไปคิดเป็นคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม และมอบรางวัลให้กับกลุ่มที่ได้คะแนนอยู่ใน 5 อันดับแรก

สื่อ อุปกรณ์การเรียนรู้ และแหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 9 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

2. ใบกิจกรรมที่ 9 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

การวัดและประเมินผล

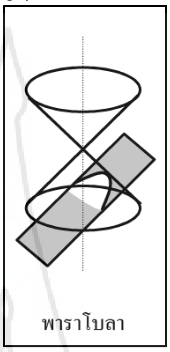
จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
นักเรียนสามารถ 1. หาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลาจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่กำหนดได้ 2. เขียนกราฟของพาราโบลาจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่กำหนดได้ 3. เขียนสมการพาราโบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้	- การตรวจใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง - สอบย่อยรายบุคคล - สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	- ใบกิจกรรม เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง - แบบทดสอบย่อยรายบุคคล เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง - แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	นักเรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไป

ใบความรู้ที่ 9

เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

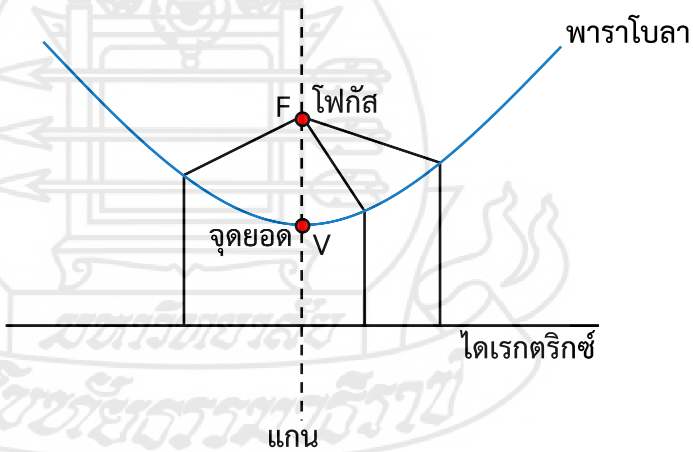
พาราโบลา

พาราโบลา เป็นภาคตัดกรวยที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ที่ระนาบขนานกับตัวก่อกำเนิดของกรวย และระนาบตัดกรวยข้างเดียว



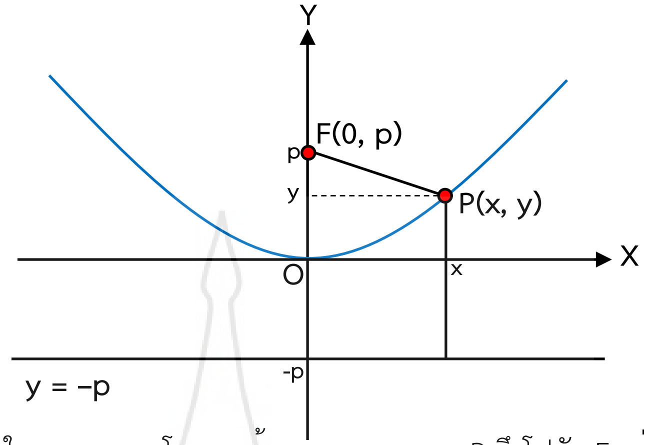
พาราโบลา (parabola) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งห่างจากจุดที่ตรึงอยู่กับที่จุดหนึ่งและเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่เส้นหนึ่งเป็นระยะทางเท่ากัน จุดที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า โฟกัส (focus) ของพาราโบลา และเส้นตรงที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า เส้นบังคับ หรือ ไดเรกตริกซ์ (directrix) ของพาราโบลา

ส่วนต่าง ๆ ของพาราโบลา



จุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสและไดเรกตริกซ์ เรียกว่า จุดยอด (vertex) ของพาราโบลา เส้นตรงที่ผ่านโฟกัสและตั้งฉากกับไดเรกตริกซ์ เรียกว่า แกนสมมาตร (axis of symmetry) หรือแกน (axis) ของพาราโบลา ส่วนของเส้นตรงที่จุดปลายอยู่บนพาราโบลาตั้งฉากกับแกนของพาราโบลาและผ่านโฟกัสของพาราโบลา เรียกว่า เลตัสเรกตัม (latus rectum)

สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง



ถ้า P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนพาราโบลา แล้วระยะทางจากจุด P ถึงโฟกัส F เท่ากับ $\sqrt{x^2 + (y-p)^2}$ หน่วย

ระยะทางจากจุด P ถึงไดเรกตริกซ์ เท่ากับ $|y + p|$ หน่วย

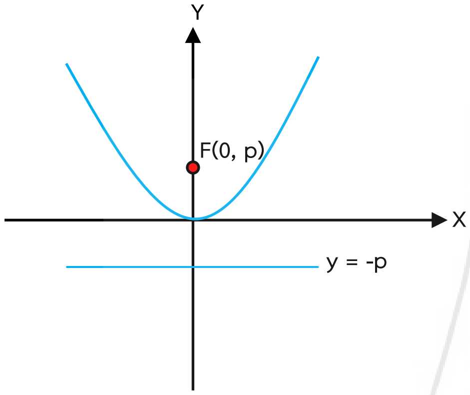
จากบทนิยามของพาราโบลา ระยะทางจากจุด P ถึงโฟกัส F ต้องเท่ากับระยะทางจากจุด P ถึงไดเรกตริกซ์

จะได้
$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p|$$
$$\left(\sqrt{x^2 + (y-p)^2}\right)^2 = |y + p|^2$$
$$x^2 + (y-p)^2 = (y + p)^2$$
$$x^2 + y^2 - 2(y)(p) + p^2 = y^2 + 2(y)(p) + p^2$$
$$x^2 + y^2 + p^2 - y^2 - p^2 = 2(y)(p) + 2(y)(p)$$
$$x^2 = 4py$$

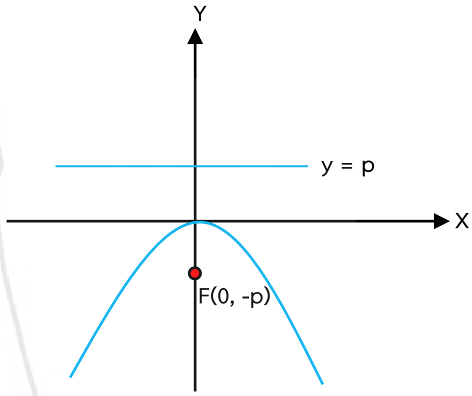
จะได้ สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง คือ $x^2 = 4py$

ถ้า $p > 0$ แล้วพาราโบลาจะเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น แต่ถ้า $p < 0$ แล้วพาราโบลาจะเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

จุดยอด คือ (0, 0) โฟกัส คือ (0, p) สมการไดเรกตริกซ์ คือ $y = -p$ และเลตัสเรกตัมยาว $|4p|$ หน่วย



$x^2 = 4py$ เมื่อ $p > 0$



$x^2 = 4py$ เมื่อ $p < 0$

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงเขียนสมการพาราโบลาที่มีจุดยอด (0, 0) และโฟกัส (0, –4) พร้อมทั้งเขียนพาราโบลา

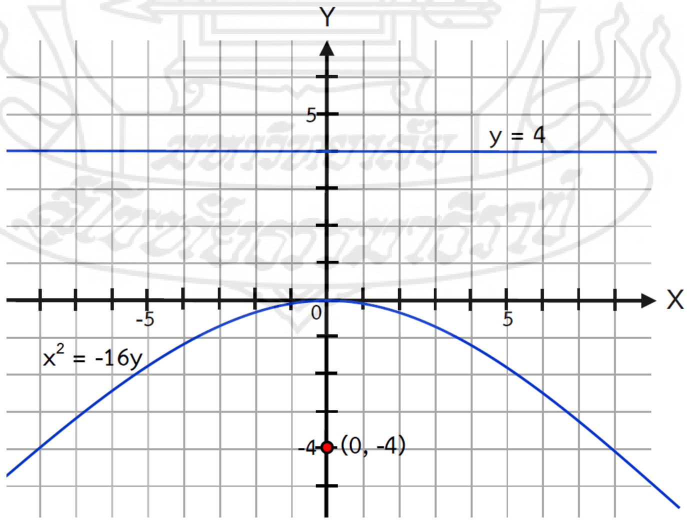
<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากจุดยอดของพาราโบลา คือ (0, 0) และโฟกัส คือ (0, –4)

จะได้ว่า $p = -4$ และไดเรกตริกซ์ คือ $y = 4$

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4(-4)y$

$x^2 = -16y$

เนื่องจาก $p = -4$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง และเขียนกราฟของพาราโบลา ได้ดังนี้



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $y = \frac{1}{12}x^2$ แล้วเขียนพาราโบลา

<u>วิธีทำ</u> จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ เขียนในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

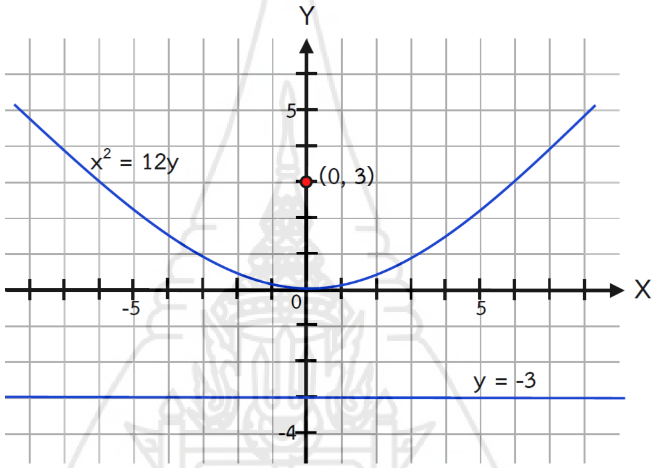
$x^2 = 12y$

$x^2 = 4(3)y$

เมื่อเทียบกับสมการ $x^2 = 4py$ จะได้ $p = 3$

ดังนั้น โฟกัส คือ (0, 3) และไดเรกตริกซ์ คือ $y = -3$

เนื่องจาก $p = 3$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น และเขียนกราฟได้ดังนี้



<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $y = \frac{1}{12}x^2$ แล้วเขียนพาราโบลา พร้อมทั้งบอกพิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของพาราโบลา

<u>วิธีทำ</u> จากสมการพาราโบลาที่กำหนดให้ เขียนในรูปแบบมาตรฐานได้ดังนี้

$x^2 = 12y$

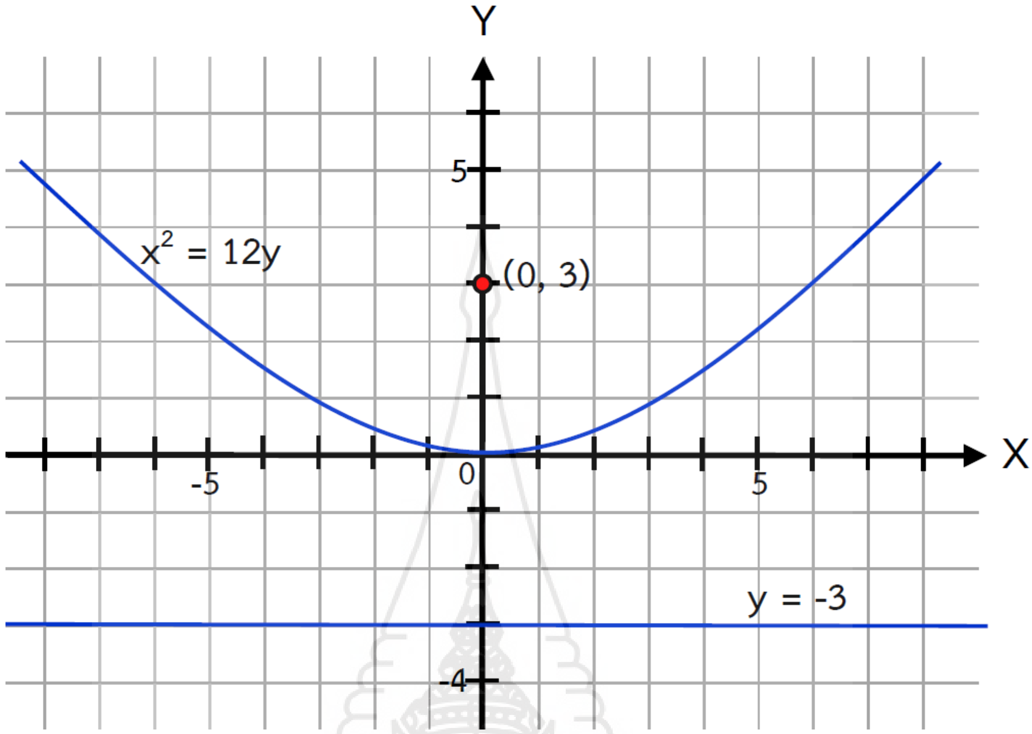
$x^2 = 4(3)y$

เมื่อเทียบกับสมการ $x^2 = 4py$ จะได้ $p = 3$

ดังนั้น โฟกัส คือ (0, 3) และไดเรกตริกซ์ คือ $y = -3$

เนื่องจาก $p = 3$ ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

และเขียนกราฟได้ดังนี้



พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของพาราโบลา $y = \frac{1}{12}x^2$ เช่น (6, 3), (–6, 3), (12, 12) และ (–12, 12) เป็นต้น

<u>ตัวอย่างที่ 4</u> จงเขียนสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสของพาราโบลาอยู่บนแกน Y ด้านบวก

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจากจุดยอดของพาราโบลา คือ (0, 0) และโฟกัสของพาราโบลาอยู่บนแกน Y ด้านบวก จะได้ สมการพาราโบลาที่มีโฟกัสต่างกัน เช่น เมื่อกำหนดให้โฟกัสของพาราโบลา คือ (0, 6) จะได้ว่า $p = 6$ และไดเรกตริกซ์ คือ $y = –6$

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4(6)y$

$x^2 = 24y$

ใบกิจกรรมที่ 9

เรื่อง สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

1. จงหาค่า p ที่ทำให้โฟกัสของพาราโบลา $x^2 = 4py$ อยู่บนแกน Y ด้านลบ พร้อมทั้งหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลา แล้วเขียนกราฟพาราโบลา

วิธีทำ ให้ p =.................... จะได้สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา คือ..

ดังนั้น โฟกัส คือ.. ไดเรกตริกซ์ คือ..

เลตัสเรกตัมยาว.. หน่วย

เนื่องจาก p..........0 จะได้ พาราโบลาเป็นเส้นโค้ง..

เขียนพาราโบลา ได้ดังนี้

2. จงหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $y = \frac{1}{2}x^2$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา และบอกพิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของพาราโบลา อย่างน้อย 3 จุด

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาได้ดังนี้..................................

เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ $x^2 = 4py$ จะได้ p =..................

ดังนั้น โฟกัส คือ.. ไดเรกตริกซ์ คือ...

เลตัสเรกตัมยาว.. หน่วย

เนื่องจาก p.........0 จะได้ พาราโบลาเป็นเส้นโค้ง...

เขียนพาราโบลา ได้ดังนี้

พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของพาราโบลา ได้แก่...

....

3. จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) โฟกัส คือ (0, –5)

....

....

....

2) ไดเรกตริกซ์ คือ y = –6

....

....

....

3) ความยาวของเลตัสเรกตัมเท่ากับ 4 หน่วย และโฟกัสอยู่บนแกน Y ด้านลบ

....

....

....

3. จงเขียนสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง และเขียนกราฟของพาราโบลา

1) แนวคิดในการเขียนสมการของพาราโบลา

....

....

....

2) แสดงวิธีทำในการหาสมการของพาราโบลา

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) เขียนกราฟของพาราโบลา ได้ดังนี้

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 9

เรื่อง สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งกำหนดโฟกัสของพาราโบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

----

2. จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของพาราโบลา พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

----

3. เขียนกราฟของพาราโบลาได้ดังนี้

เฉลย ใบกิจกรรมที่ 9

เรื่อง สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

1. จงหาค่า p ที่ทำให้โฟกัสของพาราโบลา $x^2 = 4py$ อยู่บนแกน Y ด้านลบ พร้อมทั้งหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลา แล้วเขียนกราฟพาราโบลา

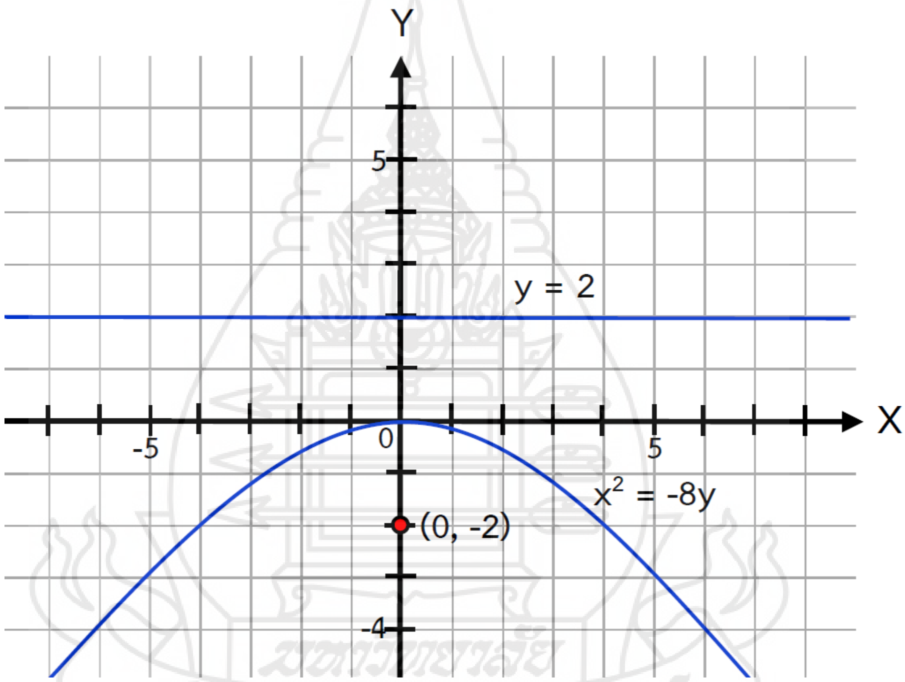
<u>แนวการตอบ</u> ให้ p = −2 จะได้สมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา คือ $x^2 = 4(-2)y$ หรือ $x^2 = -8y$

ดังนั้น โฟกัส คือ (0, −2) ไดเรกตริกซ์ คือ y = 2

เลตัสเรกตัมยาว |4(−2)| = 8 หน่วย

เนื่องจาก p < 0 จะได้ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

เขียนพาราโบลา ได้ดังนี้



2. จงหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวของเลตัสเรกตัมของพาราโบลา $y = \frac{1}{2}x^2$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา และบอกพิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของพาราโบลา อย่างน้อย 3 จุด

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาได้ดังนี้ $x^2 = 2y$ หรือ

$x^2 = 4\left(\frac{1}{2}\right)y$

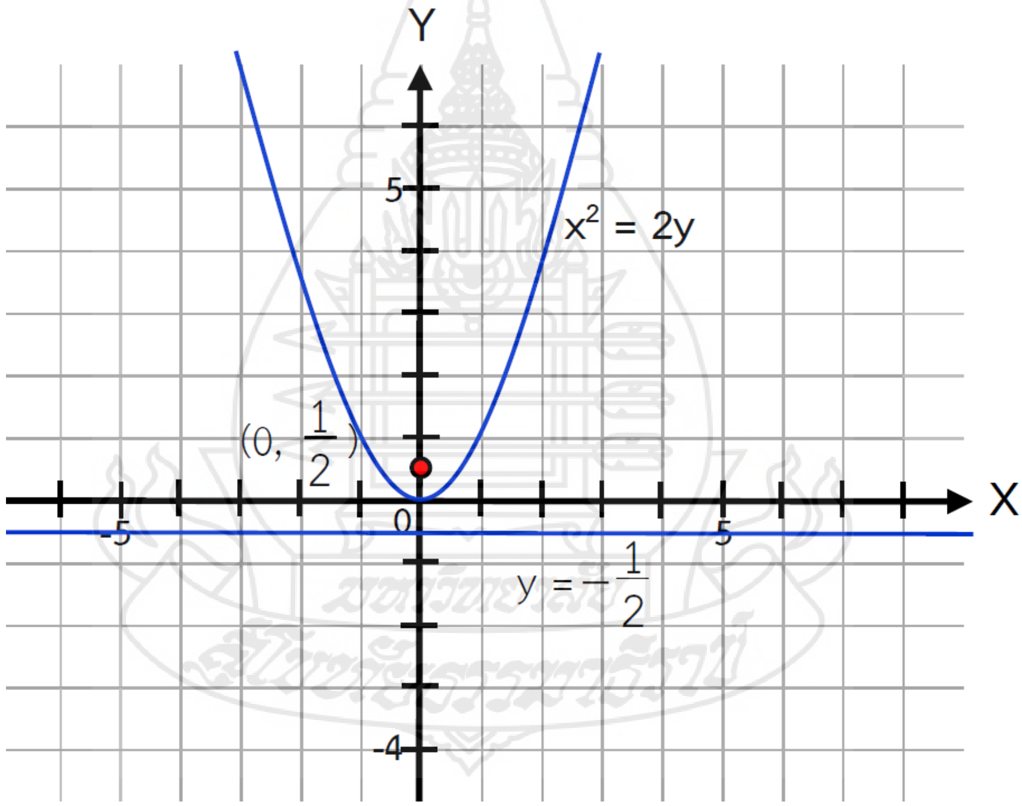
เมื่อเปรียบเทียบกับสมการ $x^2 = 4py$ จะได้ $p = \frac{1}{2}$

ดังนั้น โฟกัส คือ $(0, \frac{1}{2})$ ไดเรกตริกซ์ คือ $y = -\frac{1}{2}$

เลตัสเรกตัมยาว $|4(\frac{1}{2})| = 2$ หน่วย

เนื่องจาก $p > 0$ จะได้ พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

เขียนพาราโบลา ได้ดังนี้



พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของพาราโบลา ได้แก่ <u>แนวการตอบ</u> (2, 2), (4, 8) และ (–4, 8)

2. จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และสอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) โฟกัส คือ (0, –5)

<u>ตอบ</u> เนื่องจาก จุดยอด คือ (0, 0) และโฟกัส คือ (0, –5) จะได้ว่า p = –5

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4(-5)y$ หรือ $x^2 = -20y$

2) ไดเรกตริกซ์ คือ y = –6

<u>ตอบ</u> เนื่องจาก จุดยอด คือ (0, 0) และไดเรกตริกซ์ คือ y = –6 จะได้ว่า p = 6

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4(6)y$ หรือ $x^2 = 24y$

3) ความยาวของเลตัสเรกตัมเท่ากับ 4 หน่วย และโฟกัสอยู่บนแกน Y ด้านลบ

<u>ตอบ</u> เนื่องจาก จุดยอด คือ (0, 0) และความยาวของเลตัสเรกตัมเท่ากับ 4 หน่วย จะได้ |4p| = 4

โฟกัสอยู่บนแกน Y ด้านลบ จะได้ว่า p = –1

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4(-1)y$ หรือ $x^2 = -4y$

3. จงเขียนสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง และเขียนกราฟของพาราโบลา

1) แนวคิดในการเขียนสมการของพาราโบลา

<u>แนวการตอบ</u> เนื่องจากพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง ดังนั้น ต้องกำหนดโฟกัสของพาราโบลาให้อยู่บนแกน Y

เมื่อกำหนดโฟกัสของพาราโบลาแล้วจะได้ค่า p นำค่า p ไปแทนในสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง $x^2 = 4py$ จากนั้นหาไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา

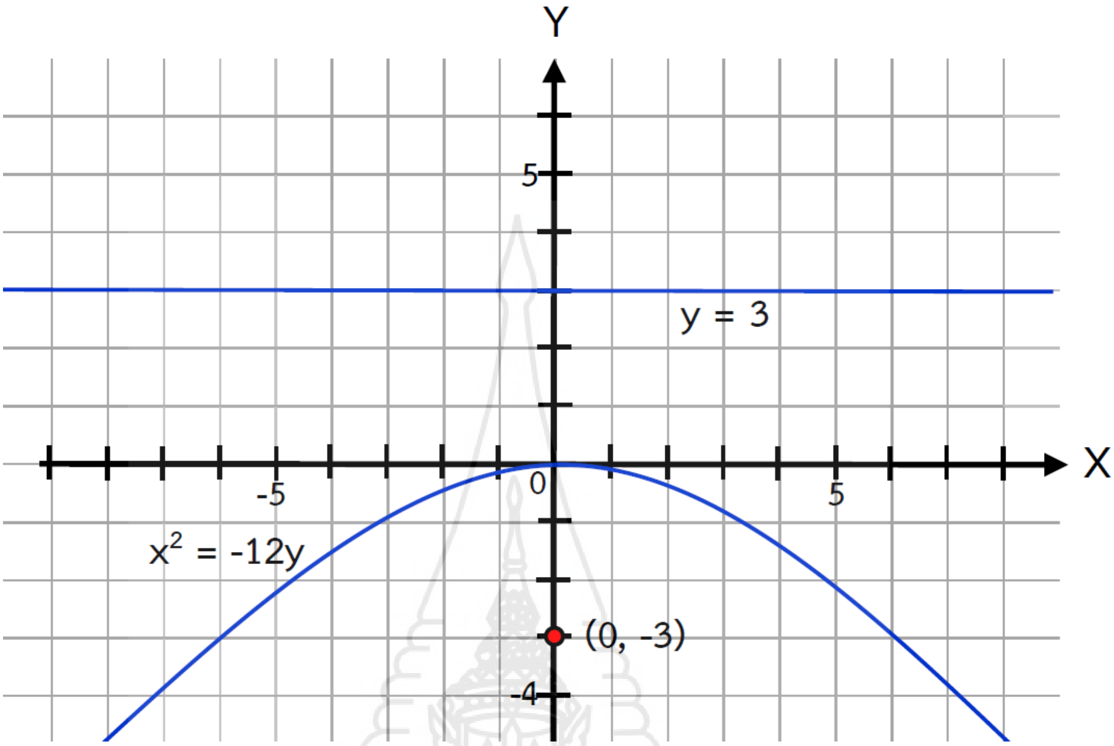
2) แสดงวิธีทำในการหาสมการของพาราโบลา

<u>แนวการตอบ</u> ให้โฟกัสของพาราโบลา คือ (0, –3) จะได้ p = –3 และไดเรกตริกซ์ คือ y = 3

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4(-3)y$ หรือ $x^2 = -12y$

เนื่องจาก p = –3 ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

3) เขียนกราฟของพาราโบลาได้ดังนี้



เฉลย แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 9

เรื่อง สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง

จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งกำหนดโฟกัสของพาราโบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

แนวการตอบ เนื่องจากพาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง จะได้ว่าโฟกัสของพาราโบลาอยู่บนแกน Y

เมื่อกำหนดโฟกัสของพาราโบลาแล้วจะได้ค่า p นำค่า p ไปแทนในสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง $x^2 = 4py$ จากนั้นหาไดเรกตริกซ์ของพาราโบลาแล้วนำไปเขียนกราฟของพาราโบลา

จากโจทย์ กำหนดให้โฟกัสของพาราโบลาอยู่ที่ (0, 2.5)

2. จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของพาราโบลา พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

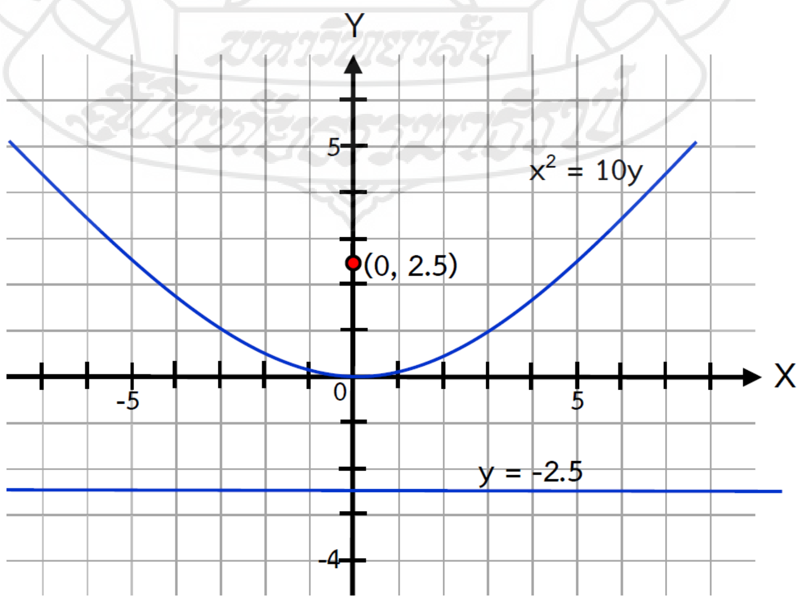
แนวการตอบ ให้โฟกัสของพาราโบลา คือ (0, 2.5) จะได้ p = 2.5 และไดเรกตริกซ์ คือ y = –2.5

ดังนั้น สมการพาราโบลา คือ $x^2 = 4(2.5)y$

$x^2 = 10y$

เนื่องจาก p = 2.5 ดังนั้น พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

3. เขียนกราฟของพาราโบลาได้ดังนี้



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย จำนวน 18 ชั่วโมง
เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา เวลา 1 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

การเลื่อนกราฟของพาราโบลาเป็นการเลื่อนกราฟของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) ไปอยู่ที่จุดยอด (h, k) ตามแนวแกน X และแกน Y ซึ่งพิกัดของจุดต่าง ๆ จะเลื่อนขนานตามจุดยอดที่เปลี่ยนไป

สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง คือ $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน คือ $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่กำหนดได้
2. เขียนกราฟของพาราโบลาจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่กำหนดได้
3. เขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดได้

สาระการเรียนรู้

1. การเลื่อนกราฟของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) ไปอยู่ที่จุดยอด (h, k) ตามแนวแกน X และแกน Y
2. การหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา
3. การเขียนกราฟของพาราโบลาจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา
4. การเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาจากเงื่อนไขที่กำหนด

กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน

- แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ และทบทวนความรู้เดิม

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวนอนและแนวตั้ง โดยครูตั้งคำถามว่า “ให้นักเรียนเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวนอนและแนวตั้ง” โดยให้นักเรียนเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา คนละหนึ่งสมการ แล้วให้นักเรียนหาโฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลาที่สร้างขึ้น จากนั้นให้ตัวแทนนักเรียนออกมานำเสนอสมการที่สร้างขึ้นหน้าชั้นเรียน

3. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับการเลื่อนขนานกราฟในแนวตั้งและแนวนอน ดังนี้

สำหรับสมการใด ๆ ถ้าแทน x ด้วย $x - h$ หรือ $x + h$ กราฟของสมการใหม่คือ กราฟของสมการเดิมที่เลื่อนไปตามแนวนอน ถ้าแทน y ด้วย $y - k$ หรือ $y + k$ กราฟของสมการใหม่คือกราฟของสมการเดิมที่เลื่อนไปตามแนวตั้ง ดังนี้

1) แทน x ด้วย $x - h$ กราฟจะเลื่อนไปทางขวา h หน่วย

2) แทน x ด้วย $x + h$ กราฟจะเลื่อนไปทางซ้าย h หน่วย

3) แทน y ด้วย $y - k$ กราฟจะเลื่อนขึ้นบน k หน่วย

4) แทน y ด้วย $y + k$ กราฟจะเลื่อนลงล่าง k หน่วย

– สอนเนื้อหาใหม่

4. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับการเลื่อนกราฟของพาราโบลา และสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) ดังนี้

การเลื่อนกราฟของพาราโบลาเป็นการเลื่อนกราฟของพาราโบลา $x^2 = 4py$ และ $y^2 = 4px$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0, 0)$ ไปอยู่ที่จุดยอด (h, k) ตามแนวแกน X และแกน Y ซึ่งพิกัดของจุดต่าง ๆ จะเลื่อนขนานตามจุดยอดที่เปลี่ยนไป

สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง คือ $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน คือ $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

5. ครูยกตัวอย่างการเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-6, 3)$ และกราฟของพาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-6, 3)$ และกราฟของพาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา จะได้ว่า $p > 0$ และแกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวนอน

จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีโฟกัสแตกต่างกัน เช่น

กำหนดให้โฟกัสอยู่ที่จุด $(-2, 3)$ จะได้ว่า ระยะทางจากจุดยอด $(-6, 3)$ ไปยังโฟกัส $(-2, 3)$ ของพาราโบลา เท่ากับ 4 หน่วย จะได้ $p = 4$

จาก สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวนอน $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา คือ $(y - 3)^2 = 4(4)(x - (-6))$

หรือ $(y - 3)^2 = 16(x + 6)$

6. ครูยกตัวอย่างการหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ ความยาวเลตัสเรกตัม และการเขียนกราฟของพาราโบลาจากสมการในรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลา พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา $(x - 1)^2 = 8(y + 3)$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ $(x - 1)^2 = 8(y + 3)$

จะได้ว่า $(x - 1)^2 = 4(2)(y - (-3))$

เมื่อเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี $(x - h)^2 = 4p(y - k)$ จะได้

$h = 1$, $k = -3$ และ $p = 2$

ดังนั้น พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่ $(1, -3)$ และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งเกิดจากการเลื่อนพาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการ $x^2 = 4(2)y$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้งไปทางขวา 1 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย

เนื่องจาก โฟกัสของพาราโบลา $x^2 = 8y$ คือ $(0, 2)$ และไดเรกตริกซ์ คือ $y = -2$

ถ้าเลื่อนโฟกัสของพาราโบลาไปทางขวา 1 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย จะได้ว่าโฟกัสและไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $(x - 1)^2 = 8(y + 3)$ เลื่อนไปดังนี้

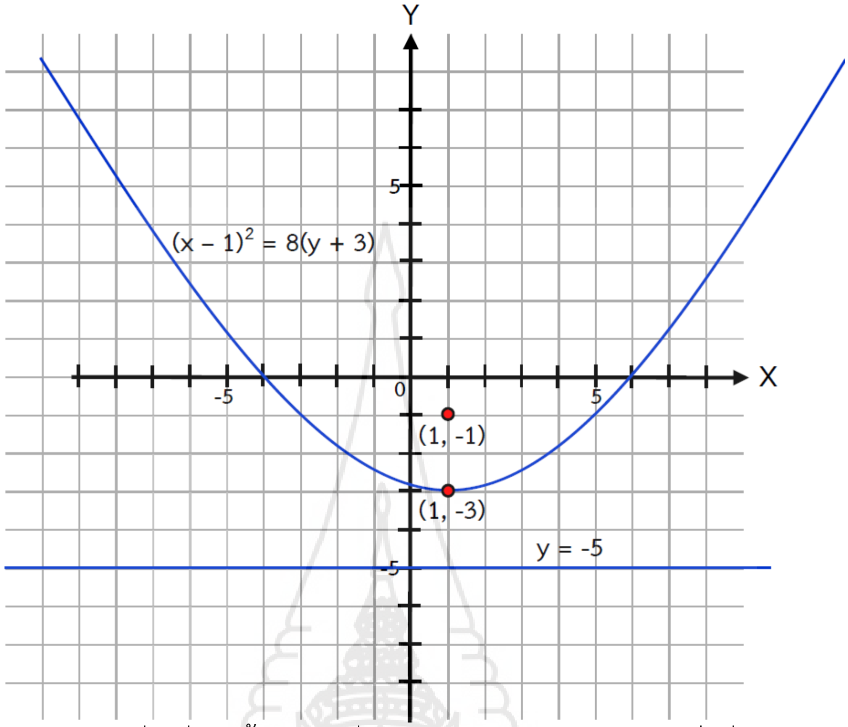
โฟกัส $(0, 2)$ เลื่อนยังจุด $(0 + 1, 2 - 3) = (1, -1)$

ไดเรกตริกซ์เลื่อนไปยังเส้นตรง $y = -2 - 3 = -5$

เลตัสเรกตัมยาว $|4(2)| = 8$ หน่วย

เนื่องจาก $p > 0$ จะได้พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

เขียนกราฟพาราโบลา ได้ดังนี้



7. จากตัวอย่างที่ 2 ให้นักเรียนช่วยกันบอกพิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของพาราโบลา $(x-1)^2 = 8(y+3)$

(แนวการตอบ พิกัดของจุด (x, y) ที่อยู่บนกราฟของพาราโบลา $(x-1)^2 = 8(y+3)$ เช่น $(-3, -1)$, $(5, -1)$ และ $(-6, \frac{25}{8})$ เป็นต้น

8. ครูแจกกระดาษให้นักเรียนคนละ 1 แผ่น แล้วแสดงคำถามปลายเปิด ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้ “ให้นักเรียนเขียนสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) คนละ 1 สมการ” เมื่อเขียนเสร็จแล้วครูสุ่มตัวแทนนักเรียนออกมานำเสนอสมการรูปมาตรฐานที่สร้างขึ้น พร้อมทั้งอธิบายการเลื่อนขนานกราฟของสมการ จุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลาหน้าชั้นเรียน

– สรุปบทเรียน

9. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่า “ในวันนี้นักเรียนได้เรียนรู้อะไรบ้างเกี่ยวกับการเลื่อนกราฟของพาราโบลา” แล้วให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็น จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับการเลื่อนกราฟของพาราโบลา

(แนวการตอบ ได้เรียนรู้เกี่ยวกับการเลื่อนกราฟของพาราโบลา การเลื่อนกราฟของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) ไปอยู่ที่จุดยอด (h, k) ตามแนวแกน X และแกน Y ซึ่งพิกัดของจุดยอด โฟกัส และไดเรกตริกซ์ จะเลื่อนขนานตามจุดยอดที่เปลี่ยนไป)

ขั้นที่ 2 ขั้นทำงานกลุ่มร่วมกัน

10. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มโดยคละความสามารถตามที่ครูแบ่งให้ ครูแจกใบความรู้และใบกิจกรรมที่ 11 เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา ให้กับนักเรียน แล้วให้นักเรียนช่วยกันทำงานใบกิจกรรมเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ โดยให้นักเรียนปรึกษากันและช่วยเหลือกันภายในกลุ่ม และให้นักเรียนที่เข้าใจในเนื้อหาแล้วในแต่ละกลุ่มช่วยอธิบายและทบทวนความรู้ให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจในเนื้อหา เพื่อให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มเข้าใจเนื้อหา ซึ่งครูจะคอยดูแลและให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนสงสัยหรือต้องการความช่วยเหลือ

11. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบกิจกรรม เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา โดยให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อที่ผิดของตนเอง หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

ขั้นที่ 3 ขั้นการทดสอบย่อยรายบุคคล

12. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยรายบุคคลครั้งที่ 11 เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา โดยในขั้นนี้นักเรียนจะไม่สามารถช่วยเหลือกันหรือปรึกษากันได้ นักเรียนทุกคนจะต้องตั้งใจทำแบบทดสอบ เพราะคะแนนของนักเรียนแต่ละคนจะมีผลต่อคะแนนของกลุ่ม

13. เมื่อนักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ โดยครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยไปพร้อมกัน หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

14. เมื่อตรวจข้อสอบเสร็จให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง แล้วรวมคะแนนพร้อมทั้งลงชื่อกำกับว่าใครเป็นคนตรวจ จากนั้นให้นักเรียนส่งแบบทดสอบคืนให้กับเพื่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มและให้รางวัลกลุ่ม

15. ให้นักเรียนแต่ละคนบอกคะแนนของตนเองที่ได้กับครู จากนั้นครูและนักเรียนทุกคนช่วยกันคำนวณหาคะแนนพัฒนาการ โดยนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบครั้งที่ 11 ไปลบคะแนนพื้นฐานในครั้งที่ 10 แล้วนำไปคำนวณหาคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน และนำคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนไปคิดเป็นคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม และมอบรางวัลให้กับกลุ่มที่ได้คะแนนอยู่ใน 5 อันดับแรก

สื่อ อุปกรณ์การเรียนรู้ และแหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 11 เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา
2. ใบกิจกรรมที่ 11 เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา

การวัดและประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
นักเรียนสามารถ 1. หาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่กำหนดได้ 2. เขียนกราฟของพาราโบลาจากสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาที่กำหนดได้ 3. เขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดได้	- การตรวจใบกิจกรรม เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา - สอบย่อยรายบุคคล - สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	- ใบกิจกรรม เรื่อง การเลื่อนกราฟของวงรี - แบบทดสอบย่อยรายบุคคล เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา - แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	นักเรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไป

ใบความรู้ที่ 11

เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา

การเลื่อนกราฟของพาราโบลาเป็นการเลื่อนกราฟของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (0, 0) ไปอยู่ที่จุดยอด (h, k) ตามแนวแกน X และแกน Y ซึ่งพิกัดของจุดต่าง ๆ จะเลื่อนขนานตามจุดยอดที่เปลี่ยนไป

สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง คือ $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนสมมาตรอยู่ในแนวนอน คือ $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลา พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา $(x - 1)^2 = 8(y + 3)$

วิธีทำ จากสมการ $(x - 1)^2 = 8(y + 3)$

จะได้ว่า $(x - 1)^2 = 4(2)(y - (-3))$

เมื่อเทียบกับสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

จะได้ $h = 1$, $k = -3$ และ $p = 2$

ดังนั้น พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่ (1, −3) และแกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง ซึ่งเกิดจากการเลื่อนพาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการ $x^2 = 4(2)y$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิด แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้งไปทางขวา 1 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย

เนื่องจาก โฟกัสของพาราโบลา $x^2 = 8y$ คือ (0, 2) และไดเรกตริกซ์ คือ $y = -2$

ถ้าเลื่อนโฟกัสของพาราโบลาไปทางขวา 1 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย จะได้ว่าโฟกัสและไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $(x - 1)^2 = 8(y + 3)$ เลื่อนไปดังนี้

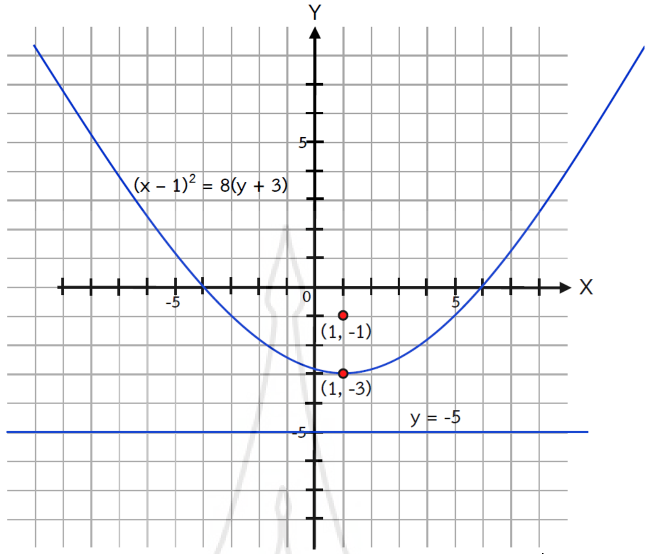
โฟกัส (0, 2) เลื่อนยังจุด (0 + 1, 2 − 3) = (1, −1)

ไดเรกตริกซ์เลื่อนไปยังเส้นตรง $y = -2 - 3 = -5$

เลตัสเรกตัมยาว $|4(2)| = 8$ หน่วย

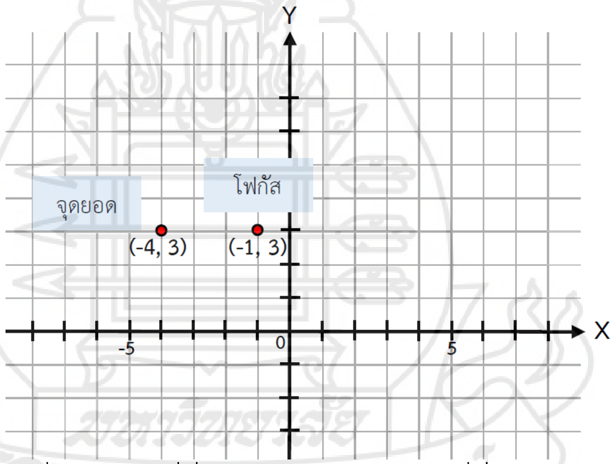
เนื่องจาก $p > 0$ จะได้พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น

เขียนกราฟพาราโบลา ได้ดังนี้



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (–4, 3) และโฟกัสอยู่ที่จุด (–1, 3)

<u>วิธีทำ</u>



เนื่องจาก พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (–4, 3) และโฟกัสอยู่ที่จุด (–1, 3) จะได้ว่า แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวนอน พาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา ($p > 0$)

ระยะทางจากจุดยอด (–4, 3) ไปยังโฟกัส (–1, 3) ของพาราโบลา เท่ากับ 3 หน่วย

จะได้ $p = 3$

จาก สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวนอน $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา คือ $(y - 3)^2 = 4(3)(x - (-4))$

หรือ $(y - 3)^2 = 12(x + 4)$

<u>ตัวอย่างที่ 3</u> จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-6, 3)$ และกราฟของพาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก พาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(-6, 3)$

และกราฟของพาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านขวา

จะได้ว่า $p > 0$ และแกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวนอน

จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีโฟกัสแตกต่างกัน เช่น

1) กำหนดให้โฟกัสอยู่ที่จุด $(-2, 3)$ จะได้ว่า ระยะทางจากจุดยอด $(-6, 3)$ ไปยังโฟกัส $(-2, 3)$ ของพาราโบลา เท่ากับ 4 หน่วย จะได้ $p = 4$

จาก สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวนอน $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา คือ $(y - 3)^2 = 4(4)(x - (-6))$

หรือ $(y - 3)^2 = 16(x + 6)$

2) กำหนดให้โฟกัสอยู่ที่จุด $(1, 3)$ จะได้ว่า ระยะทางจากจุดยอด $(-6, 3)$ ไปยังโฟกัส $(1, 3)$ ของพาราโบลา เท่ากับ 7 หน่วย จะได้ $p = 7$

จาก สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวนอน $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา คือ $(y - 3)^2 = 4(7)(x - (-6))$

หรือ $(y - 3)^2 = 28(x + 6)$

ใบกิจกรรมที่ 11

เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา

1. จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา

1) $(y + 3)^2 = -12(x - 4)$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาได้ดังนี้..

จะได้ $h =$.................... , $k =$.............................. และ $p =$..

จุดยอด คือ..

เกิดจากการเลื่อนพาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการ....................................ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด

กำเนิดไปทาง(ขวา/ซ้าย)................หน่วย และ(ลงล่าง/ขึ้นบน)........................หน่วย

โฟกัสของพาราโบลา คือ..

ไดเรกตริกซ์ คือ...

เลตัสเรกตัมยาว..หน่วย

แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนว..

ลักษณะของกราฟพาราโบลา..

เขียนกราฟของพาราโบลา ได้ดังนี้

2) $(x + 3)^2 = -16(y - 5)$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาได้ดังนี้..............................

จะได้ h =................. , k =........................... และ p =..

จุดยอด คือ...

เกิดจากการเลื่อนพาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการ..................................... ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดไปทาง(ขวา/ซ้าย)............... หน่วย และ(ลงล่าง/ขึ้นบน).......................หน่วย

โฟกัสของพาราโบลา คือ..

ไดเรกตริกซ์ คือ...

เลตัสเรกตัมยาว....................................หน่วย

แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนว..

ลักษณะของกราฟพาราโบลา...

เขียนกราฟของพาราโบลา ได้ดังนี้

2. จงเขียนสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) และโฟกัสห่างจากจุดยอด 4 หน่วย

1) แนวคิดในการสร้างสมการของพาราโบลาตามเงื่อนไขของโจทย์

2) แสดงวิธีทำในการหาสมการของพาราโบลา

3) เขียนกราฟของพาราโบลา ได้ดังนี้

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 11

เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา

จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาซึ่งเกิดจากการเลื่อนพาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการ $x^2 = 8y$ แล้วอธิบายการเลื่อนขนานกราฟ พร้อมทั้งหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ ความยาวเลตัสเรกตัม และเขียนกราฟของพาราโบลา

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ แล้วเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ พร้อมทั้งอธิบายการเลื่อนขนานกราฟของพาราโบลาที่เขียน

....

....

....

....

....

2. จงแสดงวิธีทำในการหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลา พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

....

....

....

....

....

....

....

....

3. เขียนกราฟของพาราโบลาได้ดังนี้

เฉลย ใบกิจกรรมที่ 11

เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา

1. จงหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัม พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา

1) $(y + 3)^2 = -12(x - 4)$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาได้ดังนี้ $(y + 3)^2 = 4(-3)(x - 4)$

จะได้ $h = 4$, $k = -3$ และ $p = -3$

จุดยอด คือ $(4, -3)$

เกิดจากการเลื่อนพาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการ $y^2 = -12x$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางขวา 4 หน่วย และลงล่าง 3 หน่วย

โฟกัสของพาราโบลา คือ $(-3 + 4, 0 - 3) = (1, -3)$

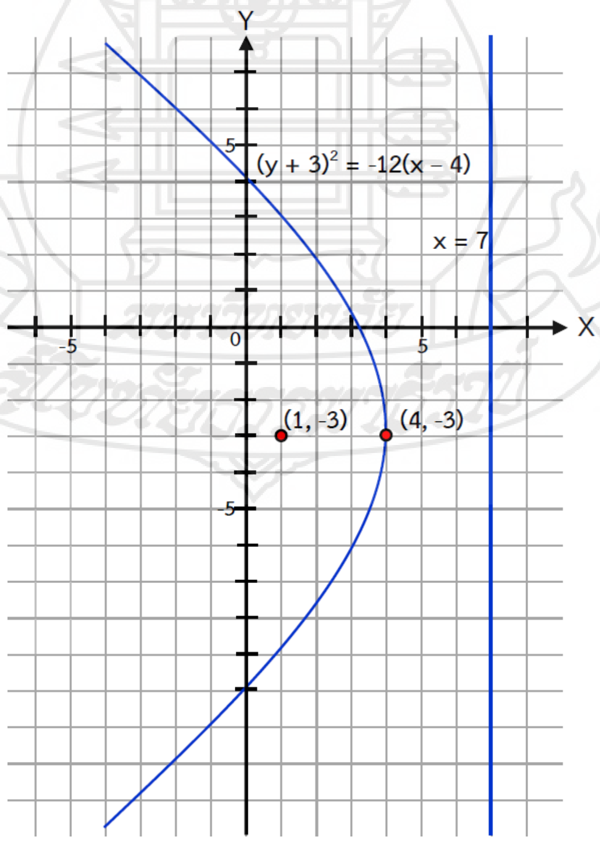
ไดเรกตริกซ์ คือ $x = 3 + 4 = 7$

เลตัสเรกตัมยาว $|4(-3)| = 12$ หน่วย

แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวนอน

ลักษณะของกราฟพาราโบลาเป็นเส้นโค้งเปิดไปทางด้านซ้าย

เขียนกราฟของพาราโบลา ได้ดังนี้



2) $(x + 3)^2 = -16(y - 5)$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลาได้ดังนี้ $(x + 3)^2 = 4(-4)(y - 5)$

จะได้ $h = -3$, $k = 5$ และ $p = -4$

จุดยอด คือ $(-3, 5)$

เกิดจากการเลื่อนพาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการ $x^2 = -16y$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางซ้าย 3 หน่วย และขึ้นบน 5 หน่วย

โฟกัสของพาราโบลา คือ $(0 - 3, -4 + 5) = (-3, 1)$

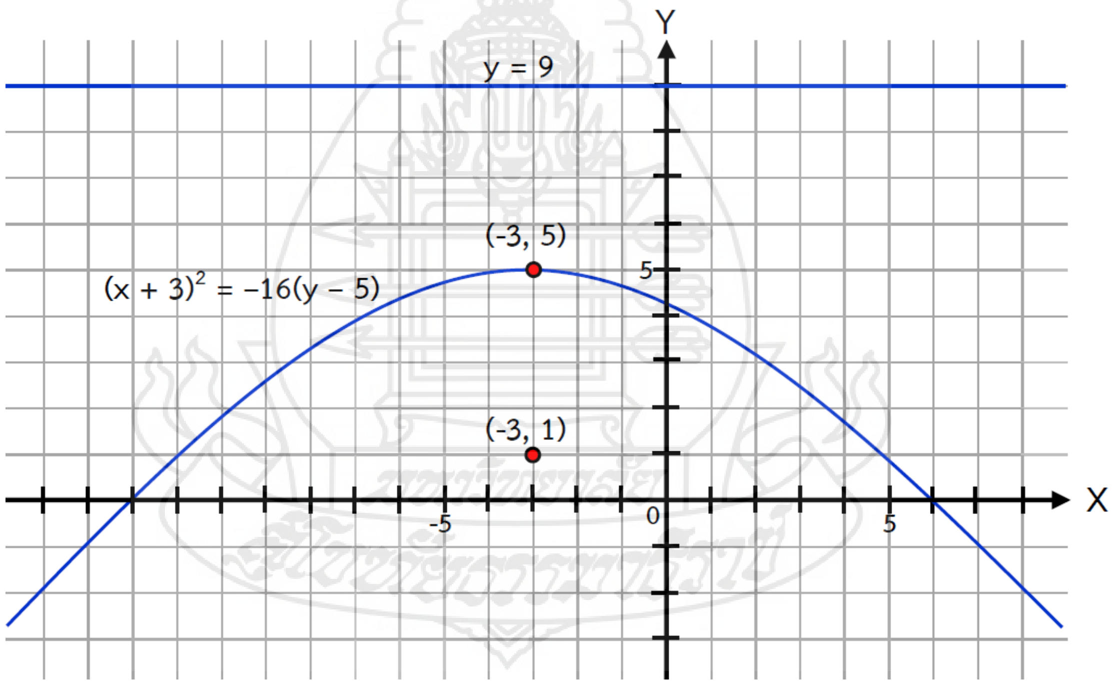
ไดเรกตริกซ์ คือ $y = 4 + 5 = 9$

เลตัสเรกตัมยาว $|4(-4)| = 16$ หน่วย

แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวตั้ง

ลักษณะของกราฟพาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง

เขียนกราฟของพาราโบลา ได้ดังนี้



2. จงเขียนสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด (h, k) และโฟกัสห่างจากจุดยอด 4 หน่วย

1) แนวคิดในการสร้างสมการของพาราโบลาตามเงื่อนไขของโจทย์

<u>แนวการตอบ</u> จากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้โฟกัสห่างจากจุดยอด 4 หน่วย จะได้ว่า $p = 4$ หรือ -4 จากนั้นกำหนดจุดยอดของพาราโบลาให้อยู่ที่พิกัด (h, k) แล้วนำค่า p, h และ k แทนลงในสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา

2) แสดงวิธีทำในการหาสมการของพาราโบลา

<u>แนวการตอบ</u> กำหนดให้พาราโบลามีจุดยอดอยู่ที่พิกัด (2, 3) แกนสมมาตรอยู่ในแนวตั้ง และกราฟของพาราโบลาเป็นเส้นโค้งคว่ำลง จะได้ว่า $p = -4$

จากสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา คือ $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

แทน $h = 2$, $k = 3$ และ $p = -4$ ลงในสมการ

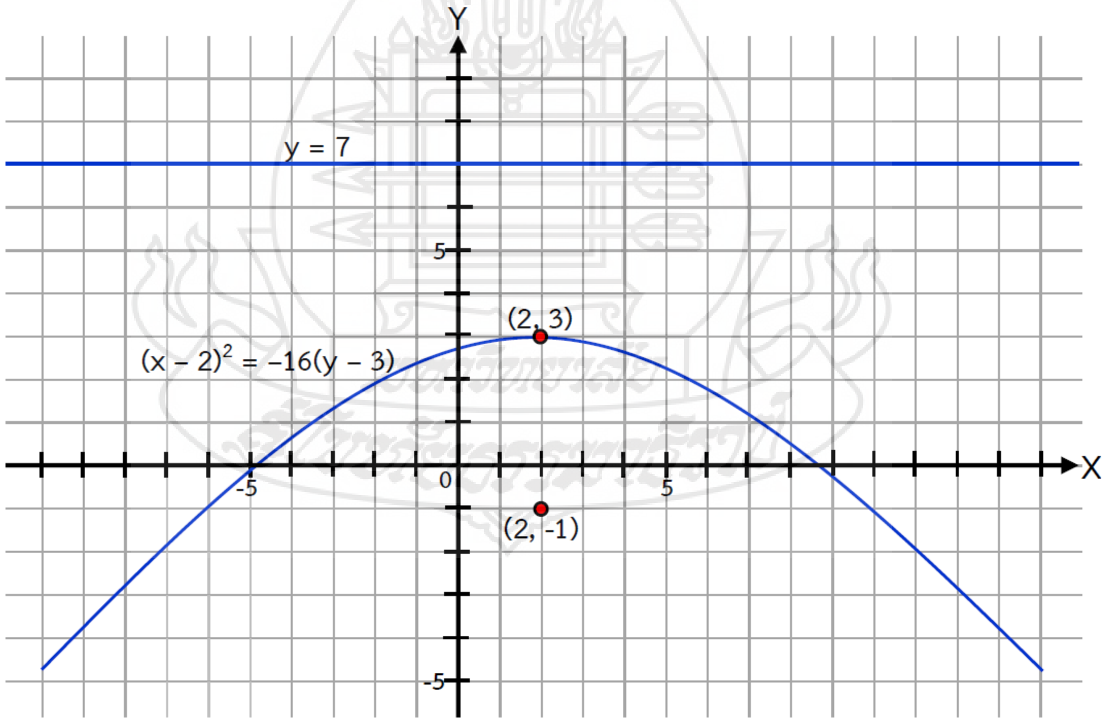
จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา คือ $(x - 2)^2 = 4(-4)(y - 3)$

หรือ $(x - 2)^2 = -16(y - 3)$

3) เขียนกราฟของพาราโบลา ได้ดังนี้

พาราโบลา $(x - 2)^2 = -16(y - 3)$ มีจุดยอด คือ (2, 3) โฟกัส คือ $(0 + 2, -4 + 3) = (2, -1)$

ไดเรกตริกซ์ คือ $y = 4 + 3 = 7$



เฉลย แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 11

เรื่อง การเลื่อนกราฟของพาราโบลา

จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการพาราโบลาซึ่งเกิดจากการเลื่อนพาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการ $x^2 = 8y$ แล้วอธิบายการเลื่อนขนานกราฟ พร้อมทั้งหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ ความยาวเลตัสเรกตัม และเขียนกราฟของพาราโบลา

แนวการตอบ

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ แล้วเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาจากเงื่อนไขที่โจทย์กำหนดให้ พร้อมทั้งอธิบายการเลื่อนขนานกราฟของพาราโบลาที่เขียน

กำหนดให้จุดยอดของพาราโบลาที่เกิดจากการเลื่อนพาราโบลา $x^2 = 8y$ คือ $(-1, 2)$

จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลาซึ่งเกิดจากการเลื่อนพาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการ $x^2 = 8y$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางซ้าย 1 หน่วย และขึ้น 2 หน่วย คือ $(x + 1)^2 = 8(y - 2)$

2. จงแสดงวิธีทำในการหาจุดยอด โฟกัส ไดเรกตริกซ์ และความยาวเลตัสเรกตัมของพาราโบลา พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

จากสมการ $(x + 1)^2 = 8(y - 2)$ จะได้ $p = 2$ แกนสมมาตรของพาราโบลาอยู่ในแนวตั้ง กราฟของพาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น และจุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่ $(-1, 2)$ ซึ่งเกิดจากการเลื่อนพาราโบลาที่เป็นกราฟของสมการ $x^2 = 8y$ ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดไปทางซ้าย 1 หน่วย และขึ้น 2 หน่วย

โฟกัสของพาราโบลา $x^2 = 8y$ คือ $(0, 2)$ และไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $x^2 = 8y$ คือ $y = -2$

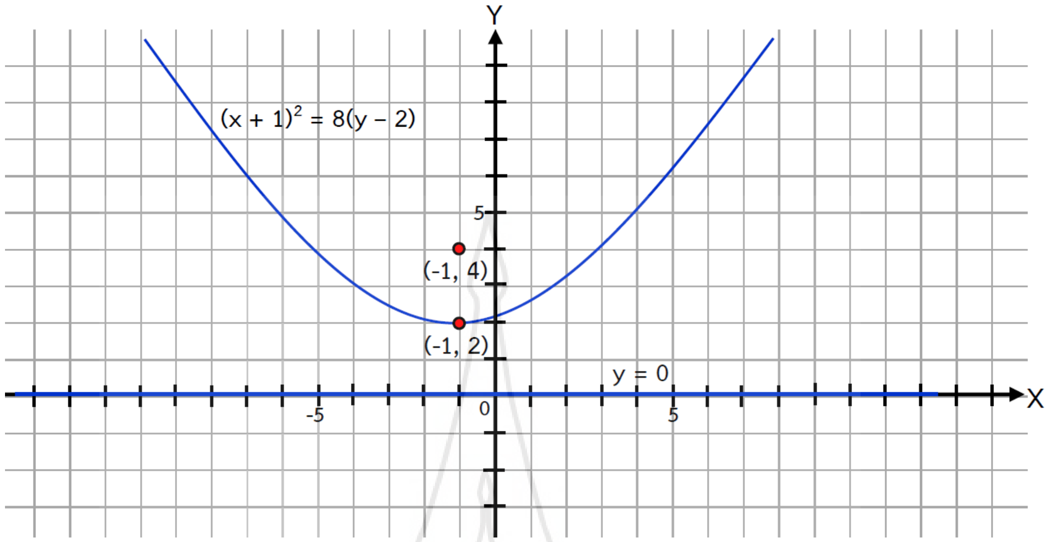
เมื่อเลื่อนพิกัดของโฟกัส และไดเรกตริกซ์ไปทางซ้าย 1 หน่วย และขึ้น 2 หน่วย จะได้

โฟกัสของพาราโบลา $(x + 1)^2 = 8(y - 2)$ คือ $(0 - 1, 2 + 2) = (-1, 4)$

ไดเรกตริกซ์ของพาราโบลา $(x + 1)^2 = 8(y - 2)$ คือ $y = -2 + 2 = 0$

เลตัสเรกตัมยาว $|4(2)| = 8$ หน่วย

3. เขียนกราฟของพาราโบลาได้ดังนี้



แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

หน่วยการเรียนรู้เรื่อง ภาคตัดกรวย จำนวน 18 ชั่วโมง

เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด เวลา 1 ชั่วโมง

และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y

สาระสำคัญ

ไฮเพอร์โบลา (hyperbola) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดว่า โฟกัส (focus) ของไฮเพอร์โบลา

สมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y คือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \, (a > 0, b > 0)$ ซึ่งมีจุดยอดหรือจุดปลายแกนตามขวาง คือ (0, a) และ (0, -a) โฟกัส คือ (0, c) และ (0, -c) ; $c^2 = a^2 + b^2$ จุดปลายแกนสังยุค คือ (b, 0) และ (-b, 0) สมการเส้นกำกับ คือ $y = \pm \frac{a}{b}x$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค เส้นกำกับ ความยาวแกนตามขวาง และความยาวแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลาจากสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดได้
2. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาจากสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดได้
3. เขียนสมการไฮเพอร์โบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

สาระการเรียนรู้

1. บทนิยามเชิงเรขาคณิตของไฮเพอร์โบลา
2. สมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y
3. การหาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค เส้นกำกับ ความยาวแกนตามขวาง และความยาวแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลาจากสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา
4. การเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาจากสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา
5. การเขียนสมการไฮเพอร์โบลาจากเงื่อนไขที่กำหนด

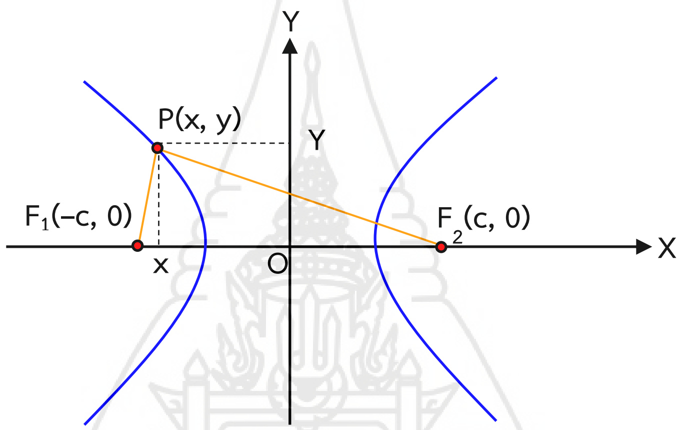
กิจกรรมการเรียนรู้

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเสนอบทเรียนต่อชั้นเรียน

- แจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ และทบทวนความรู้เดิม

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับลักษณะและการหาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน X โดยครูแสดงภาพของไฮเพอร์โบลาในโปรแกรม PowerPoint แล้วตั้งคำถามว่า “ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน X มีลักษณะอย่างไร และสามารถหาพิกัดของจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค และเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลาได้อย่างไร”

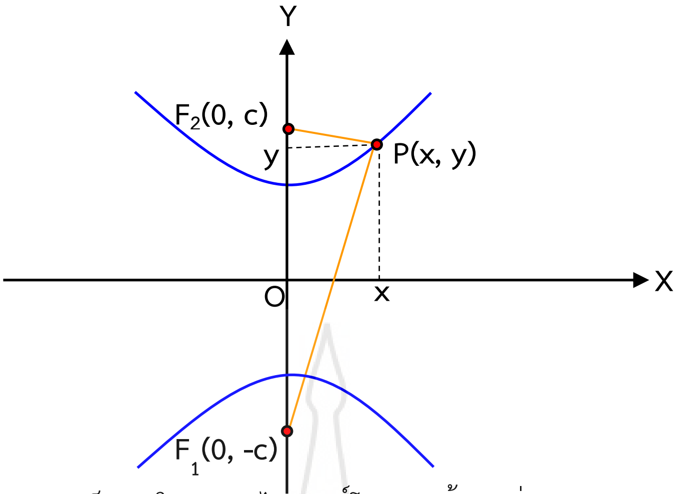


(แนวการตอบ ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน X จะมีพิกัดของจุดยอด และโฟกัสอยู่บนแกน X มีจุดปลายแกนสังยุคอยู่บนแกน Y มีสมการรูปแบบมาตรฐาน คือ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$)

– สอนเนื้อหาใหม่

3. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาและส่วนต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y โดยใช้รูปภาพประกอบ ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้

ในการหาสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y ทำได้โดยกำหนดให้โฟกัสอยู่บนแกน Y ที่ F_1 (0,–c) และ F_2 (0, c) จุดกำเนิดอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัส ดังรูป



ถ้าจุด P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา แล้วผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังโฟกัสที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด $|PF_1 - PF_2|$ เป็นจำนวนจริงบวกเสมอ สมมติว่าจำนวนจริงบวก คือ 2a โดยที่ $2a < 2c$

จะได้

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\left|\sqrt{(y+c)^2 + x^2} - \sqrt{(y-c)^2 + x^2}\right| = 2a$$

$$\sqrt{(y+c)^2 + x^2} - \sqrt{(y-c)^2 + x^2} = \pm 2a$$

$$\sqrt{(y+c)^2 + x^2} = \pm 2a + \sqrt{(y-c)^2 + x^2}$$

$$\left(\sqrt{(y+c)^2 + x^2}\right)^2 = \left(\pm 2a + \sqrt{(y-c)^2 + x^2}\right)^2$$

$$(y+c)^2 + x^2 = (\pm 2a)^2 + 2(\pm 2a)\left(\sqrt{(y-c)^2 + x^2}\right) + \left(\sqrt{(y-c)^2 + x^2}\right)^2$$

$$y^2 + 2(y)(c) + c^2 + x^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} + (y-c)^2 + x^2$$

$$y^2 + 2cy + c^2 + x^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} + y^2 - 2cy + c^2 + x^2$$

$$4cy - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2}$$

$$cy - a^2 = \pm a\sqrt{(y-c)^2 + x^2}$$

$$(cy - a^2)^2 = \left(\pm a\sqrt{(y-c)^2 + x^2}\right)^2$$

$$c^2y^2 - 2(cy)(a^2) + (a^2)^2 = a^2((y-c)^2 + x^2)$$

$$c^2y^2 - 2ca^2y + a^4 = a^2(y^2 - 2(y)(c) + c^2 + x^2)$$

$$c^2y^2 - 2ca^2y + a^4 = a^2y^2 - 2ca^2y + a^2c^2 + a^2x^2$$

$$c^2y^2 + a^4 = a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2$$

$$c^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 = a^2c^2 - a^4$$

$$(c^2 - a^2)y^2 - a^2x^2 = a^2(c^2 - a^2)$$

เนื่องจาก $0 < a < c$ จะได้ว่า $c^2 - a^2 > 0$
จะได้ว่า

$$\frac{(c^2 - a^2)y^2}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{a^2x^2}{a^2(c^2 - a^2)} = \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)}$$

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{(c^2 - a^2)} = 1$$

ให้ $b^2 = c^2 - a^2$ โดยที่ $b > 0$

จะได้สมการไฮเพอร์โบลาเป็น $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จากสมการไฮเพอร์โบลาตัดแกน Y ที่จุด (0, a) และ (0, –a) เรียกว่า จุดยอด (vertex) ของไฮเพอร์โบลา และไม่ตัดแกน X เนื่องจากเมื่อให้ $y = 0$ ในสมการไฮเพอร์โบลา จะได้ $-x^2 = b^2$ ซึ่งไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง นอกจากนั้น จากสมการไฮเพอร์โบลา จะได้ว่า

$\frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{x^2}{b^2}$ และ $1 + \frac{x^2}{b^2} \geq 1$

จะได้ $\frac{x^2}{b^2} \geq 1$

ดังนั้น $x^2 \geq b^2$ และ $x \geq b$ หรือ $x \leq -b$

กราฟของไฮเพอร์โบลาประกอบด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น แต่ละเส้นเรียกว่า กิ่ง (branch) ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดบนแต่ละกิ่งของไฮเพอร์โบลา เรียกว่า แกนตามขวาง (transverse axis) และจุดกึ่งกลางของแกนตามขวางเรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และส่วนของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับแกนตามขวางที่จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาซึ่งยาว 2b หน่วย เรียกว่า แกนสังยุค (Conjugate axis)

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน X จะมีจุดยอดอยู่ที่พิกัด (0, –a) และ (0, a) แกนตามขวางยาว 2a หน่วย แกนสังยุคอยู่บนแกน Y
จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่พิกัด (–b, 0) และ (b, 0) แกนสังยุคยาว 2b หน่วย และโฟกัสอยู่ที่ (0, –c) และ (0, c) ; $c^2 = a^2 + b^2$

ไฮเพอร์โบลาจะมีเส้นกำกับ (asymptote) ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ไฮเพอร์โบลาเข้าใกล้มากขึ้นเมื่อ $|x|$ และ $|y|$ มีค่ามากขึ้น ๆ ในการหาเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ จะแก้สมการเพื่อหา y ได้ดังนี้

$$\frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{x^2}{b^2}$$

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{b^2}{b^2} + \frac{x^2}{b^2}$$

$$y^2 = a^2\left(\frac{b^2}{b^2} + \frac{x^2}{b^2}\right)$$

$$y^2 = a^2\left(\frac{x^2 + b^2}{b^2}\right)$$

$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)}$$

$$y = \pm \frac{a^2}{b^2}\sqrt{x^2 - b^2}$$

$$y = \pm \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)(x^2 - b^2)}$$

$$y = \pm \frac{a^2}{b^2}x\sqrt{\frac{x^2 - b^2}{x^2}}$$

$$y = \pm \frac{a^2}{b^2}x\sqrt{1 - \frac{b^2}{x^2}}$$

เมื่อ $|x|$ มีค่ามากขึ้น $\frac{b^2}{x^2}$ มีค่าเข้าใกล้ 0 มากขึ้น

ดังนั้น สำหรับค่าของ x ซึ่ง $|x|$ มีค่ามาก ๆ ค่าของ y ประมาณได้ด้วย $y = \pm \frac{a}{b}x$

จะได้ว่าเส้นตรง $y = \pm \frac{a}{b}x$ คู่นี้เป็นเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา

เส้นกำกับเป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับช่วยในการเขียนไฮเพอร์โบลา ซึ่งเส้นกำกับจะช่วยกำหนดรูปร่างของไฮเพอร์โบลา การหาเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ที่มีแกนตามขวางในแนวตั้ง สามารถทำได้โดยลงจุด (0, –a), (0, a), (–b, 0) และ (b, 0) แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยใช้จุดทั้งสี่เป็นจุดกึ่งกลางด้าน และเรียกรูปสี่เหลี่ยมว่ารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความชันเท่ากับ $\pm \frac{a}{b}$ ดังนั้นเมื่อต่อเส้นทแยงมุมออกไปจะได้เส้นกำกับ $y = \pm \frac{a}{b}x$ จากนั้นลงจุดยอดของไฮเพอร์โบลา แล้วลากเส้นโค้งจากจุดยอดลู่เข้าหาเส้นกำกับ จะได้ไฮเพอร์โบลา

4. ครูยกตัวอย่างการหาสมการไฮเพอร์โบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงเขียนสมการไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด (0, –7) และ (0, 7)

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้ $c = 7$ จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสของไฮเพอร์โบลาอยู่บนแกน Y ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง

และสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ จะได้ว่าแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาจะต้องยาวน้อยกว่า 14 หน่วย ดังนั้น กำหนดให้แกนตามขวางของไฮเพอร์โบลายาว 8 หน่วย และหา b^2 ได้ดังนี้

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้

$7^2 = 4^2 + b^2$

$b^2 = 7^2 - 4^2$

$b^2 = 49 - 16$

$b^2 = 33$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{33} = 1$

5. ครูยกตัวอย่างการหาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค และการเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาจากสมการในรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดให้ ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค เส้นกำกับ ความยาวแกนตามขวาง และความยาวแกนสังยุค ของไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ เมื่อเทียบกับสมการไฮเพอร์โบลาในรูปแบบมาตรฐาน $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a^2 = 16$; $a = 4$ และ $b^2 = 9$; $b = 3$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

จาก $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 16 + 9 = 25$; $c = 5$

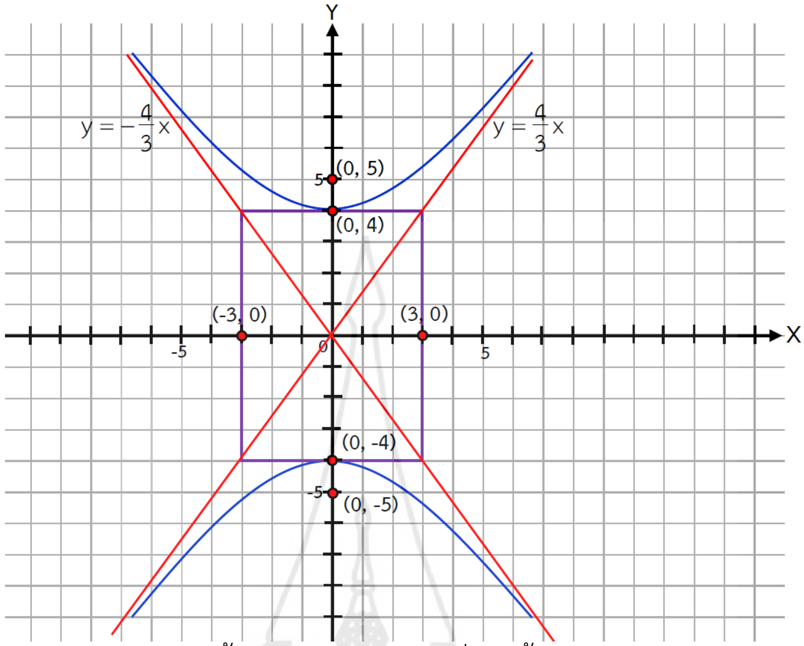
ดังนั้น จุดยอด คือ (0, –4) และ (0, 4)

โฟกัส คือ (0, –5) และ (0, 5)

จุดปลายแกนสังยุค คือ (–3, 0) และ (3, 0)

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{4}{3}x$

เขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



6. ครูแจกกระดาษให้นักเรียนคนละ 1 แผ่น แล้วแสดงคำถามปลายเปิด ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้ “ให้นักเรียนเขียนสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาอยู่บนแกน Y คนละ 1 สมการ” เมื่อเขียนเสร็จแล้วให้นักเรียนออกมานำเสนอจุดยอด โฟกัสและจุดปลายแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลา และสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาหน้าชั้นเรียน

– สรุปบทเรียน

7. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่า “ในวันนี้นักเรียนได้เรียนรู้อะไรบ้างเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาอยู่บนแกน Y” แล้วให้นักเรียนช่วยกันแสดงความคิดเห็น จากนั้นครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา

(แนวการตอบ ได้เรียนรู้เกี่ยวกับการหาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค ความยาวแกนตามขวาง ความยาวแกนสังยุค จากสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา ได้เรียนรู้วิธีการเขียนสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ซึ่งในการเขียนสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาจะต้องทราบจุดยอด จุดปลายแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลา และได้เรียนรู้วิธีการเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาจากสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา)

ขั้นที่ 2 ขั้นทำงานกลุ่มร่วมกัน

8. ให้นักเรียนเข้ากลุ่มโดยคละความสามารถตามที่ครูแบ่งให้ ครูแจกใบความรู้และใบกิจกรรมที่ 15 เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y ให้กับนักเรียน แล้วให้นักเรียนช่วยกันทำงานใบกิจกรรมเพื่อเป็นการทบทวนความรู้ โดยให้นักเรียนปรึกษากันและช่วยเหลือกันภายในกลุ่ม และให้นักเรียนที่เข้าใจในเนื้อหาแล้วในแต่ละกลุ่มช่วยอธิบายและทบทวนความรู้ให้กับนักเรียนที่ยังไม่เข้าใจในเนื้อหา เพื่อให้สมาชิกทุกคนในกลุ่มเข้าใจเนื้อหา ซึ่งครูจะคอยดูแลและให้คำแนะนำเมื่อนักเรียนสงสัยหรือต้องการความช่วยเหลือ

9. ครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยใบกิจกรรม เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y โดยให้นักเรียนตรวจและแก้ไขข้อที่ผิดของตนเอง หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

ขั้นที่ 3 ขั้นการทดสอบย่อยรายบุคคล

10. ให้นักเรียนทำแบบทดสอบย่อยรายบุคคลครั้งที่ 15 เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y โดยในขั้นนี้นักเรียนจะไม่สามารถช่วยเหลือกันหรือปรึกษากันได้ นักเรียนทุกคนจะต้องตั้งใจทำแบบทดสอบ เพราะคะแนนของนักเรียนแต่ละคนจะมีผลต่อคะแนนของกลุ่ม

11. เมื่อนักเรียนทุกคนทำแบบทดสอบเสร็จแล้ว ให้นักเรียนเปลี่ยนกันตรวจ โดยครูและนักเรียนร่วมกันเฉลยไปพร้อมกัน หากนักเรียนสงสัยข้อไหนครูก็จะอธิบายที่มาของคำตอบเพิ่มเติมให้

12. เมื่อตรวจข้อสอบเสร็จให้นักเรียนตรวจสอบความถูกต้องอีกครั้ง แล้วรวมคะแนนพร้อมทั้งลงชื่อกำกับว่าใครเป็นคนตรวจ จากนั้นให้นักเรียนส่งแบบทดสอบคืนให้กับเพื่อน

ขั้นที่ 4 ขั้นการคำนวณหาคะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่มและให้รางวัลกลุ่ม

13. ให้นักเรียนแต่ละคนบอกคะแนนของตนเองที่ได้กับครู จากนั้นครูและนักเรียนทุกคนช่วยกันคำนวณหาคะแนนพัฒนาการ โดยนำคะแนนที่ได้จากการทดสอบครั้งที่ 15 ไปลบคะแนนพื้นฐานในครั้งที่ 14 แล้วนำไปคำนวณหาคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคน และนำคะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนไปคิดเป็นคะแนนพัฒนาการของกลุ่ม และมอบรางวัลให้กับกลุ่มที่ได้คะแนนอยู่ใน 5 อันดับแรก

สื่อ อุปกรณ์การเรียนรู้ และแหล่งเรียนรู้

1. ใบความรู้ที่ 15 เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y

2. ใบกิจกรรมที่ 15 เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y

การวัดและประเมินผล

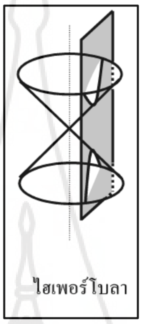
จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
นักเรียนสามารถ 1. หาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค เส้นกำกับ ความยาวแกนตามขวาง และความยาวแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลาจากสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดได้ 2. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาจากสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่กำหนดได้ 3. เขียนสมการไฮเพอร์โบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้	- การตรวจใบกิจกรรม เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y - สอบย่อยรายบุคคล - สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	- ใบกิจกรรม เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y - แบบทดสอบย่อยรายบุคคล เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน X - แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	นักเรียนได้คะแนนร้อยละ 80 ขึ้นไป

ใบความรู้ที่ 15

เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y

ไฮเพอร์โบลา

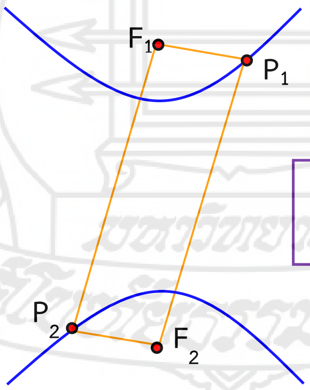
ไฮเพอร์โบลา เป็นภาคตัดกรวยที่เกิดจากการตัดกันของระนาบกับกรวย ที่ระนาบขนานกับแกนของกรวย ระนาบจะตัดกรวยสองข้าง หรือระนาบไม่ตั้งฉากกับแกนของกรวย แต่ทำมุมแหลมกับแกนของกรวยขนาด เล็กกว่า α ระนาบจะตัดกรวยสองข้าง



ไฮเพอร์โบลา

บทนิยามเชิงเรขาคณิตวิเคราะห์

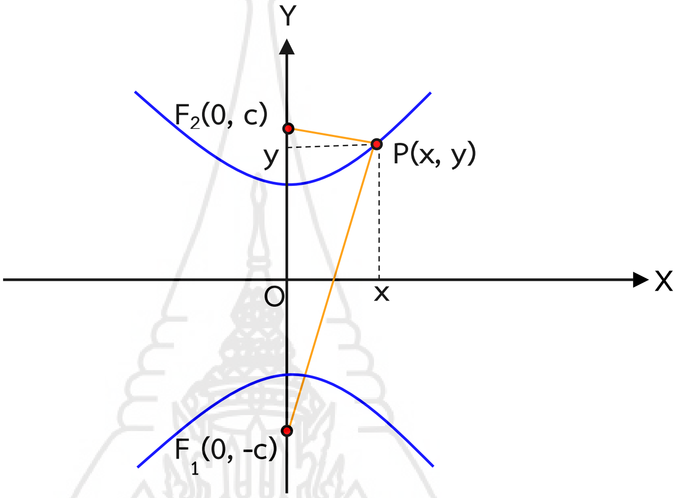
ไฮเพอร์โบลา (hyperbola) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดมีค่าคงตัว โดยค่าคงตัวนี้ต้องน้อยกว่าระยะห่างระหว่างจุดคงที่ที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด เรียกจุดที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุดว่า โฟกัส (focus) ของไฮเพอร์โบลา



$$|P_1F_1 - P_1F_2| = |P_2F_1 - P_2F_2|$$

สมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด
แกนตามขวางอยู่บนแกน Y

ในการหาสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y ทำได้โดยกำหนดให้โฟกัสอยู่บนแกน Y ที่ F_1 (0,–c) และ F_2 (0, c) จุดกำเนิดอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัส ดังรูป



ถ้าจุด P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนไฮเพอร์โบลา แล้วผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ไปยังโฟกัสที่ตรึงอยู่กับที่ทั้งสองจุด $|PF_1 - PF_2|$ เป็นจำนวนจริงบวกเสมอ สมมติว่าจำนวนจริงบวก คือ 2a โดยที่ $2a < 2c$

จะได้

$$
\begin{aligned}
|PF_1 - PF_2| &= 2a \\
\left|\sqrt{(y+c)^2 + x^2} - \sqrt{(y-c)^2 + x^2}\right| &= 2a \\
\sqrt{(y+c)^2 + x^2} - \sqrt{(y-c)^2 + x^2} &= \pm 2a \\
\sqrt{(y+c)^2 + x^2} &= \pm 2a + \sqrt{(y-c)^2 + x^2} \\
\left(\sqrt{(y+c)^2 + x^2}\right)^2 &= \left(\pm 2a + \sqrt{(y-c)^2 + x^2}\right)^2 \\
(y+c)^2 + x^2 &= (\pm 2a)^2 + 2(\pm 2a)\left(\sqrt{(y-c)^2 + x^2}\right) + \left(\sqrt{(y-c)^2 + x^2}\right)^2 \\
y^2 + 2(y)(c) + c^2 + x^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} + (y-c)^2 + x^2 \\
y^2 + 2cy + c^2 + x^2 &= 4a^2 \pm 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} + y^2 - 2cy + c^2 + x^2 \\
4cy - 4a^2 &= \pm 4a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} \\
cy - a^2 &= \pm a\sqrt{(y-c)^2 + x^2} \\
(cy - a^2)^2 &= \left(\pm a\sqrt{(y-c)^2 + x^2}\right)^2 \\
c^2y^2 - 2(cy)(a^2) + (a^2)^2 &= a^2((y-c)^2 + x^2) \\
c^2y^2 - 2ca^2y + a^4 &= a^2(y^2 - 2(y)(c) + c^2 + x^2) \\
c^2y^2 - 2ca^2y + a^4 &= a^2y^2 - 2ca^2y + a^2c^2 + a^2x^2 \\
c^2y^2 + a^4 &= a^2y^2 + a^2c^2 + a^2x^2 \\
c^2y^2 - a^2y^2 - a^2x^2 &= a^2c^2 - a^4 \\
(c^2 - a^2)y^2 - a^2x^2 &= a^2(c^2 - a^2)
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก $0 < a < c$ จะได้ว่า $c^2 - a^2 > 0$

จะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\frac{(c^2 - a^2)y^2}{a^2(c^2 - a^2)} - \frac{a^2x^2}{a^2(c^2 - a^2)} &= \frac{a^2(c^2 - a^2)}{a^2(c^2 - a^2)} \\
\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{(c^2 - a^2)} &= 1
\end{aligned}
$$

ให้ $b^2 = c^2 - a^2$ โดยที่ $b > 0$

จะได้สมการไฮเพอร์โบลาเป็น $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จากสมการไฮเพอร์โบลาตัดแกน Y ที่จุด (0, a) และ (0, –a) เรียกว่า จุดยอด (vertex) ของไฮเพอร์โบลา และไม่ตัดแกน X เนื่องจากเมื่อให้ $y = 0$ ในสมการไฮเพอร์โบลา จะได้ $-x^2 = b^2$ ซึ่งไม่มีคำตอบที่เป็นจำนวนจริง นอกจากนั้น จากสมการไฮเพอร์โบลา จะได้ว่า

$\frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{x^2}{b^2}$ และ $1 + \frac{x^2}{b^2} \geq 1$

จะได้ $\frac{x^2}{b^2} \geq 1$

ดังนั้น $x^2 \geq b^2$ และ $x \geq b$ หรือ $x \leq -b$

กราฟของไฮเพอร์โบลาประกอบด้วยเส้นโค้ง 2 เส้น แต่ละเส้นเรียกว่า กิ่ง (branch) ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมจุดยอดบนแต่ละกิ่งของไฮเพอร์โบลา เรียกว่า แกนตามขวาง (transverse axis) และจุดกึ่งกลางของแกนตามขวางเรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และส่วนของเส้นตรงที่แบ่งครึ่งและตั้งฉากกับแกนตามขวางที่จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาซึ่งยาว 2b หน่วย เรียกว่า แกนสังยุค (Conjugate axis)

ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน X จะมีจุดยอดอยู่ที่พิกัด (0, –a) และ (0, a) แกนตามขวางยาว 2a หน่วย แกนสังยุคอยู่บนแกน Y จุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่พิกัด

(–b, 0) และ (b, 0) แกนสังยุคยาว 2b หน่วย และโฟกัสอยู่ที่ (0, –c) และ (0, c) ; $c^2 = a^2 + b^2$

ไฮเพอร์โบลาจะมีเส้นกำกับ (asymptote) ซึ่งเป็นเส้นตรงที่ไฮเพอร์โบลาเข้าใกล้มากขึ้น ๆ เมื่อ |x| และ |y| มีค่ามากขึ้น ๆ ในการหาเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ จะแก้สมการเพื่อหา y ได้ดังนี้

$$\frac{y^2}{a^2} = 1 + \frac{x^2}{b^2}$$
$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{b^2}{b^2} + \frac{x^2}{b^2}$$
$$y^2 = a^2\left(\frac{b^2}{b^2} + \frac{x^2}{b^2}\right)$$
$$y^2 = a^2\left(\frac{x^2 + b^2}{b^2}\right)$$
$$y^2 = \frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)$$

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{\frac{a^2}{b^2}(x^2 + b^2)}$$
$$y = \pm \frac{a^2}{b^2}\sqrt{x^2 - b^2}$$
$$y = \pm \frac{a^2}{b^2}\sqrt{\left(\frac{x^2}{x^2}\right)(x^2 - b^2)}$$
$$y = \pm \frac{a^2}{b^2} x \sqrt{\frac{x^2 - b^2}{x^2}}$$
$$y = \pm \frac{a^2}{b^2} x \sqrt{1 - \frac{b^2}{x^2}}$$

เมื่อ |x| มีค่ามากขึ้น $\frac{b^2}{x^2}$ มีค่าเข้าใกล้ 0 มากขึ้น

ดังนั้น สำหรับค่าของ x ซึ่ง |x| มีค่ามาก ๆ ค่าของ y ประมาณได้ด้วย $y = \pm\frac{a}{b}x$

จะได้ว่าเส้นตรง $y = \pm\frac{a}{b}x$ คู่นี้เป็นเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา

เส้นกำกับเป็นสิ่งที่จำเป็นสำหรับช่วยในการเขียนไฮเพอร์โบลา ซึ่งเส้นกำกับจะช่วยกำหนดรูปร่างของไฮเพอร์โบลา การหาเส้นกำกับของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ ที่มีแกนตามขวางในแนวตั้ง สามารถทำได้โดยลงจุด (0, –a), (0, a), (–b, 0) และ (b, 0) แล้วสร้างรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากโดยใช้จุดทั้งสี่เป็นจุดกึ่งกลางด้าน และเรียกรูปสี่เหลี่ยมว่ารูปสี่เหลี่ยมมุมฉากศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา เส้นทแยงมุมของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากมีความชันเท่ากับ $\pm\frac{a}{b}$ ดังนั้นเมื่อต่อเส้นทแยงมุมออกไปจะได้เส้นกำกับ $y = \pm\frac{a}{b}x$ จากนั้นลงจุดยอดของไฮเพอร์โบลา แล้วลากเส้นโค้งจากจุดยอดลู่เข้าหาเส้นกำกับ จะได้ไฮเพอร์โบลา

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงหาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค เส้นกำกับ ความยาวแกนตามขวาง และความยาวแกนสังยุค ของไฮเพอร์โบลาที่มีสมการเป็น $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

<u>วิธีทำ</u> จากสมการ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ เมื่อเทียบกับสมการไฮเพอร์โบลาในรูปแบบมาตรฐาน $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้ $a^2 = 16$; $a = 4$ และ $b^2 = 9$; $b = 3$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

จาก $c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 16 + 9 = 25$; $c = 5$

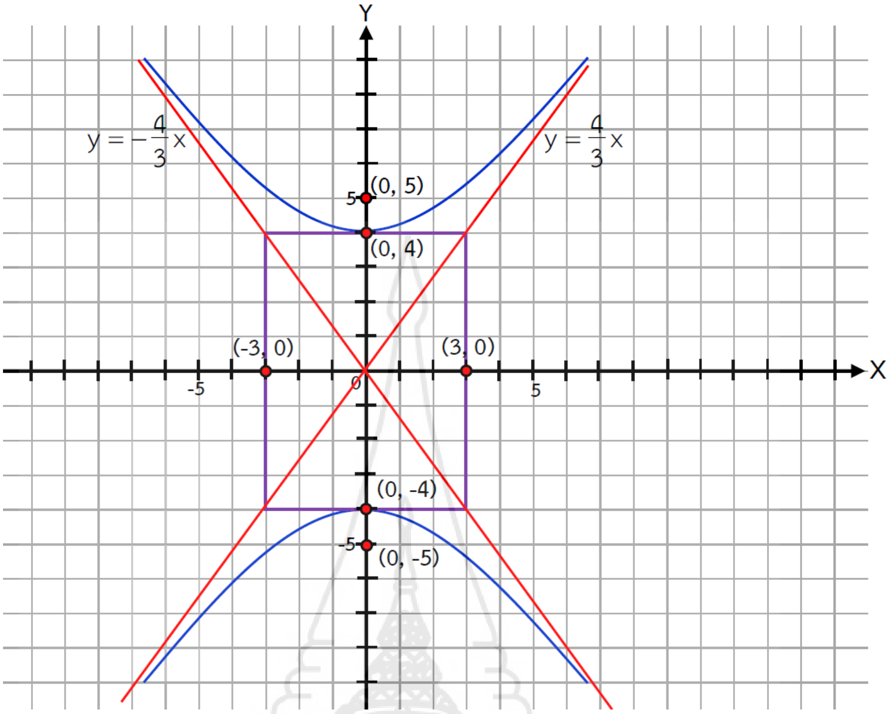
ดังนั้น จุดยอด คือ (0, –4) และ (0, 4)

โฟกัส คือ (0, –5) และ (0, 5)

จุดปลายแกนสังยุค คือ (–3, 0) และ (3, 0)

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{4}{3}x$

เขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงเขียนสมการไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด (0, –7) และ (0, 7)

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้ c = 7 จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่จุดกำเนิด และโฟกัสของไฮเพอร์โบลาอยู่บนแกน Y ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง

และสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ จะได้ว่าแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาจะต้องยาวน้อยกว่า 14 หน่วย ดังนั้น กำหนดให้แกนตามขวางของไฮเพอร์โบลายาว 8 หน่วย และหา b^2 ได้ดังนี้

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้

$7^2 = 4^2 + b^2$

$b^2 = 7^2 - 4^2$

$b^2 = 49 - 16$

$b^2 = 33$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{33} = 1$

ใบกิจกรรมที่ 15

เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y

1. จงหาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค เส้นกำกับ ความยาวแกนตามขวาง และความยาวแกนสังยุค ของไฮเพอร์โบลา

1) $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้..............................

จะได้ a^2 =.................... , a =...............

b^2 =.................... , b =...............

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนว........................ จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน........

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ c^2 =.. , c =...............

ดังนั้น จุดยอด คือ..

โฟกัส คือ..

จุดปลายแกนสังยุค คือ..

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง..

เขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้

2) $16y^2 - 9x^2 = 144$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้..............................

จะได้ a^2 =.................... , a =................

b^2 =.................... , b =................

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนว.............................. จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน..........

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ c^2 =.. , c =................

ดังนั้น จุดยอด คือ..

โฟกัส คือ..

จุดปลายแกนสังยุค คือ..

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง..

เขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้

2. จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) โฟกัส (0, -6), (0, 6) จุดยอด (0, -2), (0, 2)

----

2) โฟกัส (0, -5), (0, 5) แกนตามขวางยาว 8 หน่วย

----

3) จุดปลายแกนตามขวาง คือ (-3, 0), (3, 0) และเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{2}{3}x$

----

3. จงเขียนสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนตามขวางอยู่บนแกน Y และเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

1) แนวคิดในการเขียนสมการของไฮเพอร์โบลา

----

2) แสดงวิธีทำในการหาสมการของไฮเพอร์โบลา

แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 15

เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y

จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนตามขวางอยู่บนแกน Y พร้อมทั้งเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งกำหนดจุดยอด และจุดปลายแกนสังยุคที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

----

2. จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของไฮเพอร์โบลา พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

----

3. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้

เฉลย ใบกิจกรรมที่ 15

เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y

1. จงหาจุดยอด โฟกัส จุดปลายแกนสังยุค เส้นกำกับ ความยาวแกนตามขวาง และความยาวแกนสังยุค ของไฮเพอร์โบลา

1) $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้ $\frac{y^2}{8^2} - \frac{x^2}{6^2} = 1$

จะได้ $a^2 = 64$, $a = 8$

$b^2 = 36$, $b = 6$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 64 + 36 = 100$, $c = 10$

ดังนั้น จุดยอด คือ (0, -8) และ (0, 8)

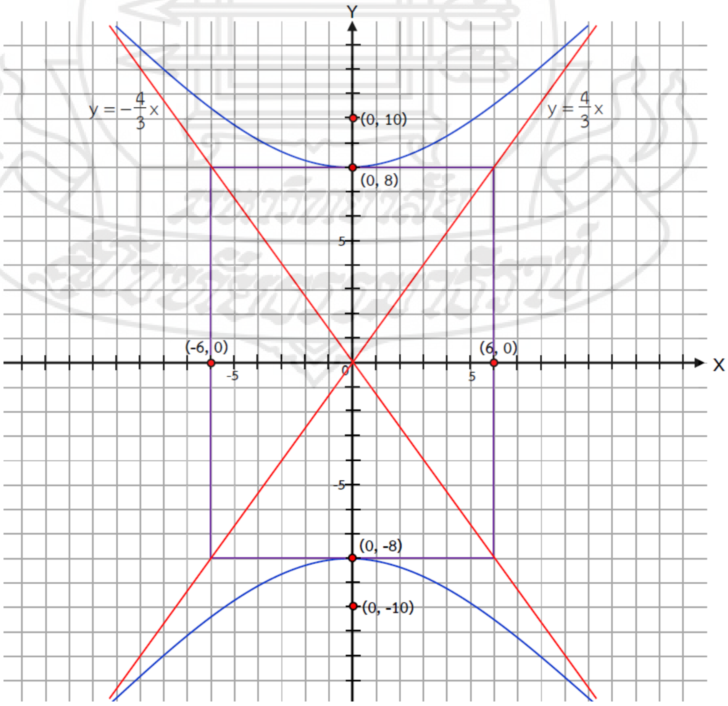
โฟกัส คือ (0, -10) และ (0, 10)

จุดปลายแกนสังยุค คือ (-6, 0) และ (6, 0)

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm \frac{8}{6}x$

$y = \pm \frac{4}{3}x$

เขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



2) $16y^2 - 9x^2 = 144$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้ $\frac{16y^2}{144} - \frac{9x^2}{144} = \frac{144}{144}$

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

จะได้ $a^2 = 9, a = 3$

$b^2 = 16, b = 4$

ดังนั้น ไฮเพอร์โบลามีแกนตามขวางในแนวตั้ง จุดยอดและโฟกัสอยู่บนแกน Y

จาก $c^2 = a^2 + b^2$ จะได้ $c^2 = 9 + 16 = 25$, $c = 5$

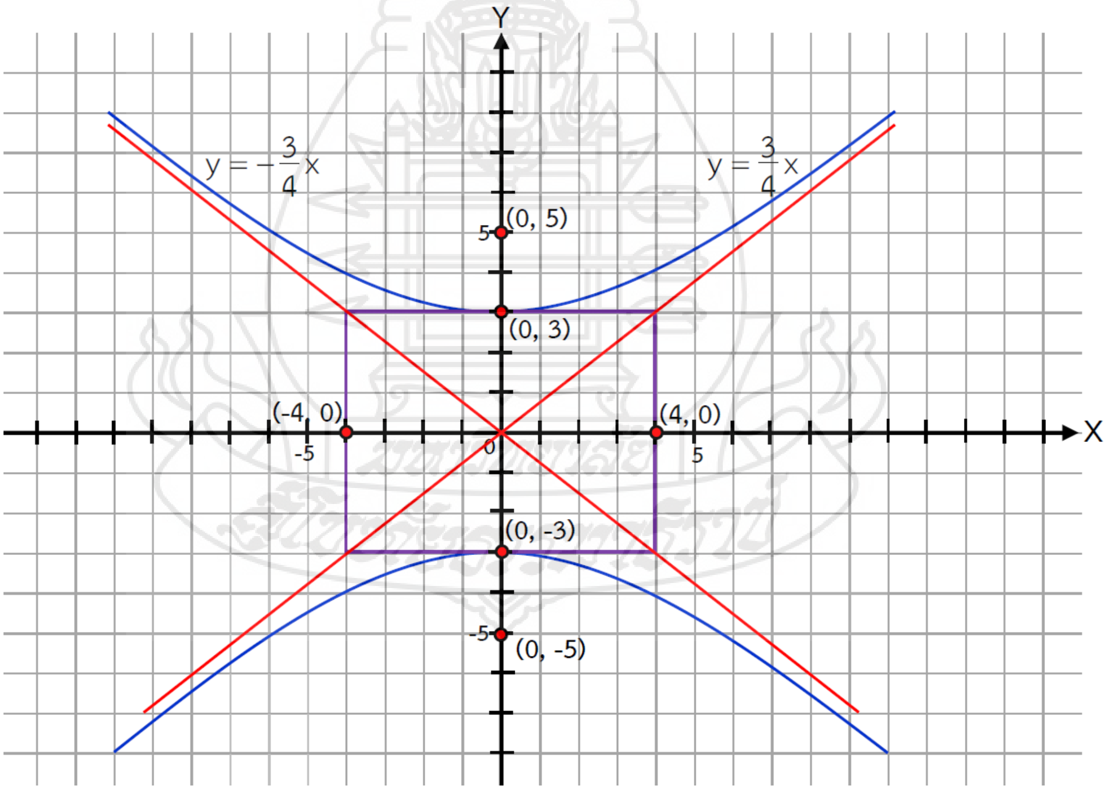
ดังนั้น จุดยอด คือ (0, -3) และ (0, 3)

โฟกัส คือ (0, -5) และ (0, 5)

จุดปลายแกนสังยุค คือ (-4, 0) และ (4, 0)

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm \frac{3}{4}x$

เขียนไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



2. จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) โฟกัส (0, -6), (0, 6) จุดยอด (0, -2), (0, 2)

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้ $c = 6$ และ $a = 2$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$

$36 = 4 + b^2$

$b^2 = 36 - 4$

$b^2 = 32$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{32} = 1$

2) โฟกัส (0, -5), (0, 5) แกนตามขวางยาว 8 หน่วย

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้ $c = 5$ และ $2a = 8$, $a = 4$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$

$25 = 16 + b^2$

$b^2 = 25 - 16$

$b^2 = 9$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

3) จุดปลายแกนตามขวาง คือ (-3, 0), (3, 0) และเส้นกำกับ คือ $y = \pm\frac{2}{3}x$

<u>วิธีทำ</u> จากโจทย์จะได้ $b = 3$ และ $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$

$\frac{a}{3} = \frac{2}{3}$ จะได้ $a = 2$

ดังนั้น สมการไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

3. จงเขียนสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y และเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

1) แนวคิดในการเขียนสมการของไฮเพอร์โบลา

<u>แนวการตอบ</u> เนื่องจากไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y จะต้องกำหนดจุดยอดของไฮเพอร์โบลาให้อยู่บนแกน Y และจุดปลายแกนสังยุคให้อยู่บนแกน X

2) แสดงวิธีทำในการหาสมการของไฮเพอร์โบลา

กำหนดให้จุดยอดของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่พิกัด (0, –3) และ (0, 3) และจุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่พิกัด (–2, 0) และ (2, 0) จะได้ $a = 3$ และ $b = 2$

ดังนั้น สมการของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

เฉลย แบบทดสอบย่อยครั้งที่ 15

เรื่อง สมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนตามขวางอยู่บนแกน Y

จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนตามขวางอยู่บนแกน Y พร้อมทั้งเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

1. จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งกำหนดจุดยอด และจุดปลายแกนสังยุคที่สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้

<u>แนวการตอบ</u> เนื่องจาก ไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด แกนตามขวางอยู่บนแกน Y จะได้ว่าจุดยอด และโฟกัสของไฮเพอร์โบลาอยู่บนแกน Y ส่วนจุดปลายแกนสังยุคอยู่บนแกน X เมื่อกำหนดจุดยอดและจุดปลายแกนสังยุคของไฮเพอร์โบลาแล้วจะได้ค่า a และ b ตามลำดับ จากนั้นนำค่า a และ b ที่ได้ไปแทนลงในสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จากโจทย์ กำหนดจุดยอดของไฮเพอร์โบลาให้อยู่ที่พิกัด (0, –4), (0, 4) และกำหนดจุดปลายแกนสังยุคให้อยู่ที่พิกัด (–6, 0) และ (6, 0)

2. จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของไฮเพอร์โบลา พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบอย่างละเอียดตามลำดับขั้นตอน

<u>แนวการตอบ</u> กำหนดให้ จุดยอดของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่พิกัด (0, –4), (0, 4) และจุดปลายแกนสังยุคอยู่ที่พิกัด (–6, 0) และ (6, 0)

จะได้ a = 4 และ b = 6 จากสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

จะได้สมการของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{y^2}{4^2} - \frac{x^2}{6^2} = 1$ หรือ $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{36} = 1$

จาก $c^2 = a^2 + b^2$

$= 16 + 36$

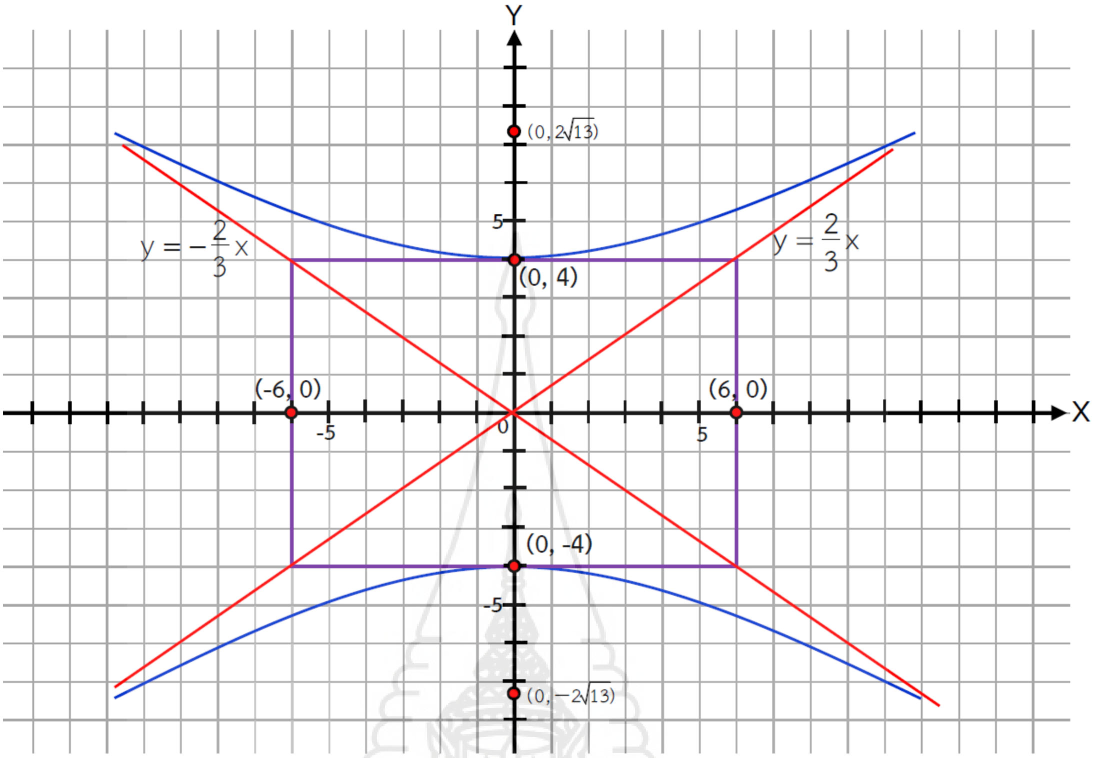
$= 52;$

$c = 2\sqrt{13}$

จะได้ว่า โฟกัสของไฮเพอร์โบลา คือ $(-2\sqrt{13}, 0)$ และ $(2\sqrt{13}, 0)$

เส้นกำกับ คือ เส้นตรง $y = \pm\frac{4}{6}x$ หรือ $y = \pm\frac{2}{3}x$

3. เขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาได้ดังนี้



ภาคผนวก ค

ตัวอย่างแผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ เรื่อง ภาคตัดกรวย

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 (แผนการจัดกิจกรรมการเรียนรู้แบบปกติ)

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2	ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
หน่วยการเรียนรู้ที่ 1 เรื่อง เรขาคณิตวิเคราะห์	จำนวน 18 ชั่วโมง
เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม	เวลา 1 ชั่วโมง

สาระสำคัญ

วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย เรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม

สมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จุดประสงค์การเรียนรู้ นักเรียนสามารถ

1. หาจุดศูนย์กลาง และความยาวรัศมีจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่กำหนดได้
2. เขียนกราฟของวงกลมจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่กำหนดได้
3. เขียนสมการวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้

สาระการเรียนรู้

1. บทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงกลม
2. สมการรูปมาตรฐานของวงกลม
3. การหาจุดศูนย์กลาง และความยาวรัศมีจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลม
4. การเขียนกราฟของวงกลมจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลม
5. การเขียนสมการวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้

กิจกรรมการเรียนรู้

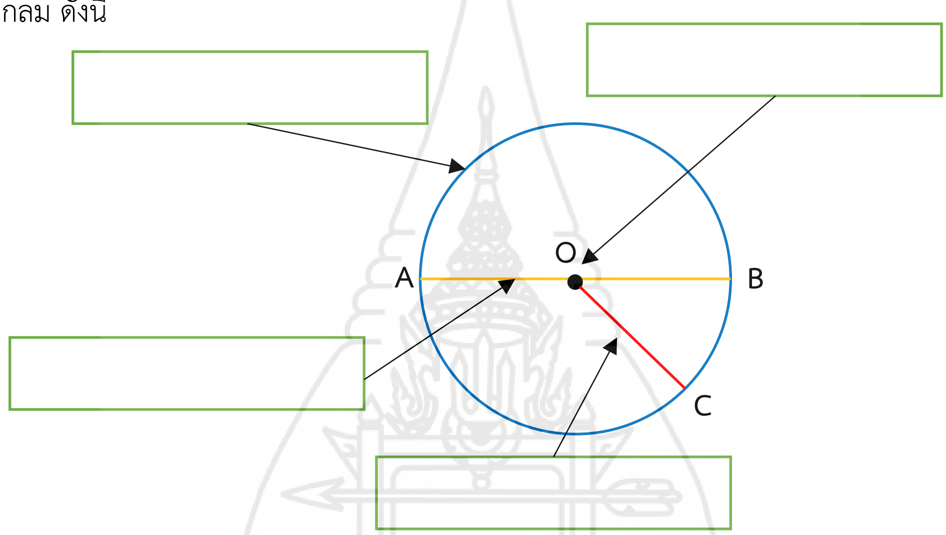
ขั้นที่ 1 ขั้นนำ

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้ให้นักเรียนทราบ

2. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับการเกิดภาคตัดกรวยที่เรียกว่า วงกลม ดังนี้

วงกลมเป็นภาคตัดกรวยที่เกิดจากการใช้ระนาบตัดกรวยข้างเดียว โดยให้ระนาบตั้งฉากกับแกนของกรวย

3. ครูทบทวนความรู้เดิมของนักเรียนเกี่ยวกับส่วนประกอบของวงกลม โดยครูแสดงภาพของวงกลมในโปรแกรม PowerPoint แล้วให้นักเรียนช่วยกันบอกและอธิบายส่วนประกอบของวงกลม ดังนี้

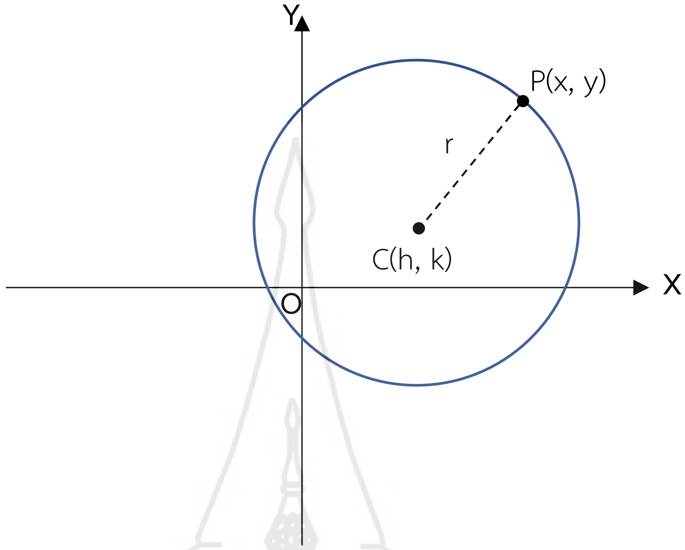


(แนวการตอบ จุดศูนย์กลาง (O) เป็นจุดที่อยู่ตรงกลางของวงกลม, เส้นรอบวง คือ เส้นโค้งที่เป็นแนวของทั้งหมดของวงกลม, รัศมี (OA, OB, OC) คือ ส่วนของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมกับจุดหนึ่งบนเส้นรอบวง, เส้นผ่านศูนย์กลาง (AB) คือ เส้นที่ลากจากเส้นรอบวงด้านหนึ่งผ่านจุดศูนย์กลางไปยังเส้นรอบวงอีกด้านหนึ่งของวงกลม ซึ่งมีความยาวเป็น 2 เท่าของรัศมี)

ขั้นที่ 2 ขั้นสอน

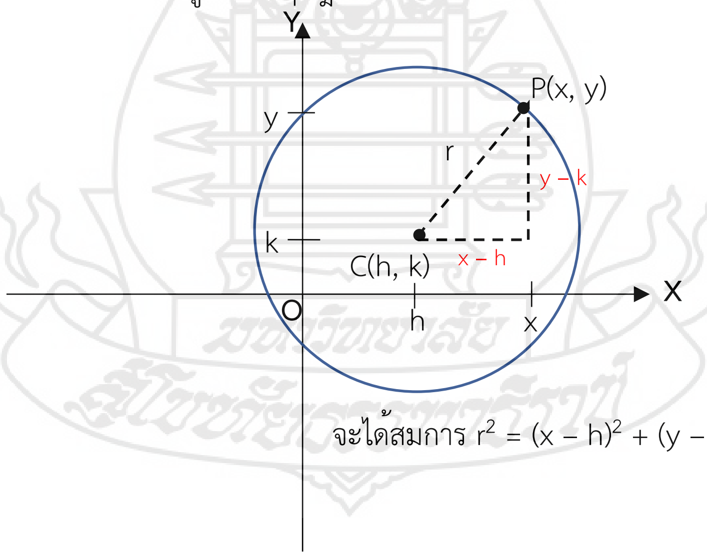
4. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับบทนิยามเชิงเรขาคณิตของวงกลม ดังนี้ วงกลม (circle) คือ เซตของจุดทั้งหมดในระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดที่ตรึงอยู่กับที่ เรียกว่า จุดศูนย์กลาง (center) ของวงกลม และส่วนของเส้นตรงที่มีจุดศูนย์กลางและจุดบนวงกลมเป็นจุดปลาย เรียกว่า รัศมี (radius) ของวงกลม

5. ครูอธิบายให้ความรู้กับนักเรียนเกี่ยวกับสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย โดยใช้รูปภาพประกอบ ในโปรแกรม PowerPoint ดังนี้



จากรูป วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ C(h, k) รัศมียาว r หน่วย และ P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม สามารถหาสมการที่มีกราฟเป็นวงกลมได้ ดังนี้

วิธีที่ 1 หาโดยให้ความรู้เรื่อง ทฤษฎีบทพีทาโกรัส ดังนี้



จะได้สมการ $r^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2$

วิธีที่ 2 หาโดยให้ความรู้เรื่อง ระยะทางระหว่างจุดสองจุด โดยหาระยะทางระหว่างจุด C(h, k) และ P(x, y) ซึ่งเท่ากับ r หน่วย จะได้ $r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$)

ดังนั้น สมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (h, k) รัศมียาว r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

6. ครูยกตัวอย่างการหาสมการวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 1</u> จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่มีรัศมียาว 5 หน่วย และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (–4, 3)

<u>วิธีทำ</u> จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

แทน r, h และ k ด้วย 5, –4 และ 3 ตามลำดับ

จะได้ $(x - (-4))^2 + (y - 3)^2 = 5^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$

7. ครูตั้งคำถามกับนักเรียนว่านักเรียนคิดว่าสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0) และรัศมียาว r หน่วยเป็นอย่างไร

(แนวการตอบ สมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด (0, 0) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r^2$ จะได้ $x^2 + y^2 = r^2$)

8. ครูยกตัวอย่างการหาจุดศูนย์กลาง ความยาวรัศมี และการเขียนกราฟของวงกลมจากสมการในรูปแบบมาตรฐานของวงกลม ดังนี้

<u>ตัวอย่างที่ 2</u> จงหาจุดศูนย์กลาง และรัศมีของวงกลมที่มีสมการเป็น $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงกลม

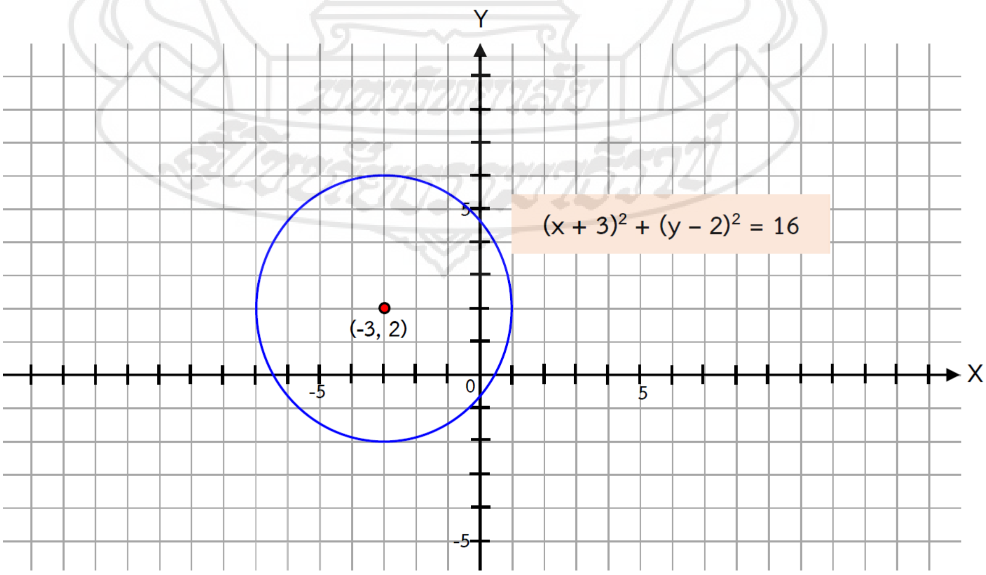
<u>วิธีทำ</u> จาก $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 16$

จะได้ $(x - (-3))^2 + (y - 2)^2 = 4^2$

เมื่อเทียบกับรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ $h = -3$, $k = 2$ และ $r = 4$

ดังนั้น วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (–3, 2) และรัศมียาว 4 หน่วย และเขียนวงกลมได้ดังนี้



ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป

9. ครูและนักเรียนร่วมกันสรุปเกี่ยวกับ สมการรูปมาตรฐานของวงกลม โดยให้นักเรียนช่วยกันสรุปด้วยตนเองก่อน แล้วครูจึงร่วมสรุปให้ชัดเจนสมบูรณ์

(แนวการตอบ ได้เรียนรู้เกี่ยวกับการหาจุดศูนย์กลางของวงกลม รัศมีของวงกลม จากสมการรูปมาตรฐานของวงกลม ได้เรียนรู้วิธีการเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ ซึ่งในการเขียนสมการรูปมาตรฐานของวงกลมจะต้องทราบจุดศูนย์กลาง และความยาวรัศมีของวงกลม และได้เรียนรู้วิธีการเขียนกราฟของวงกลมจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลม)

10. หลังจากสรุปแล้วให้นักเรียนแต่ละคนทำใบงาน เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของภาคตัดกรวย

สื่อ อุปกรณ์การเรียนรู้ และแหล่งเรียนรู้

1. ใบงานที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม

การวัดและประเมินผล

จุดประสงค์การเรียนรู้	วิธีการ	เครื่องมือ	เกณฑ์
ด้านความรู้ความเข้าใจ (K) นักเรียนสามารถ 1. หาจุดศูนย์กลาง และความยาวรัศมีจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่กำหนดได้ 2. เขียนกราฟของวงกลมจากสมการรูปมาตรฐานของวงกลมที่กำหนดได้ 3. เขียนสมการวงกลมจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ได้	- การตรวจใบงานที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของภาคตัดกรวย - สังเกตจากการทำกิจกรรมในชั้นเรียน	- ใบงานที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของภาคตัดกรวย - แบบสังเกตพฤติกรรมการเรียนรู้ของนักเรียน	นักเรียนได้คะแนนร้อยละ 60 ขึ้นไป

ใบงานที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม

1. จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลมที่มีสมการดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนวงกลม

1) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงกลมได้ดังนี้

....

จุดศูนย์กลางอยู่ที่.. รัศมียาว........................หน่วย

เขียนวงกลม ได้ดังนี้

2) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงกลมได้ดังนี้

....

จุดศูนย์กลางอยู่ที่.. รัศมียาว........................หน่วย

เขียนวงกลม ได้ดังนี้

2. จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, -4) และรัศมียาว 4 หน่วย

2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-1, 2) และผ่านจุด (-4, -4)

3. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (7, -3) และสัมผัสแกน X

เฉลย ใบงานที่ 1 เรื่อง สมการรูปมาตรฐานของวงกลม

1. จงหาจุดศูนย์กลางและความยาวของรัศมีของวงกลมที่มีสมการดังต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนวงกลม

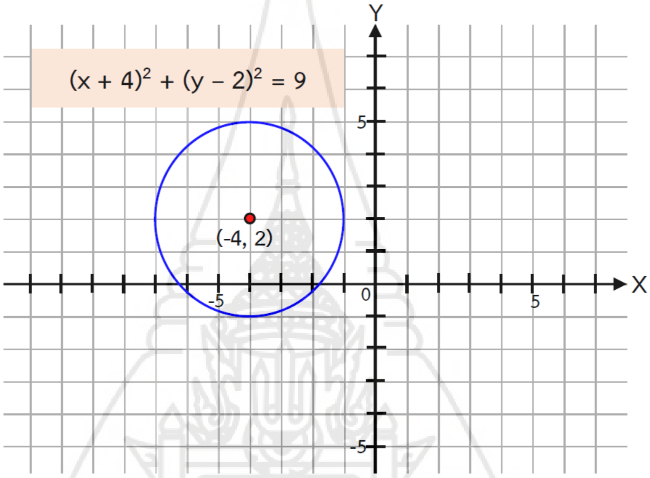
1) $(x + 4)^2 + (y - 2)^2 = 9$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงกลมได้ดังนี้

$$(x - (-4))^2 + (y - 2)^2 = 3^2$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-4, 2)$ รัศมียาว 3 หน่วย

เขียนวงกลม ได้ดังนี้



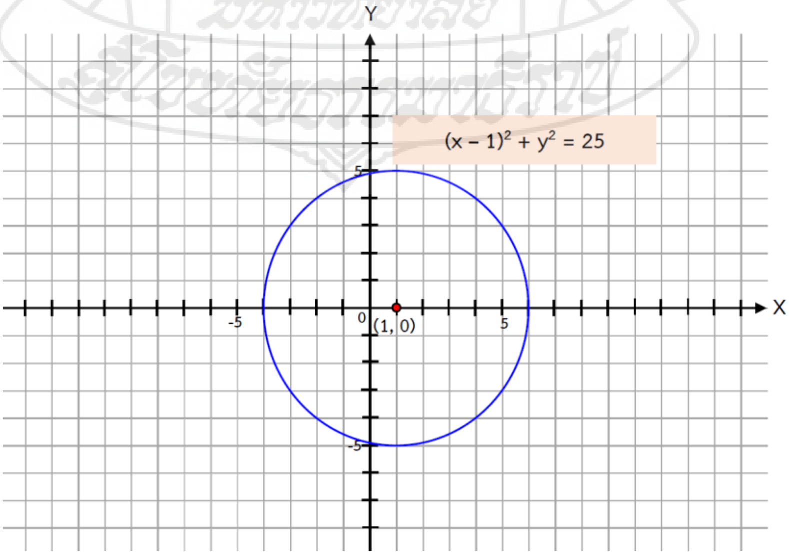
2) $(x - 1)^2 + y^2 = 25$

เขียนสมการเพื่อเปรียบเทียบกับสมการรูปมาตรฐานของวงกลมได้ดังนี้

$$(x - 1)^2 + (y - 0)^2 = 5^2$$

จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(1, 0)$ รัศมียาว 5 หน่วย

เขียนวงกลม ได้ดังนี้



2. จงเขียนรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้

1) จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (3, -4) และรัศมียาว 4 หน่วย

<u>ตอบ</u> จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

แทน r, h และ k ด้วย 4, 3 และ –4 ตามลำดับ จะได้ $(x - 3)^2 + (y - (-4))^2 = 4^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 16$

2. จุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-1, 2) และผ่านจุด (-4, -4)

<u>วิธีทำ</u> หารัศมีของวงกลม จาก $r = \sqrt{(-1-(-4))^2 + (2-(-4))^2} = \sqrt{45}$

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

แทน r, h และ k ด้วย $\sqrt{45}$, –1 และ 2 ตามลำดับ

จะได้ $(x - (-1))^2 + (y - 2)^2 = (\sqrt{45})^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 45$

3. จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (7, -3) และสัมผัสแกน X

<u>วิธีทำ</u> เนื่องจาก จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่ (7, -3)

และเส้นรอบวงของวงกลมสัมผัสแกน X จะได้ว่ารัศมีของวงกลมยาว 3 หน่วย

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

แทน r, h และ k ด้วย 3, 7 และ –3 ตามลำดับ

จะได้ $(x - 7)^2 + (y - (-3))^2 = (3)^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x - 7)^2 + (y + 3)^2 = 9$

ภาคผนวก ง

- แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ เรื่อง ภาคตัดกรวย
- ค่าความยาก ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเที่ยงทั้งฉบับ

ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

1. วงกลมวงหนึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-1, -2) และผ่านจุด (5, -10) จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานและสมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงกลม

1.1 จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนวงกลมตามเงื่อนไขของโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรแทนจุดศูนย์กลางของวงกลม และความยาวรัศมีของวงกลม

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

1.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม พร้อมทั้งเขียนอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

....

....

....

....

....

....

....

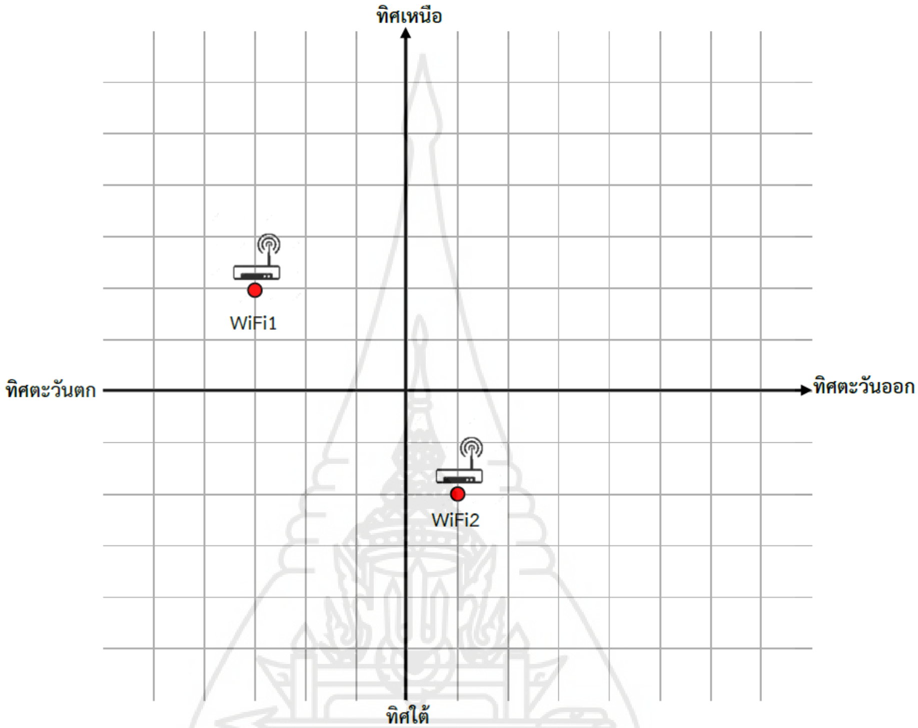
....

....

....

1.3 เขียนกราฟของวงกลมได้ดังนี้

2. โดยทั่วไปอุปกรณ์กระจายสัญญาณ WiFi จะปล่อยสัญญาณเป็นวงกลม ถ้าบ้านของนักเรียนมีอุปกรณ์กระจายสัญญาณ WiFi 2 ตัว ซึ่งแต่ละตัวจะปล่อยสัญญาณออกจากจุดศูนย์กลางได้ไกลที่สุด 6 เมตร ดังรูป จงเขียนสมการแทนขอบเขตการปล่อยสัญญาณ WiFi ของอุปกรณ์กระจายสัญญาณทั้ง 2 ตัว (กำหนดให้ 1 หน่วยแทนระยะทาง 2 เมตร)



2.1 จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนพิกัดของจุดศูนย์กลาง และความยาวรัศมีที่ตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ปล่อยสัญญาณออกไปได้

2.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม พร้อมทั้งเขียนอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

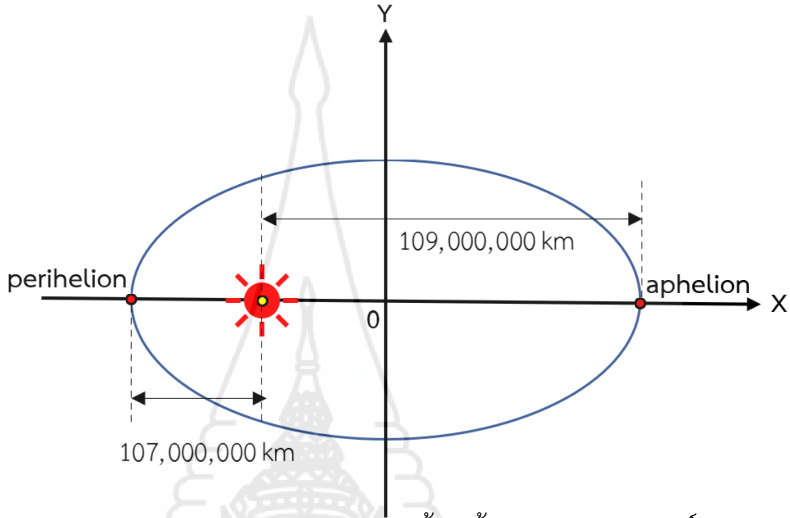
3. จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานและรูปแบบทั่วไปของวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด (-2, 3) และ (10, 3) และแกนโทยาว 16 หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงรี

3.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนวงรีตามเงื่อนไขของโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนระยะห่างระหว่างโฟกัส ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังจุดยอด และความยาวของแกนโทของวงรี

3.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงรี พร้อมทั้งเขียนอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

3.3 เขียนกราฟของวงรีได้ ดังนี้

4. ดาวเคราะห์ดวงหนึ่งโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี โดยที่ดวงอาทิตย์อยู่ที่โฟกัสจุดหนึ่ง จุดที่ดาวเคราะห์อยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุดเรียกว่า perihelion จุดที่ดาวเคราะห์อยู่ไกลดวงอาทิตย์มากที่สุดเรียกว่า aphelion จุดทั้งสองนี้เป็นจุดยอดของวงโคจร ถ้าดาวศุกร์อยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ 107,000,000 กิโลเมตร ที่ perihelion และ 109,000,000 กิโลเมตร ที่ aphelion ดังรูป จงเขียนสมการแสดงวงโคจรของดาวศุกร์รอบดวงอาทิตย์ โดยจุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงโคจร



4.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังโฟกัส จุดยอดของวงโคจร และจุดปลายแกนโทของวงโคจร

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการแสดงวงโคจรของดาวศุกร์รอบดวงอาทิตย์ โดยจุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงโคจร พร้อมทั้งเขียนอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

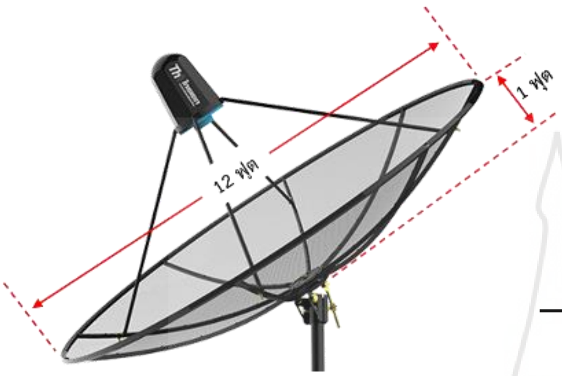
5. จงเขียนสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด (-3, 5) และไดเรกตริกซ์ คือ $y = 1$ พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา

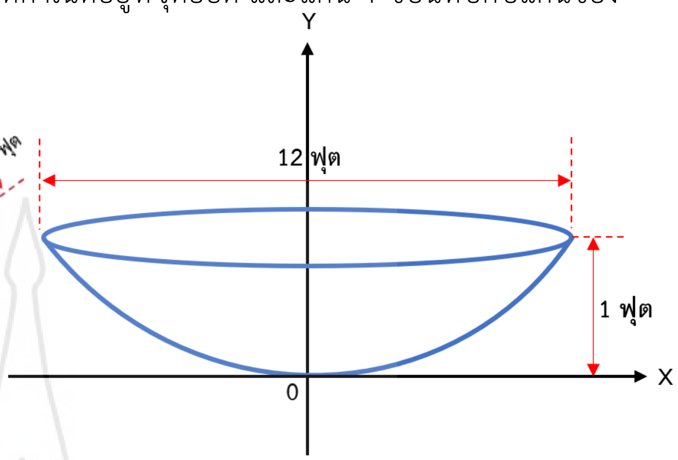
5.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนพาราโบลาตามเงื่อนไขของโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรแทนจุดยอดของพาราโบลา และระยะทางจากจุดยอดของพาราโบลาถึงโฟกัสของพาราโบลา

5.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของพาราโบลา พร้อมทั้งเขียนอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

5.3 เขียนกราฟของพาราโบลาได้ดังนี้

6. พื้นผิวของจานรับสัญญาณดาวเทียมมีรูปทรงเป็นจานโค้งแบบพาราโบลา จานกว้าง 12 ฟุต และลึก 1 ฟุต ดังรูป ถ้ากำหนดระบบพิกัดฉากให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดยอด และแกน Y ซ้อนทับกับแกนของพาราโบลาแล้ว จงเขียนสมการพาราโบลา





6.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรแทนจุดที่พาราโบลาผ่าน และระยะทางจากจุดยอดของพาราโบลาถึงโฟกัสของพาราโบลา

6.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการพาราโบลา พร้อมทั้งเขียนอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

7. จงเขียนสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด (3, 2) และ (-7, 2) จุดยอดอยู่ที่ (-5, 2) และ (1, 2) พร้อมทั้งเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

7.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนไฮเพอร์โบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ในโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนระยะห่างระหว่างโฟกัส ความยาวแกนตามขวาง และระยะทางจากจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาไปยังจุดปลายแกนสังยุค

7.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของไฮเพอร์โบลา พร้อมทั้งเขียนอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

7.3 จงเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาที่ได้

8. จงเขียนสมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด P(x, y) ซึ่งระยะห่างจากจุด P(x, y) กับจุด (7, –3) และ (–3, –3) ต่างกัน 6 หน่วย

8.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งระบุว่าจุด P(x, y) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเป็นจุดที่อยู่บนภาคตัดกรวยชนิดใด และกำหนดสัญลักษณ์แทนผลต่างของระยะห่างจากจุด P(x, y) กับจุด (7, –3) และ (–3, –3)

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8.2 จงแสดงวิธีทำในการหาแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด P(x, y) พร้อมทั้งเขียนอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

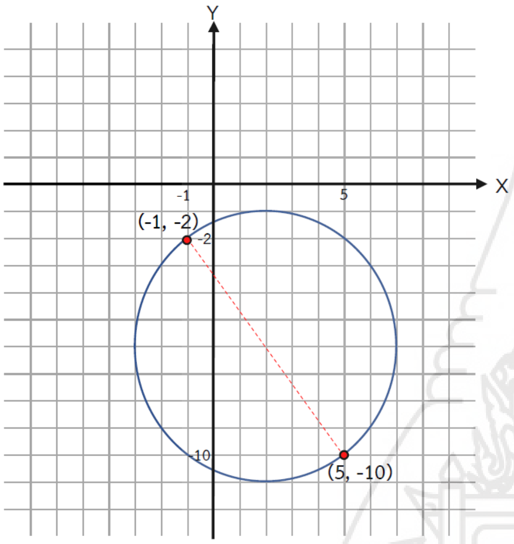
เฉลย แบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์

ให้นักเรียนแสดงวิธีทำอย่างละเอียด

1. วงกลมวงหนึ่งมีจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางอยู่ที่จุด (-1, -2) และผ่านจุด (5, -10) จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานและสมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงกลม

1.1 จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนวงกลมตามเงื่อนไขของโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรแทนจุดศูนย์กลางของวงกลม และความยาวรัศมีของวงกลม

<u>แนวทางการตอบ</u>



1) หาจุดศูนย์กลางของวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่อง จุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง โดยหาจุดกึ่งกลางของเส้นผ่านศูนย์กลางที่มีจุดปลายอยู่ที่จุด (-1, -2) และ (5, -10) โดยกำหนดให้จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่พิกัด (h, k)

2) หาความยาวรัศมีของวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่องระยะทางระหว่างจุดสองจุด โดยหาระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลมกับจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม (-1, -2) หรือ (5, -10) หรือหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลางของวงกลม แล้วจะได้ความยาวรัศมีของวงกลมซึ่งยาวเป็นครึ่งหนึ่งของความยาวเส้นผ่านศูนย์กลาง โดยกำหนดให้รัศมีของวงกลมยาว r หน่วย

3) เขียนสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม โดยแทนจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) และรัศมี r ของวงกลม ลงในสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

4) เขียนสมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม โดยใช้ความรู้เรื่องกำลังสองสมบูรณ์

1.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

<u>แนวการตอบ</u>

กำหนดให้ จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่พิกัด (h, k) และรัศมีของวงกลมยาว r หน่วย

1) หาจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) ดังนี้ $h = \frac{-1+5}{2} = \frac{4}{2} = 2$ และ

$k = \frac{(-2)+(-10)}{2} = \frac{-12}{2} = -6$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงกลมอยู่ที่จุด (2, -6)

2) **วิธีที่ 1** หาความยาวรัศมีของวงกลม r โดยหาระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางของวงกลม (2, -6) และจุดปลายของเส้นผ่านศูนย์กลาง (-1, -2) จะได้

$r = \sqrt{(2-(-1))^2 + (-6-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ หน่วย

วิธีที่ 2 หาความยาวรัศมีของวงกลม r โดยหาความยาวของเส้นผ่านศูนย์กลาง จะได้

$r = \dfrac{\sqrt{(5-(-1))^2+(-10-(-2))^2}}{2} = 5$ หน่วย

จากรูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

แทน r, h และ k ด้วย 5, 2 และ –6 ตามลำดับ จะได้ $(x - 2)^2 + (y - (-6))^2 = 5^2$

ดังนั้น รูปแบบมาตรฐานของสมการวงกลมที่กำหนด คือ $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 25$

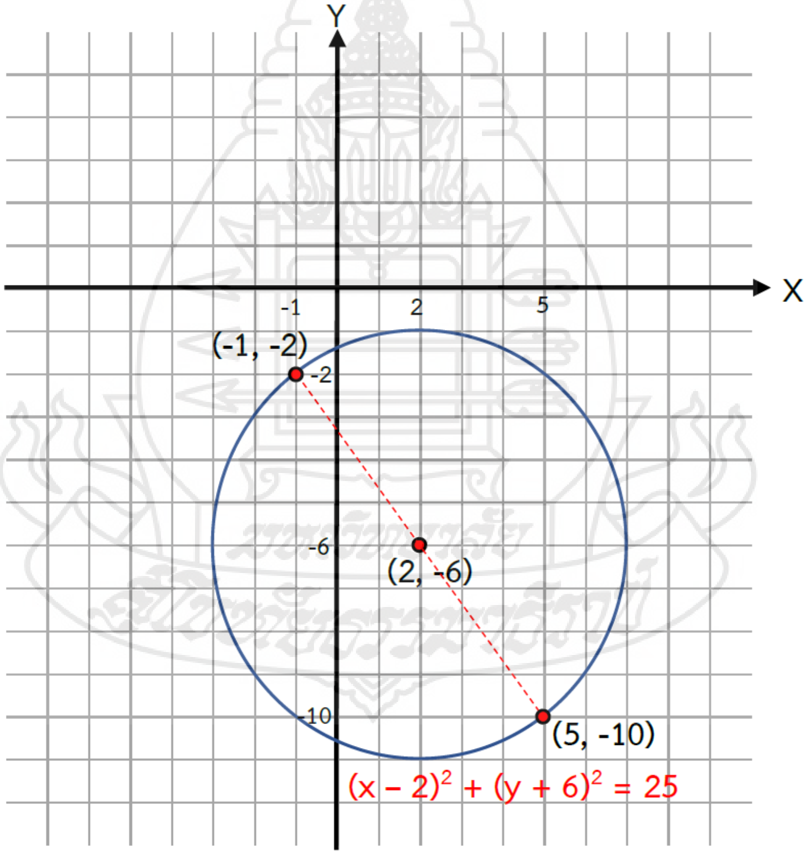
สมการรูปแบบทั่วไปของวงกลม

$$\begin{aligned} x^2 - 2(x)(2) + 2^2 + y^2 + 2(y)(6) + 6^2 &= 25 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 16y + 36 - 25 &= 0 \\ x^2 + y^2 - 4x + 16y + 15 &= 0 \end{aligned}$$

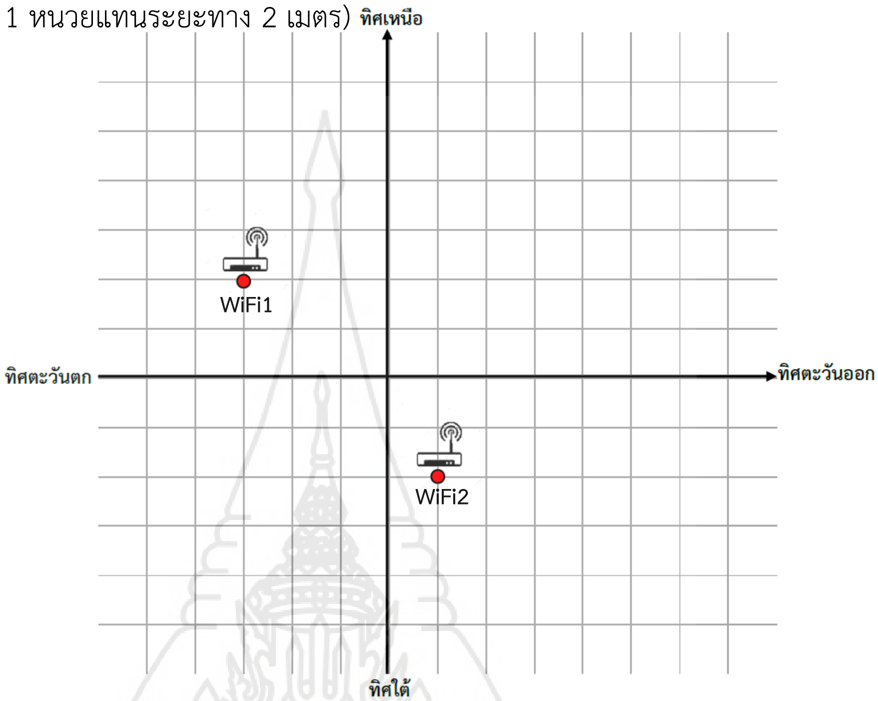
1.3 เขียนกราฟของวงกลมได้ดังนี้

จากสมการวงกลมที่ได้ คือ $(x - 2)^2 + (y + 6)^2 = 25$

จะได้ว่า วงกลมมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (2, -6) และมีรัศมียาว 5 หน่วย



2. โดยทั่วไปอุปกรณ์กระจายสัญญาณ WiFi จะปล่อยสัญญาณเป็นวงกลม ถ้าบ้านของนักเรียนมีอุปกรณ์กระจายสัญญาณ WiFi 2 ตัว ซึ่งแต่ละตัวจะปล่อยสัญญาณออกจากจุดศูนย์กลางได้ไกลที่สุด 6 เมตร ดังรูป จงเขียนสมการแทนขอบเขตการปล่อยสัญญาณ WiFi ของอุปกรณ์กระจายสัญญาณทั้ง 2 ตัว (กำหนดให้ 1 หน่วยแทนระยะทาง 2 เมตร)



2.1 จงเขียนแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนพิกัดของจุดศูนย์กลาง และความยาวรัศมีที่ตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ปล่อยสัญญาณออกไปได้

<u>แนวการตอบ</u>

1) หาพิกัดของจุดศูนย์กลางของตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ทั้ง 2 ตัว โดยให้จุดศูนย์กลางของตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 1 อยู่ที่พิกัด (h_1, k_1) และจุดศูนย์กลางของตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 2 อยู่ที่พิกัด (h_2, k_2)

2) หาความยาวรัศมีที่ตัวปล่อยสัญญาณ WiFi สามารถปล่อยสัญญาณ WiFi ออกไปได้ โดยให้ตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 1 ปล่อยสัญญาณออกไปได้รัศมี r_1 หน่วย และ ตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 1 ปล่อยสัญญาณออกไปได้รัศมี r_2 หน่วย

3) นำจุดศูนย์กลางของวงกลม (h_1, k_1), (h_2, k_2), r_1 และ r_2 แทนลงในสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

2.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงกลม พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

<u>แนวการตอบ</u>

1) หาสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมแทนขอบเขตการปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 1

กำหนดให้ จุดศูนย์กลางของตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 1 อยู่ที่พิกัด (h_1, k_1) และปล่อยสัญญาณ WiFi ออกไปได้ r_1 หน่วย

เนื่องจาก 1 หน่วยแทนระยะทาง 2 เมตร จากรูป จุดศูนย์กลางของตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 1 อยู่ที่พิกัด (-6, 4) จะได้ (h_1, k_1) คือ (-6, 4) และตัวปล่อยสัญญาณสามารถปล่อยสัญญาณออกจากจุดศูนย์กลางได้ไกลที่สุด 6 เมตร จะได้ r_1 คือ 6

จาก สมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ แทนจุดศูนย์กลางของวงกลมด้วย (-6, 4) และรัศมีของวงกลมด้วย 6

จะได้ สมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมแทนขอบเขตการปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 1 คือ

$(x - (-6))^2 + (y - 4)^2 = 6^2$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมแทนขอบเขตการปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 1 คือ

$(x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 36$

2) หาสมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมแทนขอบเขตการปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 2

กำหนดให้ จุดศูนย์กลางของตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 2 อยู่ที่พิกัด (h_2, k_2) และปล่อยสัญญาณ WiFi ออกไปได้ r_2 หน่วย

เนื่องจาก 1 หน่วยแทนระยะทาง 2 เมตร จากรูป จุดศูนย์กลางของตัวปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 2 อยู่ที่พิกัด (2, -4) จะได้ (h_2, k_2) คือ (2, -4) และตัวปล่อยสัญญาณสามารถปล่อยสัญญาณออกจากจุดศูนย์กลางได้ไกลที่สุด 6 เมตร จะได้ r_2 คือ 6

จาก สมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลม $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

แทนจุดศูนย์กลางของวงกลมด้วย (2, -4) และรัศมีของวงกลมด้วย 6

จะได้ สมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมแทนขอบเขตการปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 2 คือ

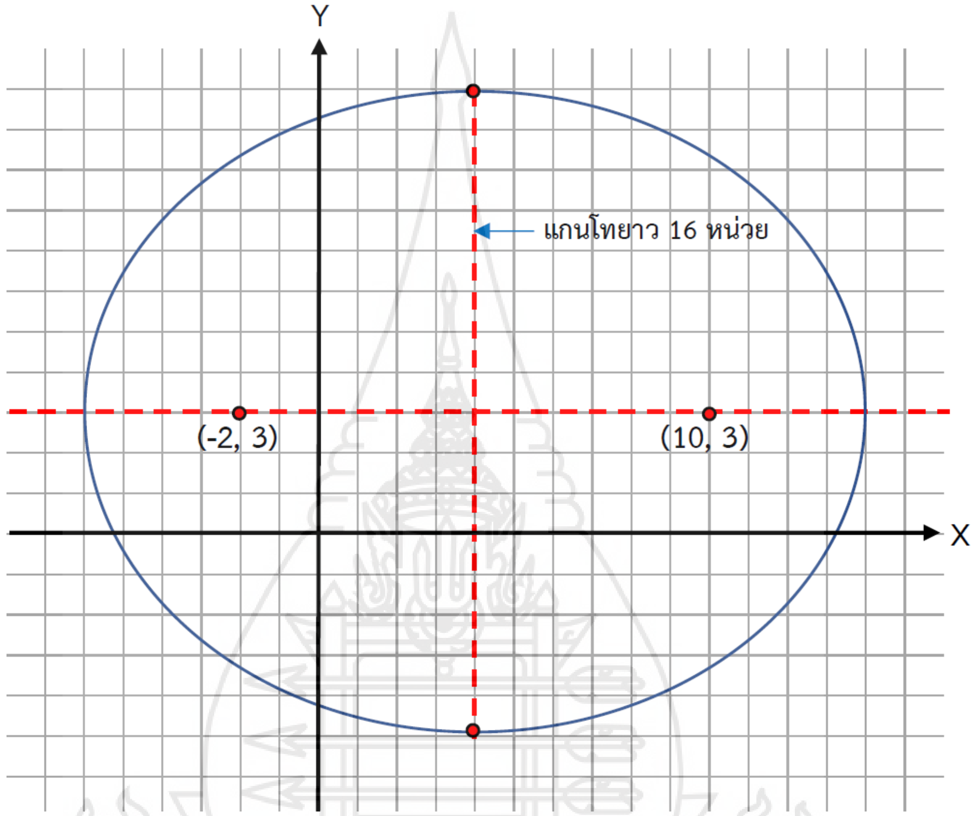
$(x - 2)^2 + (y - (-4))^2 = 6^2$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของวงกลมแทนขอบเขตการปล่อยสัญญาณ WiFi ตัวที่ 2 คือ

$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 36$

3. จงเขียนสมการรูปแบบมาตรฐานและรูปแบบทั่วไปของวงรีที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด (-2, 3) และ (10, 3) และแกนโทยาว 16 หน่วย พร้อมทั้งเขียนกราฟของวงรี

3.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนวงรีตามเงื่อนไขของโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนระยะห่างระหว่างโฟกัส ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังจุดยอด และความยาวของแกนโทของวงรี



<u>แนวการตอบ</u>

1) ตรวจสอบว่าแกนเอกของวงรีอยู่ในแนวตั้งหรือแนวนอน โดยดูจากจุดโฟกัสของวงรี

2) กำหนดให้ ระยะห่างระหว่างโฟกัสเท่ากับ 2c หน่วย ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังจุดยอด เท่ากับ a หน่วย และแกนโทของวงรียาว 2b หน่วย

3) หาระยะห่างระหว่างโฟกัสของวงรี ซึ่งจะทำให้รู้ค่า c

4) หาค่า b จากความยาวของแกนโทที่โจทย์กำหนดให้ ซึ่งแกนโทจะมีความยาวเท่ากับ 2b หน่วย

5) หาค่า a จากสูตร $c^2 = a^2 - b^2$

6) หาจุดศูนย์กลางของวงรี โดยหาจุดกึ่งกลางระหว่างจุดโฟกัสทั้งสอง

7) แทนจุดศูนย์กลางของวงกลม (h, k) ค่า a และ b ในสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี

3.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของวงรี พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

<u>แนวการตอบ</u>

จากโจทย์ โฟกัสของวงรีเรียงกันในนอน แสดงว่าแกนเอกของวงรีอยู่ในแนวนอน เนื่องจากโฟกัสอยู่ที่จุด (-2, 3) และ (10, 3) ซึ่งห่างกัน 12 หน่วย จะได้ว่า c = 6

เนื่องจากแกนโทของวงรียาว 16 หน่วย จะได้ว่า 2b = 16 ; b = 8

จากสูตร $c^2 = a^2 - b^2$

$6^2 = a^2 - 8^2$

$a^2 = 36 + 64$

$a^2 = 100$

$a = 10$

หาจุดศูนย์กลางของวงรี โดยหาจุดกึ่งกลางระหว่างโฟกัสที่อยู่จุด (-2, 3) และ (10, 3)

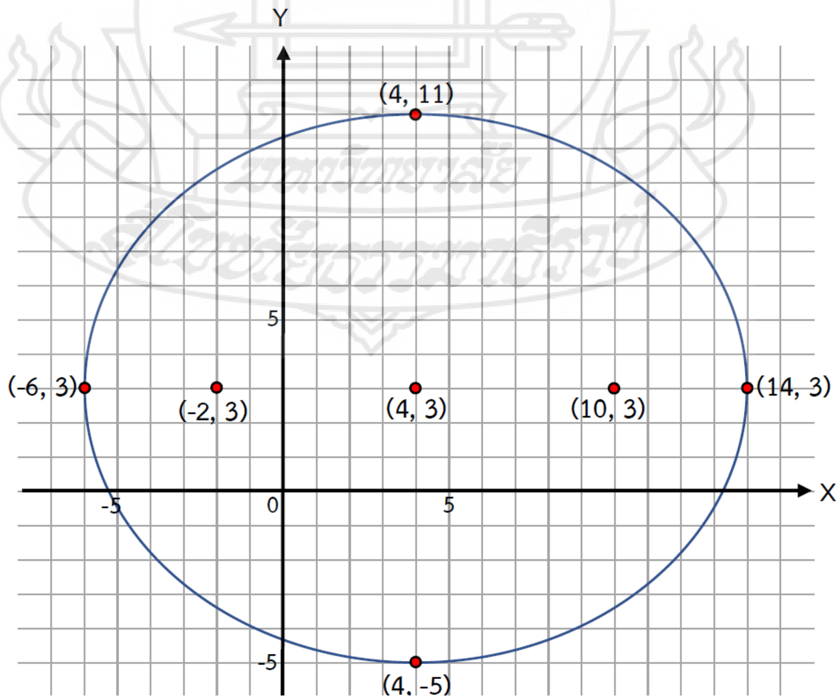
จะได้ $h = \frac{-2+10}{2} = 4$ และ $k = \frac{3+3}{2} = 3$ จะได้ว่า จุดศูนย์กลางของวงรีอยู่ที่จุด (4, 6)

เนื่องจาก แกนเอกของวงรีอยู่ในแนวนอน แทนจุดศูนย์กลางของวงรี (h, k) และ a, b ในสมการ

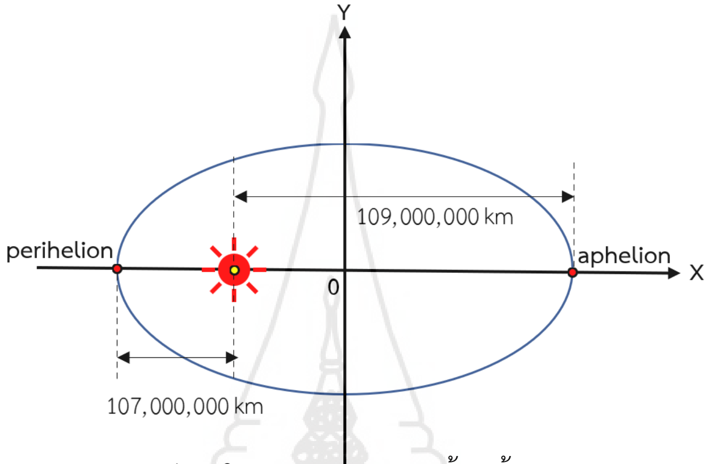
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ จะได้สมการของวงรี คือ $\frac{(x-4)^2}{10^2} + \frac{(y-6)^2}{8^2} = 1$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี คือ $\frac{(x-4)^2}{100} + \frac{(y-6)^2}{64} = 1$

3.3 เขียนกราฟของวงรีได้ ดังนี้



4. ดาวเคราะห์ดวงหนึ่งโคจรรอบดวงอาทิตย์เป็นวงรี โดยที่ดวงอาทิตย์อยู่ที่โฟกัสจุดหนึ่ง จุดที่ดาวเคราะห์อยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุดเรียกว่า perihelion จุดที่ดาวเคราะห์อยู่ไกลดวงอาทิตย์มากที่สุดเรียกว่า aphelion จุดทั้งสองนี้เป็นจุดยอดของวงโคจร ถ้าดาวศุกร์อยู่ห่างจากดวงอาทิตย์ 107,000,000 กิโลเมตร ที่ perihelion และ 109,000,000 กิโลเมตร ที่ aphelion ดังรูป จงเขียนสมการแสดงวงโคจรของดาวศุกร์รอบดวงอาทิตย์ โดยจุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงโคจร



4.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังโฟกัส จุดยอดของวงโคจร และจุดปลายแกนโทของวงโคจร

<u>แนวการตอบ</u>

1) กำหนดให้ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังโฟกัส เท่ากับ c หน่วย ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังจุดยอดของวงโคจร เท่ากับ a หน่วย และระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังจุดปลายแกนโทของวงโคจร เท่ากับ b หน่วย

2) หาค่า a โดยหาความยาวแกนเอกของวงรี ซึ่งหาจากระยะทางจากจุดที่ดาวศุกร์อยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุด perihelion ถึงจุดที่ดาวศุกร์อยู่ไกลจากดวงอาทิตย์มากที่สุด aphelion

3) หาค่า c ซึ่งเป็นระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังโฟกัส โดยนำระยะทางจากจุดศูนย์กลางของวงรีไปยังจุดยอดของวงโคจรลบด้วยระยะทางจากจุดที่ดาวศุกร์อยู่ใกล้ดวงอาทิตย์มากที่สุด (perihelion)

4) แทนค่า a และ c ลงในสูตร $c^2 = a^2 - b^2$ หาค่า b^2 โดยแก้สมการ

5) จากรูป วงโคจรของดาวศุกร์มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และแกนของวงรีอยู่บนแกน X นำค่า a และ b แทนลงในสมการรูปแบบมาตรฐานของวงรี $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

4.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการแสดงวงโคจรของดาวศุกร์รอบดวงอาทิตย์ โดยจุดกำเนิดอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงโคจร พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

แนวการตอบ

หาความยาวแกนเอกของวงรี โดยหาระยะทางระหว่างจุดยอดของวงโคจรจาก perihelion ถึง aphelion จะได้

$$
\begin{aligned}
2a &= 107{,}000{,}000 + 109{,}000{,}000 \\
&= (107 \times 10^6) + (109 \times 10^6) \\
&= 216 \times 10^6 \\
a &= 108 \times 10^6
\end{aligned}
$$

เนื่องจาก จุดศูนย์กลางของวงโคจรอยู่ที่จุดกำเนิด จะได้ c

$$
\begin{aligned}
c &= (108 \times 10^6) - (107 \times 10^6) \\
&= 1 \times 10^6
\end{aligned}
$$

จาก

$$
\begin{aligned}
c^2 &= a^2 - b^2 \\
(1 \times 10^6)^2 &= (108 \times 10^6)^2 - b^2 \\
b^2 &= (108 \times 10^6)^2 - (1 \times 10^6)^2 \\
&= (1.08^2 - 0.01^2) \times 10^{16} \\
&= 1.1663 \times 10^{16}
\end{aligned}
$$

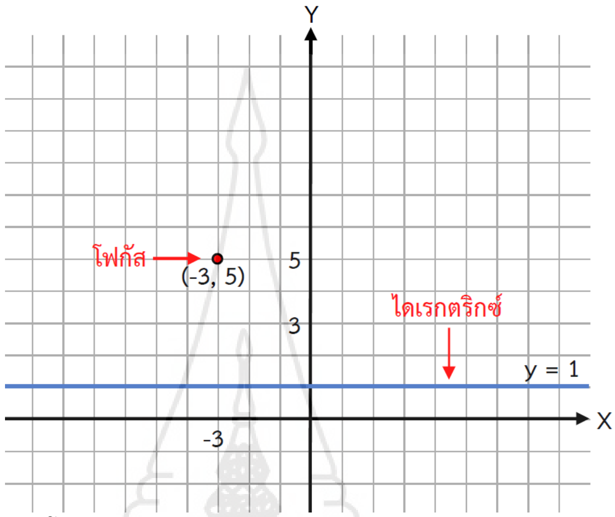
แทน a^2 และ b^2 ลงในสมการในรูปแบบมาตรฐานของวงรี จะได้

$$\frac{x^2}{(108 \times 10^6)^2} + \frac{y^2}{1.1663 \times 10^{16}} = 1$$

ดังนั้น สมการแสดงวงโคจรของดาวศุกร์รอบดวงอาทิตย์ คือ $\frac{x^2}{11{,}664 \times 10^{12}} + \frac{y^2}{11{,}663 \times 10^{12}} = 1$

5. จงเขียนสมการของพาราโบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด (-3, 5) และไดเรกตริกซ์ คือ y = 1 พร้อมทั้งเขียนกราฟของพาราโบลา

5.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนพาราโบลาตามเงื่อนไขของโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรแทนจุดยอดของพาราโบลา และระยะทางจากจุดยอดของพาราโบลาถึงโฟกัสของพาราโบลา



<u>แนวการตอบ</u>

1) หาแกนของพาราโบลา

2) กำหนดให้จุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่พิกัด (h, k) และระยะทางจากจุดยอดของพาราโบลาถึงโฟกัสของพาราโบลา เท่ากับ p หน่วย

3) หาจุดยอดของพาราโบลา ซึ่งจุดยอดของพาราโบลาจะอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสและไดเรกตริกซ์

4) หาค่า p โดยหาระยะทางระหว่างโฟกัสกับจุดยอดของพาราโบลา หรือระยะทางระหว่างจุดยอดกับไดเรกตริกซ์ แล้วนำจุดยอด และค่า p แทนลงในสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา

5.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของพาราโบลา พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

<u>แนวการตอบ</u>

เนื่องจากไดเรกตริกซ์ของพาราโบลาเป็นเส้นตรงที่ขนานกับแกน X จะได้ว่าแกนของพาราโบลาอยู่ในแนวตั้ง ขนานกับแกน Y พาราโบลาเป็นเส้นโค้งหงายขึ้น ($p > 0$) และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $(x - h)^2 = 4p(y - k)$

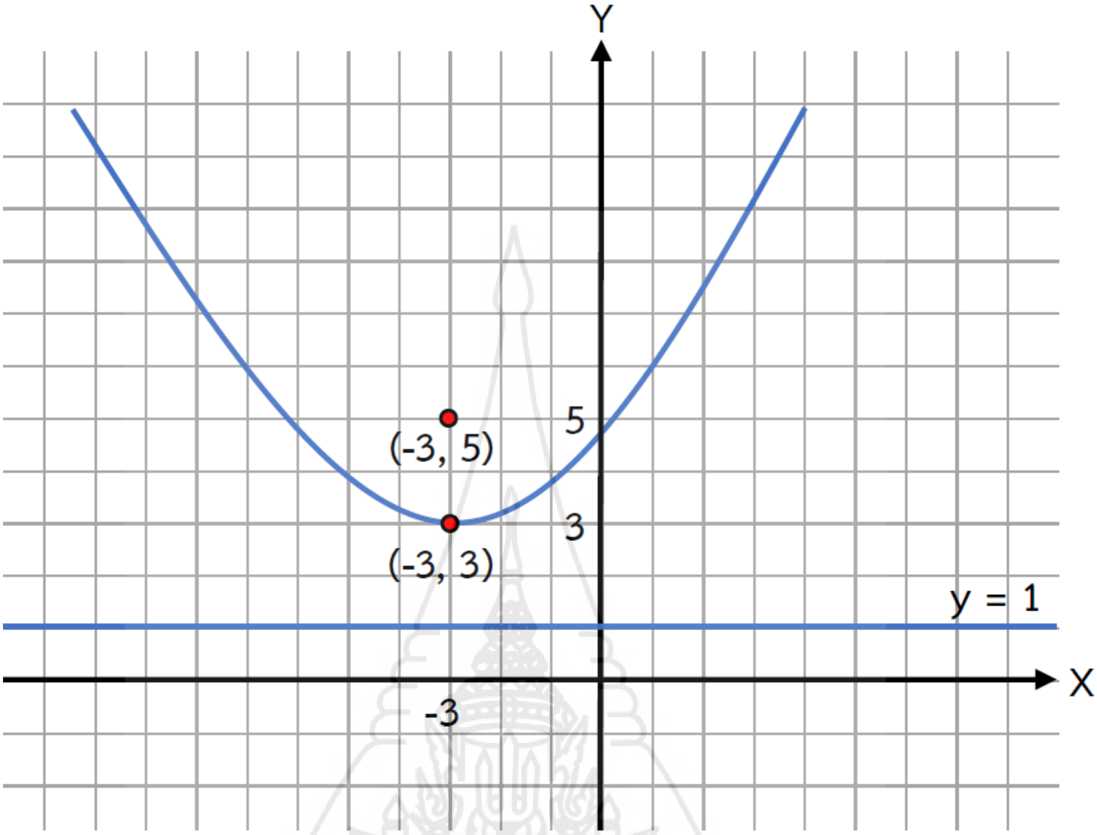
เนื่องจาก จุดยอดของพาราโบลาอยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสและไดเรกตริกซ์ จะได้ว่าจุดยอดของพาราโบลาอยู่ที่จุด (-3, 3)

เนื่องจาก ระยะทางระหว่างโฟกัสกับจุดยอดของพาราโบลา คือ 2 หน่วย จะได้ว่า p = 2

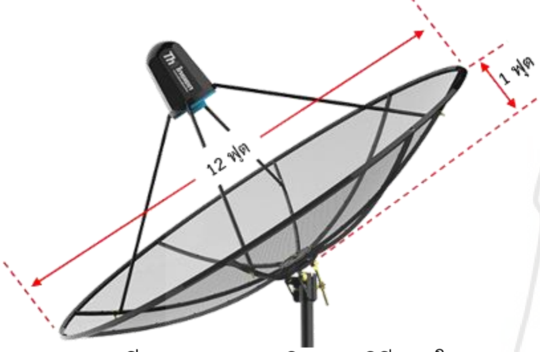
จะได้ สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา คือ $(x - (-3))^2 = 4(2)(y - 3)$

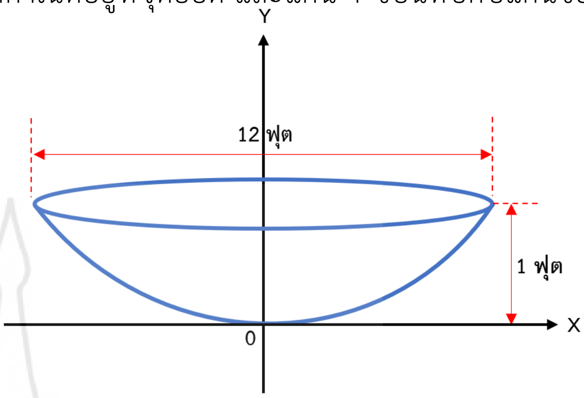
ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา คือ $(x + 3)^2 = 8(y - 3)$

5.3 จงเขียนกราฟของพาราโบลาที่ได้



6. พื้นผิวของจานรับสัญญาณดาวเทียมมีรูปทรงเป็นจานโค้งแบบพาราโบลา จานกว้าง 12 ฟุต และลึก 1 ฟุต ดังรูป ถ้ากำหนดระบบพิกัดฉากให้จุดกำเนิดอยู่ที่จุดยอด และแกน Y ซ้อนทับกับแกนของพาราโบลาแล้ว จงเขียนสมการพาราโบลา





6.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งกำหนดตัวแปรแทนจุดที่พาราโบลาผ่าน และระยะทางจากจุดยอดของพาราโบลาถึงโฟกัสของพาราโบลา

<u>แนวการตอบ</u>

1. หาแกนของพาราโบลา และสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา

2) กำหนดให้พาราโบลาผ่านจุด (x, y) และระยะทางจากจุดยอดของพาราโบลาถึงโฟกัสของพาราโบลา เท่ากับ p หน่วย

2. หาจุดที่พาราโบลาผ่าน จากความกว้างและความลึกของจานรับสัญญาณดาวเทียม

3. หาค่า p โดยแทนจุดที่พาราโบลาผ่านลงในสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา แล้วแก้สมการหาค่า p จากนั้นนำค่า p ที่ได้แทนกลับไปในสมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา

6.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการพาราโบลา พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

<u>แนวการตอบ</u> เนื่องจาก จุดกำเนิดอยู่ที่จุดยอด และแกน Y ซ้อนทับกับแกนของพาราโบลา จะได้ว่าแกนของพาราโบลาอยู่บนแกน Y เส้นโค้งพาราโบลาหงายขึ้น ($p > 0$) และมีสมการรูปแบบมาตรฐานเป็น $x^2 = 4py$

เนื่องจาก จานรับสัญญาณดาวเทียมกว้าง 12 ฟุต และลึก 1 ฟุต

จะได้ว่า เส้นโค้งพาราโบลาผ่านจุด (1, 6)

แทน x ด้วย 1 และแทน y ด้วย 6 ในสมการ $x^2 = 4py$ จะได้ $1^2 = 4p(6)$

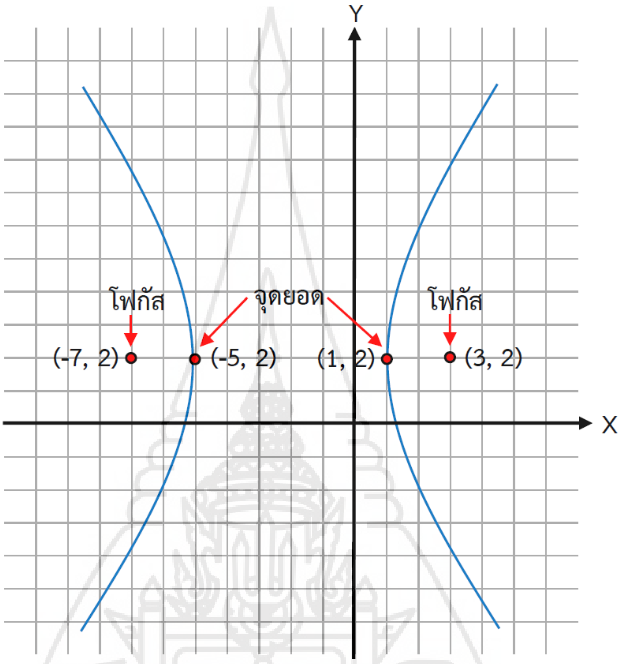
$$p = \frac{1}{24}$$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของพาราโบลา คือ $x^2 = 4(\frac{1}{24})y$ หรือ $x^2 = \frac{1}{6}y$

7. จงเขียนสมการของไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด (3, 2) และ (-7, 2) จุดยอดอยู่ที่ (-5, 2) และ (1, 2) พร้อมทั้งเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลา

7.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ โดยวาดภาพแทนไฮเพอร์โบลาจากเงื่อนไขที่กำหนดให้ในโจทย์ พร้อมทั้งกำหนดสัญลักษณ์แทนระยะห่างระหว่างโฟกัส ความยาวแกนตามขวาง และระยะทางจากจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาไปยังจุดปลายแกนสังยุค

<u>แนวการตอบ</u>



1) หาจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา ซึ่งเป็นจุดที่อยู่กึ่งกลางระหว่างโฟกัสทั้งสอง และอยู่กึ่งกลางระหว่างจุดยอดทั้งสองจุด

2) หาแกนของไฮเพอร์โบลา โดยพิจารณาจากโฟกัส และจุดยอด

3) กำหนดให้ ระยะห่างระหว่างโฟกัส เท่ากับ 2c หน่วย แกนตามขวางยาว 2a หน่วย และระยะทางจากจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาไปยังจุดปลายแกนสังยุค เท่ากับ b หน่วย

4) หาค่า a และค่า c จากความยาวของแกนตามขวาง และระยะห่างระหว่างโฟกัสตามลำดับ

5) หาค่า b โดยแก้สมการ $c^2 = a^2 + b^2$

6) แทนจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา a^2 และ b^2 ลงในสมการ

7.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการของไฮเพอร์โบลา พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบ ตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

<u>แนวการตอบ</u>

จุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา คือ (-2, 2) เนื่องจากโฟกัส และจุดยอดของไฮเพอร์โบลาเรียงกันในแนวนอน จะได้ว่าแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาอยู่ในแนวนอน

เนื่องจาก โฟกัสของไฮเพอร์โบลาอยู่ที่ (3, 2) และ (-7, 2) จะได้ว่า c = 5 และจุดยอดอยู่ที่ (-5, 2) และ (1, 2) จะได้ว่า a = 3

หา b^2 โดยแทน a = 3 และ c = 5 ในสมการ $c^2 = a^2 + b^2$

จะได้ $5^2 = 3^2 + b^2$

$b^2 = 25 - 9$

$b^2 = 16$

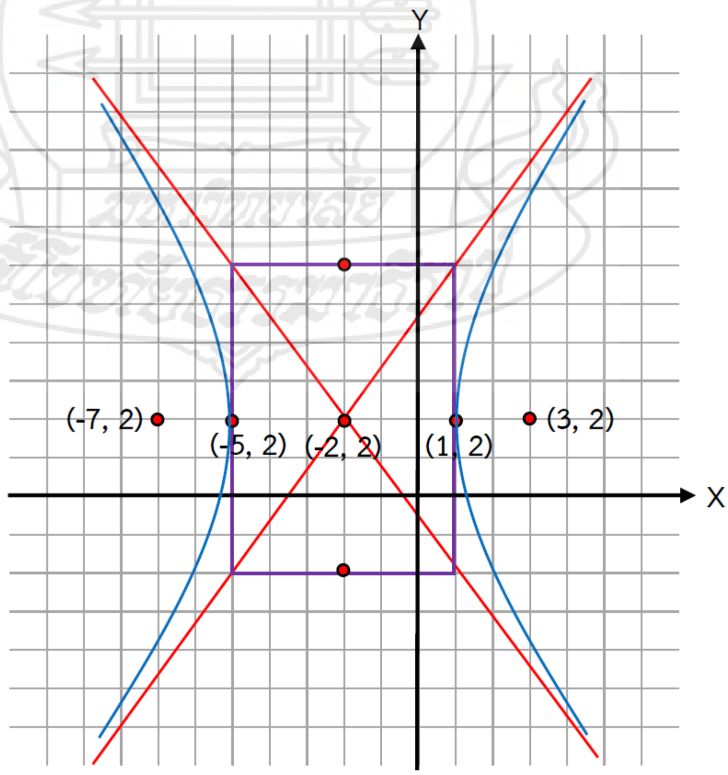
จากสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลาที่แกนตามขวางอยู่ในแนวนอน

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

จะได้สมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x-(-2))^2}{3^2} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

ดังนั้น สมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา คือ $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

7.3 จงเขียนกราฟของไฮเพอร์โบลาที่ได้



8. จงเขียนสมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด P(x, y) ซึ่งระยะห่างจากจุด P(x, y) กับจุด (7, −3) และ (−3, −3) ต่างกัน 6 หน่วย

8.1 จงเขียนแสดงแนวคิดและวิธีการในการหาคำตอบ พร้อมทั้งระบุว่าจุด P(x, y) ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขเป็นจุดที่อยู่บนภาคตัดกรวยชนิดใด และกำหนดสัญลักษณ์แทนผลต่างของระยะห่างจากจุด P(x, y) กับจุด (7, −3) และ (−3, −3)

<u>แนวการตอบ</u>

1) จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ว่า ระยะห่างจากจุด P(x, y) กับจุด (7, −3) และ (−3, −3) ต่างกัน 6 หน่วย ซึ่งเงื่อนไขของจุด P(x, y) สอดคล้องกับบทนิยามของไฮเพอร์โบลาเชิงเรขาคณิต จะได้ว่า จุด P(x, y) เป็นจุดที่อยู่บนไฮเพอร์โบลา

2) กำหนดให้ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาไปยังโฟกัส เท่ากับ c หน่วย ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลาไปยังจุดปลายแกนสังยุค เท่ากับ b หน่วย และผลต่างของระยะห่างจากจุด P(x, y) กับจุด (7, −3) และ (−3, −3) เท่ากับ 2a หน่วย

3) คำนวณหาค่า a และ b จากเงื่อนไขที่กำหนดให้ แล้ว นำค่า a และ b ที่ได้ไปแทนลงในสมการรูปแบบมาตรฐานของไฮเพอร์โบลา

8.2 จงแสดงวิธีทำในการหาสมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด P(x, y) พร้อมทั้งอธิบายวิธีการหาคำตอบตามลำดับขั้นตอนอย่างละเอียด

แนวการตอบ จากระยะห่างจากจุด P(x, y) กับจุด (7, −3) และ (−3, −3) ต่างกัน 6 หน่วย จะได้ว่าจุด P(x, y) เป็นจุดที่อยู่บนไฮเพอร์โบลาที่มีโฟกัสอยู่ที่จุด (7, −3) และ (−3, −3) และแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาอยู่ในแนวนอน และระยะห่างจากจุด P(x, y) กับจุด (7, −3) และ (−3, −3) ต่างกัน 6 หน่วย คือ ความยาวของแกนตามขวางของไฮเพอร์โบลาซึ่งยาว 6 หน่วย

จะได้ 2a = 6, a = 3 จุดศูนย์กลางของไฮแพอร์โบลา คือ $\left(\frac{7+(-3)}{2}, \frac{(-3)+(-3)}{2}\right) = (2,-3)$

ระยะทางจากจุดศูนย์กลางของไฮเพอร์โบลา (2, −3) ไปยังโฟกัส (7, −3) คือ 5 หน่วย จะได้ c = 5

จาก $c^2 = a^2 + b^2$

$5^2 = 3^2 + b^2$

$b^2 = 25 - 9$

$b^2 = 16, b = 4$

ดังนั้น สมการแสดงตำแหน่งที่เป็นไปได้ของจุด P(x, y) ซึ่งระยะห่างจากจุด P(x, y) กับจุด (7, −3) และ (−3, −3) ต่างกัน 6 หน่วย คือ $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y+3)^2}{16} = 1$

ค่าความยาก ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเที่ยงทั้งฉบับ

ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (ฉบับก่อนเรียน)

ข้อ	ความยาก	อำนาจจำแนก
1	0.53	0.66
2	0.47	0.52
3	0.41	0.48
4	0.48	0.55
5	0.44	0.48
6	0.54	0.63
7	0.55	0.54
8	0.51	0.48

ค่าความเที่ยงทั้งฉบับของแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ฉบับก่อนเรียน จำนวน 8 ข้อ เท่ากับ 0.92

ค่าความยาก ค่าอำนาจจำแนก และค่าความเที่ยงทั้งฉบับ

ของแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ (ฉบับหลังเรียน)

ข้อ	ความยาก	อำนาจจำแนก
1	0.60	0.65
2	0.54	0.73
3	0.45	0.50
4	0.61	0.61
5	0.45	0.54
6	0.47	0.59
7	0.50	0.49
8	0.43	0.58

ค่าความเที่ยงทั้งฉบับของแบบทดสอบวัดความสามารถในการสื่อสารทางคณิตศาสตร์ ฉบับหลังเรียน จำนวน 8 ข้อ เท่ากับ 0.94

ภาคผนวก จ

- แบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์
- ค่าดัชนีความสอดคล้อง ค่าอำนาจจำแนกรายข้อ และค่าความเที่ยง ของแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์

แบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์

คำชี้แจง

1. แบบสอบถามนี้เป็นแบบสอบถามวัดความคิดเห็นและความรู้สึกของนักเรียนที่มีต่อวิชาคณิตศาสตร์ โดยความคิดเห็นของนักเรียนไม่มีถูกหรือผิด และไม่มีผลต่อคะแนนวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน

2. ให้นักเรียนพิจารณาข้อความในแต่ละข้อ แล้วทำเครื่องหมาย ✓ ลงในช่องระดับความคิดเห็นที่ตรงกับความคิดเห็นหรือความรู้สึกของนักเรียน

ตัวอย่าง

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
	เห็นด้วยอย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
1. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยาก และซับซ้อน		✓			

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
	เห็นด้วยอย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
1. คณิตศาสตร์มีความเกี่ยวข้องกับชีวิตประจำวัน และมีประโยชน์ สามารถนำไปประยุกต์ใช้ในชีวิตประจำวันได้					
2. การเรียนคณิตศาสตร์ทำให้ข้าพเจ้ามีความรู้พื้นฐานสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ในการเรียนวิชาอื่น ๆ ได้					
3. การเรียนคณิตศาสตร์ช่วยฝึกให้ข้าพเจ้าเป็นคนมีเหตุผล					
4. การเรียนคณิตศาสตร์ทำให้ข้าพเจ้าคิดอย่างเป็นระบบ และฝึกการทำงานอย่างเป็นลำดับขั้นตอน					
5. ข้าพเจ้าคิดว่าการเรียนคณิตศาสตร์ไม่สำคัญ และไม่จำเป็นต้องเรียน					
6. การเรียนคณิตศาสตร์ช่วยส่งเสริมให้ข้าพเจ้ามีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์ และช่วยพัฒนาสติปัญญาของข้าพเจ้าได้เป็นอย่างดี					
7. การเรียนคณิตศาสตร์ทำให้ข้าพเจ้าคุ้นเคยกับวิธีการแก้ปัญหาต่าง ๆ ที่หลากหลาย และช่วยในการวางแผน ตัดสินใจแก้ปัญหาได้อย่างถูกต้องเหมาะสม					

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
	เห็นด้วยอย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
8. การประกอบอาชีพในอนาคตไม่จำเป็นต้องใช้ความรู้เกี่ยวกับคณิตศาสตร์					
9. การเรียนคณิตศาสตร์ทำให้ข้าพเจ้ารู้จักการคาดการณ์และวางแผนเพื่อรับมือกับสถานการณ์ต่าง ๆ ที่อาจเกิดขึ้นในอนาคต					
10. การเรียนคณิตศาสตร์ทำให้ข้าพเจ้าเป็นคนที่เคร่งครัด ไม่มีความยืดหยุ่น					
11. ข้าพเจ้ามีความสุขและสนุกกับการเรียนคณิตศาสตร์					
12. ข้าพเจ้ารู้สึกเบื่อหน่ายและง่วงนอนเมื่อเรียนคณิตศาสตร์					
13. ข้าพเจ้ารู้สึกภูมิใจเมื่อแก้โจทย์หรือหาคำตอบของปัญหาที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์ได้ด้วยตนเอง					
14. ข้าพเจ้ารู้สึกเครียดเมื่อต้องแก้โจทย์ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์					
15. คณิตศาสตร์เป็นวิชาที่ยาก และมีความซับซ้อน					
16. เนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์เป็นเนื้อหาที่สามารถอ่าน และทำความเข้าใจได้ด้วยตนเอง					
17. ข้าพเจ้าคิดว่าการฝึกทำแบบฝึกหัด จะทำให้เข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์มากขึ้น					

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
	เห็นด้วยอย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
18. ข้าพเจ้าชอบตอบคำถาม และแสดงความคิดเห็นต่าง ๆ ในขณะที่เรียนคณิตศาสตร์					
19. ข้าพเจ้าไม่มั่นใจ และไม่กล้าออกไปแสดงวิธีทำหรือแสดงแนวคิดของตนเองหน้าชั้นเรียน					
20. ข้าพเจ้ารู้สึกกลัว และตื่นเต้นมากเมื่อมีการสุ่มเรียกตอบคำถามที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์					
21. ข้าพเจ้ามีความพร้อมทุกครั้งที่จะเรียนหรือทำกิจกรรมต่าง ๆ ที่เกี่ยวกับคณิตศาสตร์					
22. ข้าพเจ้ายกมือตอบคำถามครูทุกครั้ง					
23. ข้าพเจ้าจะกลับไปทบทวนเนื้อหาวิชาคณิตศาสตร์หลังจากที่เรียนไปแล้วอย่างสม่ำเสมอ					
24. ในขณะที่เรียนคณิตศาสตร์ข้าพเจ้าหลีกเลี่ยงที่จะแสดงความคิดเห็นหรือตอบคำถามในชั้นเรียน					
25. ข้าพเจ้าไม่เคยค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติมเกี่ยวกับคณิตศาสตร์					
26. ข้าพเจ้าหาโจทย์คณิตศาสตร์มาทำเพิ่มเติมจากโจทย์ที่ทำในชั้นเรียน					
27. ข้าพเจ้าช่วยอธิบาย และสอนเพื่อนเมื่อเพื่อนไม่เข้าใจเนื้อหาที่เกี่ยวกับวิชาคณิตศาสตร์					

ข้อความ	ระดับความคิดเห็น				
	เห็นด้วยอย่างยิ่ง	เห็นด้วย	ไม่แน่ใจ	ไม่เห็นด้วย	ไม่เห็นด้วยอย่างยิ่ง
28. ข้าพเจ้าตั้งใจเรียนคณิตศาสตร์ทุกครั้ง					
29. ข้าพเจ้าไม่กล้าซักถามครู เมื่อไม่เข้าใจเนื้อหาคณิตศาสตร์ที่เรียน					
30. ข้าพเจ้าไม่ชอบทำโจทย์คณิตศาสตร์ที่ยาก ๆ และซับซ้อน					

ตารางค่าดัชนีความสอดคล้อง (IOC) ค่าอำนาจจำแนกรายข้อ และค่าความเที่ยง แบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์

ข้อ	IOC	ค่าอำนาจจำแนกรายข้อ	ข้อ	IOC	ค่าอำนาจจำแนกรายข้อ
1	1.00	0.74	16	1.00	0.80
2	1.00	0.81	17	1.00	0.69
3	1.00	0.62	18	1.00	0.84
4	1.00	0.46	19	1.00	0.83
5	0.67	0.75	20	1.00	0.77
6	1.00	0.72	21	1.00	0.60
7	1.00	0.64	22	1.00	0.90
8	1.00	0.76	23	1.00	0.79
9	1.00	0.75	24	1.00	0.91
10	0.67	0.90	25	1.00	0.86
11	1.00	0.69	26	1.00	0.80
12	1.00	0.94	27	1.00	0.78
13	1.00	0.75	28	1.00	0.76
14	0.67	0.82	29	0.67	0.80
15	1.00	0.79	30	1.00	0.81

ค่าความเที่ยงของแบบสอบถามเจตคติต่อคณิตศาสตร์ทั้งฉบับ จำนวน 30 ข้อ เท่ากับ 0.979

ภาคผนวก ฉ

คะแนนพัฒนาการจากผลการทดสอบย่อยรายบุคคล

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 2

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 1 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 2 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	6	7	1	20
3	6	7	1	20
13	8	9	1	30
27	5	5	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 2				
4	4	5	1	20
10	7	7	0	20
15	6	7	1	20
28	9	9	0	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 3				
5	5	6	1	20
14	6	7	1	20
16	8	8	0	20
23	6	8	2	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 4				
6	3	5	2	20
17	9	8	-1	10
20	7	8	1	20
22	6	6	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 1 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 2 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	4	3	-1	10
18	6	7	1	20
21	7	9	2	30
24	6	8	2	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 6				
9	5	6	1	20
11	6	7	1	20
19	4	4	0	20
25	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 7				
1	6	5	-1	10
7	6	7	1	20
12	4	3	-1	10
26	7	9	2	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 3, 5 และ 6

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 3

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 2 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 3 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	7	7	0	20
3	7	6	-1	10
13	9	8	-1	10
27	5	8	3	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 2				
4	5	2	-3	10
10	7	7	0	20
15	7	8	1	20
28	9	7	-2	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 3				
5	6	5	-1	10
14	7	7	0	20
16	8	9	1	30
23	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 4				
6	5	3	-2	10
17	8	7	-1	10
20	8	5	-3	10
22	6	6	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 2 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 3 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	3	4	1	20
18	7	7	0	20
21	9	8	-1	10
24	8	6	-2	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 6				
9	6	7	1	20
11	7	8	1	20
19	4	5	1	20
25	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 7				
1	5	6	1	20
7	7	8	1	20
12	3	4	1	20
26	9	9	0	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 3, 5, 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 4

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 3 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 4 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	7	5	-2	10
3	6	7	1	20
13	8	8	0	20
27	8	6	-2	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 2				
4	2	4	2	20
10	7	6	-1	10
15	8	8	0	20
28	7	9	2	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 3				
5	5	4	-1	10
14	7	8	1	20
16	9	8	-1	10
23	8	7	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 4				
6	3	3	0	20
17	7	8	1	20
20	5	6	1	20
22	6	6	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 3 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 4 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	4	5	1	20
18	7	7	0	20
21	8	9	1	30
24	6	5	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 6				
9	7	6	-1	10
11	8	9	1	30
19	5	5	0	20
25	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 7				
1	6	7	1	20
7	8	7	-1	10
12	4	4	0	20
26	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 4, 5, 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 5

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 4 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 5 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	5	6	1	20
3	7	7	0	20
13	8	8	0	20
27	6	5	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 2				
4	4	5	1	20
10	6	5	-1	10
15	8	7	-1	10
28	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 3				
5	4	4	0	20
14	8	6	-2	10
16	8	7	-1	10
23	7	6	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 4				
6	3	5	2	20
17	8	8	0	20
20	6	7	1	20
22	6	6	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 4 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 5 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	5	5	0	20
18	7	7	0	20
21	9	9	0	30
24	5	7	2	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 6				
9	6	6	0	20
11	9	8	-1	10
19	5	4	-1	10
25	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 7				
1	7	6	-1	10
7	7	7	0	20
12	4	5	1	20
26	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 4, 5, 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 6

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 5 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 6 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	6	5	-1	10
3	7	7	0	20
13	8	9	1	30
27	5	4	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 2				
4	5	3	-2	10
10	5	6	1	20
15	7	6	-1	10
28	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 3				
5	4	4	0	20
14	6	5	-1	10
16	7	8	1	20
23	6	6	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 4				
6	5	4	-1	10
17	8	9	1	30
20	7	8	1	20
22	6	6	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 5 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 6 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	5	3	-2	10
18	7	7	0	20
21	9	8	-1	10
24	7	5	-2	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 6				
9	6	6	0	20
11	8	7	-1	10
19	4	4	0	20
25	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 7				
1	6	6	0	20
7	7	6	-1	10
12	5	3	-2	10
26	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 3, 4, 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 7

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 6 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 7 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	5	6	1	20
3	7	7	0	20
13	9	7	-2	10
27	4	3	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 2				
4	3	4	1	20
10	6	7	1	20
15	6	6	0	20
28	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 3				
5	4	3	-1	10
14	5	6	1	20
16	8	8	0	20
23	6	6	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 4				
6	4	3	-1	10
17	9	8	-1	10
20	8	6	-2	10
22	6	7	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 6 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 7 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	3	6	3	20
18	7	7	0	20
21	8	8	0	20
24	5	6	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 6				
9	6	6	0	20
11	7	8	1	20
19	4	3	-1	10
25	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 7				
1	6	6	0	20
7	6	5	-1	10
12	3	3	0	20
26	8	9	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 3, 5, 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 8

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 7 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 8 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	6	8	2	20
3	7	7	0	20
13	7	9	2	30
27	3	5	2	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 2				
4	4	3	-1	10
10	7	8	1	20
15	6	7	1	20
28	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 3				
5	3	4	1	20
14	6	7	1	20
16	8	9	1	30
23	6	5	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 4				
6	3	4	1	20
17	8	9	1	30
20	6	5	-1	10
22	7	6	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 7 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 8 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	6	3	-3	10
18	7	7	0	20
21	8	9	1	30
24	6	5	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 6				
9	6	8	2	20
11	8	7	-1	10
19	3	5	2	20
25	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 7				
1	6	7	1	20
7	5	6	1	20
12	3	4	1	20
26	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 3, 4, 5 , 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 9

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 8 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 9 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	8	7	-1	10
3	7	7	0	20
13	9	8	-1	10
27	5	4	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 2				
4	3	5	2	20
10	8	9	1	20
15	7	7	0	20
28	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 3				
5	4	5	1	20
14	7	6	-1	10
16	9	8	-1	10
23	5	6	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 4				
6	4	6	2	20
17	9	7	-2	10
20	5	6	1	20
22	6	6	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 8 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 9 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	3	4	1	20
18	7	9	2	30
21	9	9	0	30
24	5	8	3	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 6				
9	8	6	-2	10
11	7	8	1	20
19	5	4	-1	10
25	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 7				
1	7	8	1	20
7	6	8	2	20
12	4	5	1	20
26	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 2, 3, 4, 5 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 10

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 9 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 10 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	7	9	2	30
3	7	9	2	30
13	8	9	1	30
27	4	6	2	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				25
กลุ่มที่ 2				
4	5	6	1	20
10	9	7	-2	10
15	7	8	1	20
28	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 3				
5	5	4	-1	10
14	6	8	2	20
16	8	8	0	20
23	6	7	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 4				
6	6	4	-2	10
17	7	8	1	20
20	6	6	0	20
22	6	7	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 9 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 10 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	4	6	2	20
18	9	8	-1	10
21	9	8	-1	10
24	8	7	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 6				
9	6	8	2	10
11	8	8	0	20
19	4	4	0	10
25	8	8	0	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 7				
1	8	8	0	20
7	8	8	0	20
12	5	5	0	20
26	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 3, 4 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 11

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 10 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 11 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	9	7	-2	10
3	9	7	-2	10
13	9	9	0	30
27	6	5	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 2				
4	6	4	-2	10
10	7	8	1	20
15	8	8	0	20
28	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 3				
5	4	6	2	20
14	8	8	0	20
16	8	9	1	30
23	7	7	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 4				
6	4	5	1	20
17	8	8	0	20
20	6	7	1	20
22	7	7	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 10 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 11 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	6	5	-1	10
18	8	7	-1	10
21	8	8	0	20
24	7	7	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 6				
9	8	8	0	20
11	8	6	-2	10
19	4	3	-1	10
25	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 7				
1	8	8	0	20
7	8	7	-1	10
12	5	4	-1	10
26	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 12

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 11 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 12 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	7	8	1	20
3	7	9	2	30
13	9	9	0	30
27	5	6	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				25
กลุ่มที่ 2				
4	4	5	1	20
10	8	8	0	20
15	8	8	0	20
28	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 3				
5	6	6	0	20
14	8	8	0	20
16	9	9	0	30
23	7	9	2	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				25
กลุ่มที่ 4				
6	5	5	0	20
17	8	9	1	30
20	7	6	-1	10
22	7	7	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 11 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 12 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	5	6	1	20
18	7	7	0	20
21	8	9	1	30
24	7	8	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 6				
9	8	8	0	20
11	6	8	2	20
19	3	5	2	20
25	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 7				
1	8	8	0	20
7	7	8	1	20
12	4	6	2	20
26	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 3, 4, 5 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 13

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 12 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 13 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนน พัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	8	8	0	20
3	9	9	0	30
13	9	9	0	30
27	6	5	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 2				
4	5	6	1	20
10	8	8	0	20
15	8	9	1	30
28	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				25
กลุ่มที่ 3				
5	6	7	1	20
14	8	8	0	20
16	9	9	0	30
23	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 4				
6	5	5	0	20
17	9	8	-1	10
20	6	7	1	20
22	7	8	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 12 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 13 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	6	4	-2	10
18	7	8	1	20
21	9	9	0	30
24	8	7	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 6				
9	8	8	0	20
11	8	7	-1	10
19	5	5	0	20
25	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 7				
1	8	9	1	30
7	8	8	0	20
12	6	6	0	20
26	9	9	0	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				25

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 3, 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 14

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 13 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 14 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	8	7	-1	10
3	9	8	-1	10
13	9	8	-1	10
27	5	5	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 2				
4	6	5	-1	10
10	8	8	0	20
15	9	8	-1	10
28	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 3				
5	7	6	-1	10
14	8	8	0	20
16	9	8	-1	10
23	8	7	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 4				
6	5	4	-1	10
17	8	9	1	30
20	7	8	1	20
22	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 13 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 14 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	4	6	2	20
18	8	7	-1	10
21	9	8	-1	10
24	7	8	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 6				
9	8	7	-1	10
11	7	7	0	20
19	5	4	-1	10
25	9	9	0	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 7				
1	9	8	-1	10
7	8	8	0	20
12	6	5	-1	10
26	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 15

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 14 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 15 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	7	7	0	20
3	8	7	-1	10
13	8	9	1	30
27	5	6	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 2				
4	5	6	1	20
10	8	8	0	20
15	8	7	-1	10
28	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 3				
5	6	6	0	20
14	8	9	1	30
16	8	9	1	30
23	7	7	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				25
กลุ่มที่ 4				
6	4	5	1	20
17	9	8	-1	10
20	8	7	-1	10
22	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 14 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 15 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	6	6	0	20
18	7	7	0	20
21	8	9	1	30
24	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				25
กลุ่มที่ 6				
9	7	8	1	20
11	7	7	0	20
19	4	5	1	20
25	9	9	0	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 7				
1	8	8	0	20
7	8	7	-1	10
12	5	5	0	20
26	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 3, 5 และ 6

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 16

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 15 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 16 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	7	6	-1	10
3	7	7	0	20
13	9	8	-1	10
27	6	5	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				12.5
กลุ่มที่ 2				
4	6	6	0	20
10	8	8	0	20
15	7	7	0	20
28	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 3				
5	6	5	-1	10
14	9	8	-1	10
16	9	9	0	30
23	7	7	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 4				
6	5	5	0	20
17	8	8	0	20
20	7	6	-1	10
22	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 15 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 16 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	6	4	-2	10
18	7	6	-1	10
21	9	9	0	30
24	9	8	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				15
กลุ่มที่ 6				
9	8	8	0	20
11	7	8	1	20
19	5	3	-2	10
25	9	9	0	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 7				
1	8	7	-1	10
7	7	7	0	20
12	5	6	1	20
26	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 2, 3, 4, 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 17

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 16 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 17 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	6	8	2	20
3	7	8	1	20
13	8	9	1	30
27	5	6	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 2				
4	6	5	-1	10
10	8	8	0	20
15	7	8	1	20
28	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 3				
5	5	5	0	20
14	8	8	0	20
16	9	8	-1	10
23	7	8	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				17.5
กลุ่มที่ 4				
6	5	7	2	20
17	8	9	1	30
20	6	7	1	20
22	8	8	0	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 16 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 17 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	4	6	2	20
18	6	8	2	20
21	9	9	0	30
24	8	7	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 6				
9	8	8	0	20
11	8	7	-1	10
19	3	6	3	20
25	9	9	0	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 7				
1	7	7	0	20
7	7	8	1	20
12	6	5	-1	10
26	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 4, 5, 6 และ 7

คะแนนพัฒนาการของนักเรียนแต่ละคนในกลุ่ม จากการทดสอบย่อยครั้งที่ 18

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 17 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 18 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 1				
2	8	8	0	20
3	8	9	1	30
13	9	9	0	30
27	6	5	-1	10
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 2				
4	5	5	0	20
10	8	7	-1	10
15	8	8	0	20
28	9	9	0	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 3				
5	5	6	1	20
14	8	8	0	20
16	8	9	1	30
23	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				25
กลุ่มที่ 4				
6	7	7	0	20
17	9	9	0	30
20	7	8	1	20
22	8	9	1	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				25

เลขที่	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 17 (9 คะแนน)	คะแนนทดสอบย่อย ครั้งที่ 18 (9 คะแนน)	ผลต่าง	คะแนนพัฒนาการ
กลุ่มที่ 5				
8	6	6	0	20
18	8	8	0	20
21	9	9	0	30
24	7	8	1	20
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				22.5
กลุ่มที่ 6				
9	8	8	0	20
11	7	8	1	10
19	6	7	1	20
25	9	9	0	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20
กลุ่มที่ 7				
1	7	7	0	20
7	8	7	-1	20
12	5	4	-1	10
26	9	9	0	30
คะแนนพัฒนาการเฉลี่ยของกลุ่ม				20

กลุ่มที่ได้รับรางวัล 5 ลำดับแรก ได้แก่ กลุ่มที่ 1, 2, 3, 4, 5, 6 และ 7

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ	นางสาวศุภารัตน์ นิลพันธ์
วัน เดือน ปีเกิด	9 มกราคม 2537
สถานที่เกิด	จังหวัดร้อยเอ็ด
ประวัติการศึกษา	ครุศาสตรบัณฑิต มหาวิทยาลัยราชภัฏมหาสารคาม พ.ศ. 2560
สถานที่ทำงาน	โรงเรียนเฉลิมพระเกียรติสมเด็จพระศรีนครินทร์ ระยอง จังหวัดระยอง
ตำแหน่ง	ครู